Matematyka dla biologów — Zajęcia nr 6.

Dariusz Wrzosek

06 listopada 2023

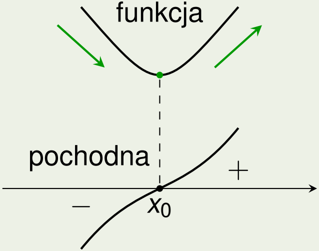
Pochodna funkcji — przypomnienie

Dzięki pochodnej można określić czy funkcja rośnie czy maleje

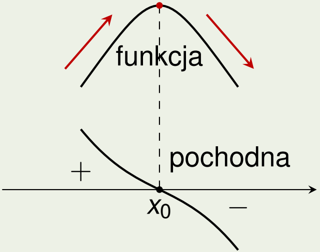
- jeśli pochodna jest ujemna ($f'(x) < 0$), to funkcja maleje
- jeśli pochodna jest dodatnia ($f'(x) > 0$), to funkcja rośnie

Pochodna a wyznaczanie ekstremów funkcji

Minimum lub maksimum funkcji f w $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$.



minimum lokalne

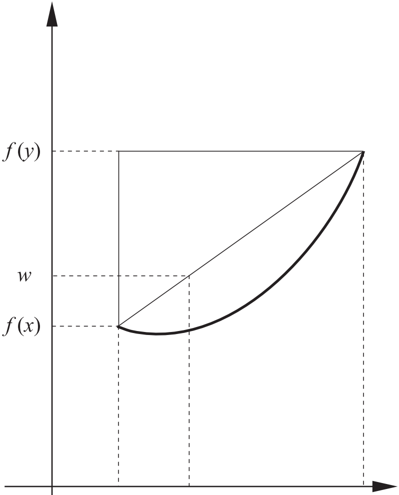


maksimum lokalne

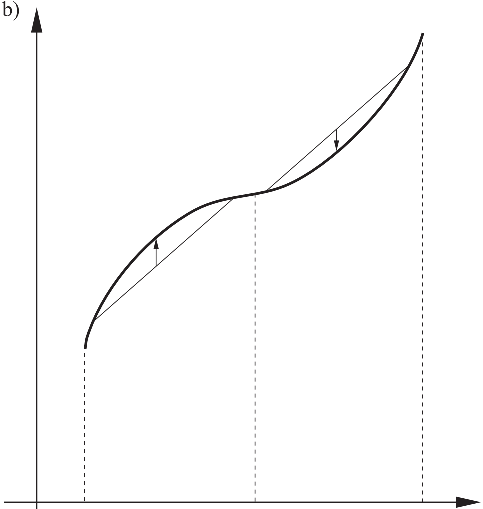
Funkcja wypukła, funkcja wklęsła

Wypukłość i wklęsłość funkcji definiuje się geometrycznie, odnosząc się do prostych będących siecznymi wykresu funkcji.

a)



b)



Definicja

Funkcja jest ściśle wypukła, jeśli odcinek łączący dwa dowolne różne punkty wykresu funkcji leży w całości (poza końcami) ponad wykresem funkcji. Funkcja jest wypukła, jeśli odcinek łączący dwa dowolne różne punkty wykresu funkcji leży ponad wykresem lub ma punkty z nim wspólne.

Definicja

Funkcja jest ściśle wklęsła, jeśli odcinek łączący dwa dowolne różne punkty wykresu funkcji leży w całości (poza końcami) pod wykresem funkcji. Funkcja jest wklęsła, jeśli odcinek łączący dwa dowolne różne punkty wykresu funkcji leży pod wykresem lub ma punkty z nim wspólne.

Zwróćmy uwagę, że każda funkcja liniowa jest zarazem wklęsła i wypukła, nie jest jednak ani ściśle wypukła, ani ściśle wklęsła.

Punkt przegięcia

Definicja

Punkt p dziedziny funkcji nazywamy punktem przegięcia, jeśli na pewnym odcinku, którego prawym końcem jest p, funkcja jest ściśle wypukła (odp. wklęsła) i na pewnym odcinku, którego lewym końcem jest p, funkcja jest ściśle wklęsła (odp. wypukła).

