

Zadania dodatkowe z podstaw matematyki

Każde zadanie jest za 10 pkt.

1. Funkcja $\varphi : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}))$ jest określona wzorem

$$\varphi(Z) = \{\langle X, Y \rangle : P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \mid Z \subseteq X \cap Y\}$$

- (a) Czy φ jest injekcją?
 - (b) Czy φ jest surjekcją?
 - (c) Znajdź przeciwobrazy: zbioru wszystkich relacji równoważności w $P(\mathbb{N})$ i zbioru wszystkich częściowych relacji równoważności w $P(\mathbb{N})$.
 - (d) Wyznacz moce klas abstrakcji $\ker(\varphi)$.
 - (e) Sprawdź, czy poniższe równości zachodzą dla dowolnych $Z_1, Z_2 \in P(\mathbb{N})$.
 - $\varphi(Z_1 \cap Z_2) = \varphi(Z_1) \cap \varphi(Z_2)$
 - $\varphi(Z_1 \cup Z_2) = \varphi(Z_1) \cup \varphi(Z_2)$
2. Niech \sim będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, że $f \sim g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda n. f(n) - g(n)$ jest ciągiem zbieżnym do zera.
- (a) Pokaż, że \sim jest relacją równoważności.
 - (b) Wyznacz moc zbioru $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\sim$.
 - (c) Skonstruuj rodzinę bijekcji $\Phi_{f,g} : [f]_{\sim} \rightarrow [g]_{\sim}$ indeksowaną $f, g \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
 - (d) Wyznacz moce klas abstrakcji relacji \sim .
3. Funkcja $f : X \rightarrow Y$, gdzie $X \subseteq \mathbb{R}$, jest *okresowa*, gdy dla pewnego $t > 0$ zachodzi warunek $\forall x \in X (x + t) \in X \wedge f(x + t) = f(x)$.
- (a) Ile jest funkcji okresowych $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$?
 - (b) Ile jest funkcji okresowych $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$?
4. Zbiór częściowo uporządkowany jest *półkratą dolną (górną)*, gdy każdy jego podzbiór 2-elementowy posiada kres dolny (górny).
- (a) Pokaż, że skończony zbiór częściowo uporządkowany z elementami największym i najmniejszym jest półkratą dolną wtedy i tylko wtedy, gdy jest półkratą górną.
 - (b) Podaj przykład półkraty dolnej z elementami największym i najmniejszym, która nie jest półkratą górną.
 - (c) Pokaż, że zbiór częściowo uporządkowany jest kratą zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie półkratą górną i zupełnym porządkiem częściowym.
5. (a) Niech f będzie bijekcją z A w A . Pokaż, że istnieje taki podzbiór $B \subseteq A$, że
- $B \subseteq f(A - B)$,
 - $\forall C (C \subsetneq A - B \rightarrow C \cup f(C) \neq A)$.
- (b) Czy istnieje taki łańcuch przeliczalnych podzbiorów \mathbb{R} , którego suma nie jest przeliczalna?