

Matematyka dla biologów — Zajęcia nr 6.

Dariusz Wrzosek

06 listopada 2025

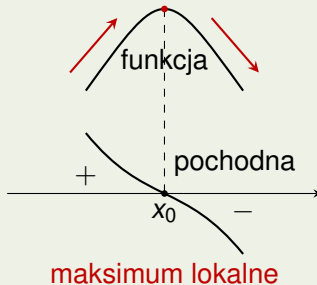
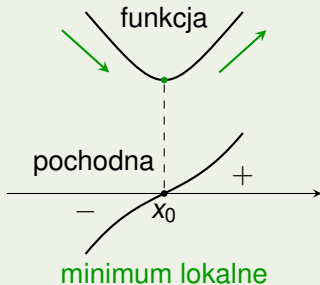
Pochodna funkcji — przypomnienie

Dzięki pochodnej można określić czy funkcja rośnie czy maleje

- jeśli pochodna jest ujemna ($f'(x) < 0$), to funkcja maleje
- jeśli pochodna jest dodatnia ($f'(x) > 0$), to funkcja rośnie

Pochodna a wyznaczanie ekstremów funkcji

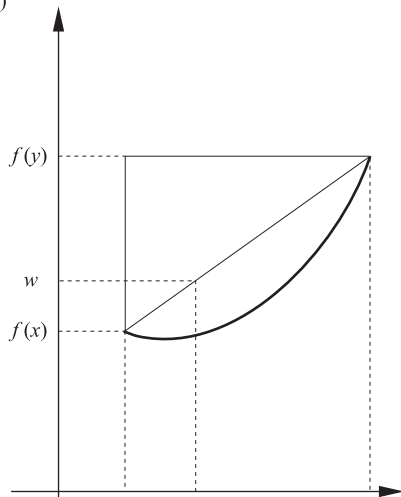
Minimum lub maksimum funkcji f w $x_0 \implies f'(x_0) = 0$.



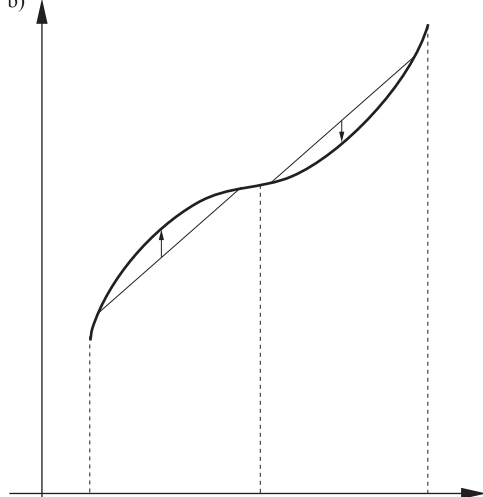
Funkcja wypukła, funkcja wklęsła

Wypukłość i wklęsłość funkcji definiuje się geometrycznie, odnosząc się do prostych będących siecznymi wykresu funkcji.

a)



b)



Definicja

Funkcja jest **ściśle wypukła**, jeśli odcinek łączący dwa dowolne różne punkty wykresu funkcji leży w całości (poza końcami) **ponad** wykresem funkcji. Funkcja jest **wypukła**, jeśli odcinek łączący dwa dowolne różne punkty wykresu funkcji leży ponad wykresem lub ma punkty z nim wspólne.

Definicja

*Funkcja jest **ściśle wklęsła**, jeśli odcinek łączący dwa dowolne różne punkty wykresu funkcji leży w całości (poza końcami) **pod** wykresem funkcji. Funkcja jest **wklęsła**, jeśli odcinek łączący dwa dowolne różne punkty wykresu funkcji leży pod wykresem lub ma punkty z nim wspólne.*

Zwróćmy uwagę, że każda funkcja liniowa jest zarazem wklęsła i wypukła, nie jest jednak ani ściśle wypukła, ani ściśle wklęsła.

Punkt przegięcia

Definicja

Punkt p dziedziny funkcji nazywamy punktem przegięcia, jeśli na pewnym odcinku, którego prawym końcem jest p , funkcja jest ściśle wypukła (odp. wklęsła) i na pewnym odcinku, którego lewym końcem jest p , funkcja jest ściśle wklęsła (odp. wypukła).