Wypukłość i znak drugiej pochodnej

Załóżmy, że $f^{''}$ istnieje. Zamiast dowodu poczynimy następujące obserwacje:

- jeśli f jest ściśle wypukła to na podzbiorze dziedziny gdzie jest rosnąca jej pochodna rośnie wraz ze wzrostem argumentu (prosta styczna jest coraz bardziej pionowa), a więc $f^{''} > 0$. Z drugiej strony tam gdzie f jest malejąca jej pochodna rośnie przyjmując ujemne wartości (prosta styczna jest coraz bardziej pozioma) a więc wtedy także $f^{''} > 0$.
- jeśli f jest ściśle wklęsła to na podzbiorze dziedziny gdzie jest rosnąca ma ona pochodną malejącą, a więc $f^{''} < 0$. Tam zaś gdzie f jest malejąca ma pochodną malejącą przyjmując ujemne wartości, a więc także wtedy $f^{''} < 0$.

Wypukłość i znak drugiej pochodnej

Wypukłość (wklęsłość) funkcji można scharakteryzować poprzez znak jej drugiej pochodnej.

Twierdzenie

Niech $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną.

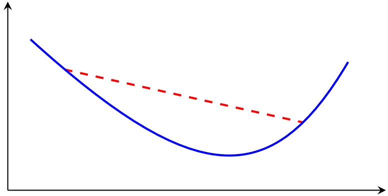
- *Funkcja f jest wypukła na odcinku $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ w.t.w. gdy $f''(x) \geqslant 0$ dla $x \in (a_1, b_1)$.*
- *Funkcja f jest wklęsła na odcinku $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ w.t.w. gdy $f''(x) \leqslant 0$ dla $x \in (a_1, b_1)$.*
- *Punkt $p \in (a, b)$ jest punktem przegięcia w.t.w. gdy $f''(p) = 0$ i $f''(x)$ zmienia znak w punkcie p.*

W przypadku ostrych nierówności $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) mamy ścisłą wypukłość lub odpowiednio ścisłą wklęsłość.

Funkcja wypukła/wklęsła –podsumowanie

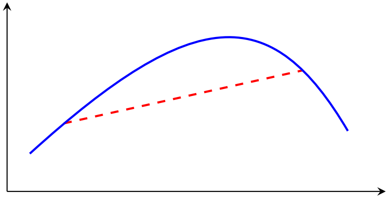
Funkcja ściśle wypukła

- Funkcja rośnie coraz szybciej (maleje coraz wolniej).
- Odcinki łączące punkty wykresu leżą nad wykresem funkcji.
- Pochodna funkcji jest rosnąca.
- Druga pochodna funkcji jest dodatnia.



Funkcja (ściśle) wklęsła

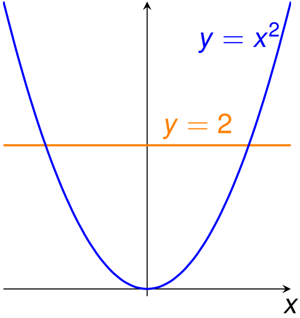
- Funkcja maleje coraz szybciej (rośnie coraz wolniej).
- Odcinki łączące punkty wykresu leżą pod wykresem funkcji.
- Pochodna funkcji jest malejąca.
- Druga pochodna funkcji jest ujemna.



Funkcja $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

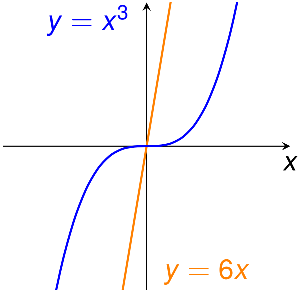
Jest to funkcja wypukła i $f''(x) = 2 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Podobnie funkcja $g(x) = -x^2$ jest wklęsła i $g''(x) = -2 < 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.



Funkcja $f(x) = x^3$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Punkt $x = 0$ jest punktem przegięcia, gdyż $f''(x) = 6x$ oraz $f''(0) = 0$ i dla $x < 0$ funkcja jest wklęsła ($f''(x) < 0$), a dla $x > 0$ — wypukła ($f''(x) > 0$).



Stwierdzenie

Przyjmijmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna w otoczeniu punktu* $x_0 \in (a, b)$ *i istnieje* $f''(x_0)$.

- *Jeśli* $f'(x_0) = 0$ *i* $f''(x_0) > 0$, *to* f *ma minimum lokalne w* x_0.
- *Jeśli* $f'(x_0) = 0$ *i* $f''(x_0) < 0$, *to* f *ma maksimum lokalne w* x_0.

* Dowód (dla zainteresowanych)

Przypadek pierwszy (drugi dowodzi się tak samo). Druga pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest granicą ilorazu różnicowego pierwszej pochodnej w tym punkcie.

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \left[\text{bo } f'(x_0) = 0\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Zatem dla x z dostatecznie małego otoczenia x_0 oraz:

- dla $x > x_0$ mamy $f'(x) > 0$
- dla $x < x_0$, $f'(x) < 0$.

W otoczeniu punktu x_0 funkcja maleje na lewo od x_0 i rośnie na prawo od x_0, zatem w x_0 jest minimum lokalne.

Funkcja Hilla

Pojawia się w różnych dziedzinach biologii od ekologii po biochemię.

Definicja

$$H_n(x) = m\frac{x^n}{a^n + x^n} \text{ dla } x \geqslant 0,$$

gdzie m, a to pewne stałe dodatnie i $n \geqslant 1$ nazywamy współczynnikiem Hilla.

Zbadamy jak zmienia się wykres tej funkcji przy zmianie parametru n.

Zauważmy, że $H_n(0) = 0$ dla każdego $n \geqslant 1$ oraz że po podzieleniu licznika i mianownika przez x^n otrzymamy

$$H_n(x) = m\frac{1}{(\frac{a}{x})^n + 1},$$

zatem

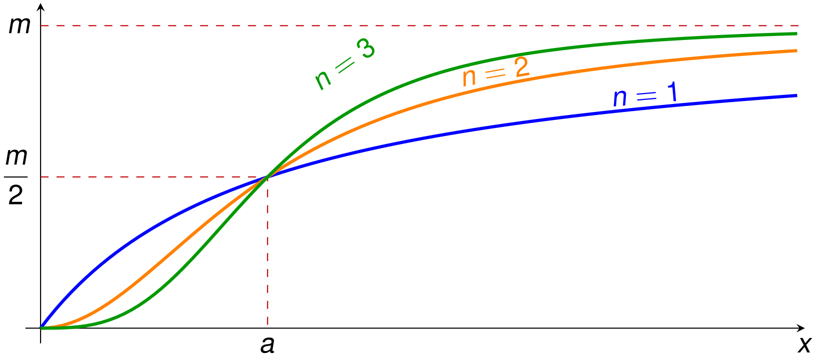
$$\lim_{x \to +\infty} H_n(x) = m, \quad H(a) = \frac{m}{2}.$$

Parametr a nosi nazwę stałej połowicznego nasycenia.

Otrzymujemy

$$H_n'(x) = m\frac{na^n x^{n-1}}{(a^n + x^n)^2}, \quad H_n''(x) = \frac{nma^n x^{n-2}((n-1)a^n - (n+1)x^n)}{(a^n + x^n)^3}.$$

Czyli funkcja H_n jest rosnąca dla $n \geqslant 1$ i dla $n \geqslant 2$ ma punkt przegięcia $x_p = a\sqrt[n]{\dfrac{n-1}{n+1}}$, taki że $H''(x_p) = 0$.



Funkcja Hilla

Tego typu funkcje opisują efekt saturacji (wysycenia) występujący w wielu zagadnieniach biologicznych. Dla $n = 1$ funkcja H_1 bywa nazywana funkcją typu Michaelisa-Menten (Leonor Michaelis (1875-1949), Maud Menten (1879-1960)). W biochemii opisuje ona tempo pewnego typu reakcji enzymatycznej.

Jeśli przez x oznaczymy stężenie substratu, to $H_1(x)$ określa tempo tworzenia się produktu. Charakterystyczną cechą reakcji enzymatycznych jest to, że ze względu na ograniczone tempo tworzenia się kompleksu enzym-substrat, tempo produkcji produktu nie może rosnąć dowolnie wraz ze wzrostem stężenia substratu x — nie może ono przekroczyć pewnej wartości granicznej.

Funkcje tego typu pojawiają się także w ekologii jako funkcje opisujące odpowiedzi funkcjonalne drapieżnika na wzrost liczby ofiar.

Całki — wprowadzenie

Pojęcie całki to jedno z najważniejszych pojęć matematyki. Zostało ono wprowadzone (podobnie jak pojęcie pochodnej) pod koniec XVII w. niezależnie przez Izaaka Newtona (1642-1727) i Gottfrieda Leibniza (1646-1716) i było rozwijane przez następne 200 lat.

Całki stosuje się między innymi do obliczania pól i objętości figur, a także długości krzywych. Za pomocą całek rozwiązuje się równania różniczkowe, które służą do opisu przebiegu różnych procesów.