Wypukłość i znak drugiej pochodnej

Założmy, że f'' istnieje. Zamiast dowodu poczynimy następujące obserwacje:

- jeśli f jest **ściśle wypukła** to na podzbiorze dziedziny gdzie jest rosnąca jej **pochodna rośnie** wraz ze wzrostem argumentu (prosta styczna jest coraz bardziej pionowa), a więc $f'' > 0$. Z drugiej strony tam gdzie f jest malejąca jej **pochodna rośnie** przyjmując ujemne wartości (prosta styczna jest coraz bardziej pozioma) a więc wtedy także $f'' > 0$.
- jeśli f jest **ściśle wklęsła** to na podzbiorze dziedziny gdzie jest rosnąca ma ona **pochodną malejącą**, a więc $f'' < 0$. Tam zaś gdzie f jest malejąca ma **pochodną malejącą** przyjmując ujemne wartości, a więc także wtedy $f'' < 0$.

Wypukłość i znak drugiej pochodnej

Wypukłość (wklęsłość) funkcji można scharakteryzować poprzez znak jej drugiej pochodnej.

Twierdzenie

Niech $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną.

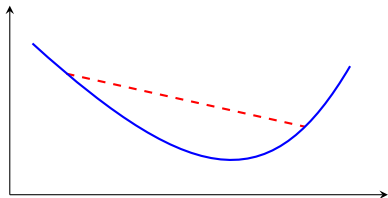
- Funkcja f jest wypukła na odcinku $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ w.t.w. gdy $f''(x) \geq 0$ dla $x \in (a_1, b_1)$.
- Funkcja f jest wklęsła na odcinku $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ w.t.w. gdy $f''(x) \leq 0$ dla $x \in (a_1, b_1)$.
- Punkt $p \in (a, b)$ jest **punktem przegięcia** w.t.w. gdy $f''(p) = 0$ i $f''(x)$ **zmienia znak** w punkcie p .

W przypadku ostrych nierówności $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) mamy ściłą wypukłość lub odpowiednio ściłą wklęsłość.

Funkcja wypukła/wklęsła –podsumowanie

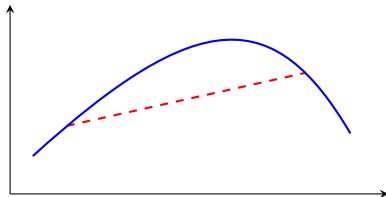
Funkcja ściśle wypukła

- Funkcja rośnie coraz szybciej (maleje coraz wolniej).
- Odcinki łączące punkty wykresu leżą **nad** wykresem funkcji.
- Pochodna funkcji jest **rosnąca**.
- Druga pochodna funkcji jest **dodatnia**.



Funkcja (ściśle) wklęsła

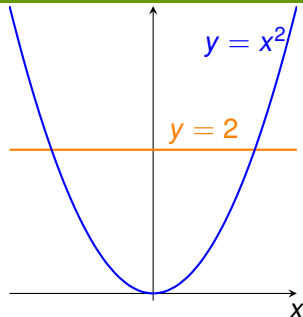
- Funkcja maleje coraz szybciej (rośnie coraz wolniej).
- Odcinki łączące punkty wykresu leżą **pod** wykresem funkcji.
- Pochodna funkcji jest **malejąca**.
- Druga pochodna funkcji jest **ujemna**.



Funkcja $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

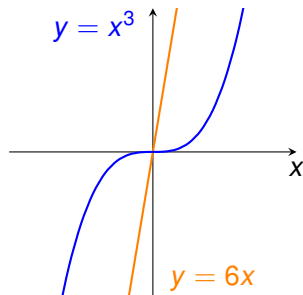
Jest to funkcja wypukła i $f''(x) = 2 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Podobnie funkcja $g(x) = -x^2$ jest wklęsła i $g''(x) = -2 < 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.



Funkcja $f(x) = x^3$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Punkt $x = 0$ jest punktem przegięcia, gdyż $f''(x) = 6x$ oraz $f''(0) = 0$ i dla $x < 0$ funkcja jest wklęsła ($f''(x) < 0$), a dla $x > 0$ — wypukła ($f''(x) > 0$).



Stwierdzenie

Przyjmijmy, że funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w otoczeniu punktu $x_0 \in (a, b)$ i istnieje $f''(x_0)$.

- *Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, to f ma minimum lokalne w x_0 .*
- *Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, to f ma maksimum lokalne w x_0 .*

* Dowód (dla zainteresowanych)

Przypadek pierwszy (drugi dowodzi się tak samo). Druga pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest granicą ilorazu różnicowego pierwszej pochodnej w tym punkcie.

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \left[\text{bo } f'(x_0) = 0 \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Zatem dla x z dostatecznie małego otoczenia x_0 oraz:

- dla $x > x_0$ mamy $f'(x) > 0$
- dla $x < x_0$, $f'(x) < 0$.

W otoczeniu punktu x_0 funkcja maleje na lewo od x_0 i rośnie na prawo od x_0 , zatem w x_0 jest minimum lokalne.

Funkcja Hilla

Pojawia się w różnych dziedzinach biologii od ekologii po biochemię.

Definicja

$$H_n(x) = m \frac{x^n}{a^n + x^n} \text{ dla } x \geq 0,$$

gdzie m , a to pewne stałe dodatnie i $n \geq 1$ nazywamy współczynnikiem Hilla.

Zbadamy jak zmienia się wykres tej funkcji przy zmianie parametru n .

Zauważmy, że $H_n(0) = 0$ dla każdego $n \geq 1$ oraz że po podzieleniu licznika i mianownika przez x^n otrzymamy

$$H_n(x) = m \frac{1}{\left(\frac{a}{x}\right)^n + 1},$$

zatem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H_n(x) = m, \quad H(a) = \frac{m}{2}.$$

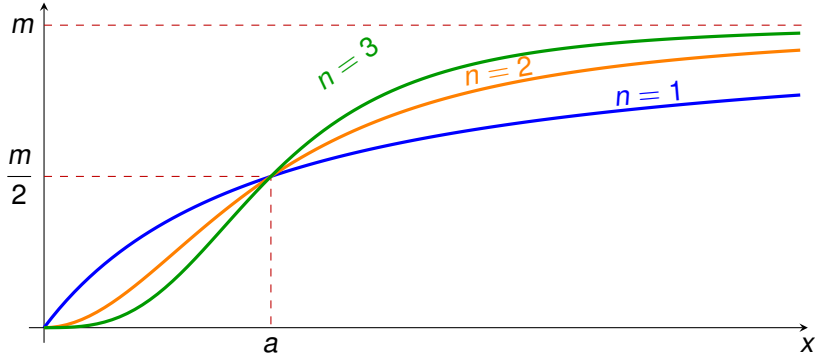
Parametr a nosi nazwę **stałej połowicznego nasycenia**.

Otrzymujemy

$$H'_n(x) = m \frac{na^n x^{n-1}}{(a^n + x^n)^2}, \quad H''_n(x) = \frac{nma^n x^{n-2}((n-1)a^n - (n+1)x^n)}{(a^n + x^n)^3}.$$

Czyli funkcja H_n jest rosnąca dla $n \geq 1$ i dla $n \geq 2$ ma punkt przegięcia

$$x_p = a \sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}}, \text{ taki że } H''(x_p) = 0.$$



Funkcja Hilla

Tego typu funkcje opisują efekt saturacji (wysycenia) występujący w wielu zagadnieniach biologicznych. Dla $n = 1$ funkcja H_1 bywa nazywana funkcją typu Michaelisa-Menten (Leonor Michaelis (1875-1949), Maud Menten (1879-1960)). W biochemii opisuje ona tempo pewnego typu reakcji enzymatycznej.

Jeśli przez x oznaczymy stężenie substratu, to $H_1(x)$ określa tempo tworzenia się produktu. Charakterystyczną cechą reakcji enzymatycznych jest to, że ze względu na ograniczone tempo tworzenia się kompleksu enzym-substrat, tempo produkcji produktu nie może rosnąć dowolnie wraz ze wzrostem stężenia substratu x — nie może ono przekroczyć pewnej wartości granicznej.

Funkcje tego typu pojawiają się także w ekologii jako funkcje opisujące odpowiedzi funkcjonalne drapieżnika na wzrost liczby ofiar.

Całki — wprowadzenie

Pojęcie całki to jedno z najważniejszych pojęć matematyki. Zostało ono wprowadzone (podobnie jak pojęcie pochodnej) pod koniec XVII w. niezależnie przez Izaaka Newtona (1642-1727) i Gottfrieda Leibniza (1646-1716) i było rozwijane przez następne 200 lat.

Całki stosuje się między innymi do obliczania pól i objętości figur, a także długości krzywych. Za pomocą całek rozwiązuje się równania różniczkowe, które służą do opisu przebiegu różnych procesów.

Całkowanie jest w pewnym sensie działaniem odwrotnym do różniczkowania.

Funkcja pierwotna- motywacja fizyczna

Pojazd startuje w chwili $t = t_0$ z punktu $x(t_0) = x_0$ i porusza się po prostej z prędkością $v(t)$ Jaką drogę pokona poruszając się do chwili $t = T$?

Pacjentowi jest podawany dożylnie lek z prędkością $v(t)$. Ile dawek leku otrzymał pacjent w przedziale czasu $[t_0, T]$ jeśli w chwili $t = t_0$ otrzymał $x(t_0) = x_0$ dawek?

W obu przypadkach szukamy takiej funkcji $x(t)$, że

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

i odpowiedź brzmi

$$x(T) - x(t_0).$$

Interpretację funkcji $x(t)$ w każdym przypadku pozostawiam słuchaczom.

Funkcja pierwotna

Niech $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie D to odcinek otwarty lub cała prosta $\mathbb{R}$).

Jeżeli w każdym punkcie $x \in D$ istnieje pochodna funkcji F , to funkcji F możemy jednoznacznie przyporządkować funkcję pochodną $f = F' : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Odwrotnie, danej funkcji f można przyporządkować funkcję F , taką że $F' = f$. Funkcja F jest określona jednoznacznie z dokładnością do stałej, gdyż wtedy dla dowolnej stałej c

$$(F(x) + c)' = f(x).$$

Definicja

Funkcję $F : D \mapsto \mathbb{R}$, taką że $F' = f$ nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f .

Całka nieoznaczona

$$f(x) = x, \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x + c$$

$$f(x) = x^p, \quad F(x) = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + c, \quad p \neq -1$$

Definicja

Całką nieoznaczoną funkcji f nazywamy jej dowolną funkcję pierwotną i oznaczamy $\int f(x)dx$. Wtedy

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

gdzie c jest dowolną stałą zaś $F'(x) = f(x)$.

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona to niemal to samo, mimo to w praktyce używa się jednak obu terminów.

Funkcję f w tym kontekście nazywa się **funkcją podcałkową**.

Całka nieoznaczona funkcji $\frac{1}{x}$

Fakt

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

Dowód: Dla $x > 0$ mamy

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Dla $x < 0$ mamy zaś $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ i dlatego możemy zapisać

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c.$$



Jeśli a jest pewną liczbą (stałą), to

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln |x+a| + c.$$

Podstawowe wzory

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
- dla każdej $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\int (af(x)) dx = a \int f(x) dx$

Całkowanie przez części

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(\textcolor{red}{g}(x))\textcolor{blue}{g}'(x)dx = \left[\begin{array}{l} \textcolor{red}{y} = \textcolor{red}{g}(x) \\ \textcolor{blue}{dy} = \textcolor{blue}{g}'(x)dx \end{array} \right] = \int f(\textcolor{blue}{y})\textcolor{blue}{dy}.$$

Obliczanie całek funkcji jest dużo trudniejsze niż różniczkowanie

Nie istnieją ogólne wzory na całkę z iloczynu lub ilorazu funkcji ani na całkę funkcji złożonej.

Zwykle, aby policzyć całkę (znaleźć funkcję pierwotną) trzeba umiejętnie stosować dostępne wzory na całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie. Który wzór i w jaki sposób zastosować nie jest oczywiste.

Definicja

Całką oznaczoną funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ w granicach od a do b nazywamy liczbę

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f .

Przykład

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 = \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Określmy funkcję górnej granicy całkowania

$$x \mapsto \int_a^x f(s) ds.$$

Wtedy

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(s) ds = \frac{d}{dx} (F(x) - F(a)) = f(x).$$

Przy obliczaniu całek często wykorzystuje się następującą własność.

Niech F będzie funkcją pierwotną do $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozpatrzmy funkcję złożoną $g(x) = f(ax + b)$, gdzie a i b to pewne stałe.

Funkcją pierwotną do g jest funkcja $G(x) = \frac{1}{a}F(ax + b)$, a zatem

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(ax + b) dx = \frac{1}{a} (F(ax_2 + b) - F(ax_1 + b)).$$

Przykłady

$$\int_1^2 e^{5x+2} dx = \frac{1}{5} (e^{12} - e^7)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2x} dx = \frac{1}{2} \ln|1+2x| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{\ln 3}{2}$$

Podstawowe własności całki oznaczonej

- dla $a \leq c \leq b$ mamy $\int_a^c f(s)ds + \int_c^b f(s)ds = \int_a^b f(s)ds$ bo

$$\begin{aligned}\int_a^c f(s)ds + \int_c^b f(s)ds &= F(c) - F(a) + (F(b) - F(c)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(s)ds.\end{aligned}$$

- Jeśli α jest dowolną liczbą i g pewną funkcją ciągłą, to

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(s) + \alpha g(s))ds &= \int_a^b f(s)ds + \int_a^b \alpha g(s)ds = \\ &= \int_a^b f(s)ds + \alpha \int_a^b g(s)ds.\end{aligned}$$

Pierwsza własność sugeruje, że definicję całki oznaczonej można rozszerzyć na funkcje kawałkami ciągłe mówiąc, że całka z funkcji kawałkami ciągłej jest sumą całek obliczonych na przedziałach ciągłości funkcji.