Całkowanie jest w pewnym sensie działaniem odwrotnym do różniczkowania.

Funkcja pierwotna- motywacja fizyczna

Pojazd startuje w chwili $t = t_0$ z punktu $x(t_0) = x_0$ i porusza się po prostej z prędkością $v(t)$ Jaką drogę pokona poruszając się do chwili $t = T$?

Pacjentowi jest podawany dożylnie lek z prędkością $v(t)$. Ile dawek leku otrzymał pacjent w przedziale czasu $[t_0\,, T]$ jeśli w chwili $t = t_0$ otrzymał $x(t_0) = x_0$ dawek?

W obu przypadkach szukamy takiej funkcji $x(t)$, że

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

i odpowiedź brzmi

$$x(T) - x(t_0)\,.$$

Interpretację funkcji $x(t)$ w każdym przypadku pozostawiam słuchaczom.

Funkcja pierwotna

Niech $F : D \to \mathbb{R}$, gdzie D to odcinek otwarty lub cała prosta $\mathbb{R}$).

Jeżeli w każdym punkcie $x \in D$ istnieje pochodna funkcji F, to funkcji F możemy jednoznacznie przyporządkować funkcję pochodną $f = F' : D \to \mathbb{R}$.

Odwrotnie, danej funkcji f można przyporządkować funkcję F, taką że $F' = f$. Funkcja F jest określona jednoznacznie z dokładnością do stałej, gdyż wtedy dla dowolnej stałej c

$$(F(x) + c)' = f(x).$$

Definicja

Funkcję $F : D \mapsto \mathbb{R}$, taką że $F' = f$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji f.

Całka nieoznaczona

$$f(x) = x, \qquad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$f(x) = \cos x, \qquad F(x) = \sin x + c$$

$$f(x) = x^p, \qquad F(x) = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + c, \; p \neq -1$$

Definicja

Całką nieoznaczoną funkcji f nazywamy jej dowolną funkcję pierwotną i oznaczamy $\int f(x)dx$. Wtedy

$$\int f(x)dx = F(x) + c\,,$$

gdzie c jest dowolną stałą zaś $F'(x) = f(x)$.

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona to niemal to samo, mimo to w praktyce używa się jednak obu terminów.

Funkcję f w tym kontekście nazywa się funkcją podcałkową.

Całka nieoznaczona funkcji $\frac{1}{x}$

Fakt

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

Dowód: Dla $x > 0$ mamy

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Dla $x < 0$ mamy zaś $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ i dlatego możemy zapisać

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$$

■

Jeśli a jest pewną liczbą (stałą), to

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + c.$$

Podstawowe wzory

- $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- dla każdej $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\int (af(x))\, dx = a \int f(x)dx$

Całkowanie przez części

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \begin{bmatrix} y = g(x) \\ dy = g'(x)dx \end{bmatrix} = \int f(y)dy.$$

Obliczanie całek funkcji jest dużo trudniejsze niż różniczkowanie

Nie istnieją ogólne wzory na całkę z iloczynu lub ilorazu funkcji ani na całkę funkcji złożonej.

Zwykle, aby policzyć całkę (znaleźć funkcję pierwotną) trzeba umiejętnie stosować dostępne wzory na całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie. Który wzór i w jaki sposób zastosować nie jest oczywiste.

Definicja

Całką oznaczoną funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ w granicach od a do b nazywamy liczbę

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b ,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Przykład

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot 1^4 = \frac{1}{4}\cdot 16 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Określmy funkcję górnej granicy całkowania

$$x \mapsto \int_a^x f(s)ds\,.$$

Wtedy

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds = \frac{d}{dx}(F(x) - F(a)) = f(x)\,.$$

Przy obliczaniu całek często wykorzystuje się następującą własność.

Niech F będzie funkcją pierwotną do $f : [x_1 , x_2] \to \mathbb{R}$. Rozpatrzmy funkcję złożoną $g(x) = f(ax + b)$, gdzie a i b to pewne stałe.

Funkcją pierwotną do g jest funkcja $G(x) = \frac{1}{a}F(ax + b)$, a zatem

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(ax + b)dx = \frac{1}{a}(F(ax_2 + b) - F(ax_1 + b)) .$$

Przykłady

$$\int_1^2 e^{5x+2}\, dx = \frac{1}{5}\left(e^{12} - e^7\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + 2x}\, dx = \frac{1}{2}\ln|1 + 2x|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{\ln 3}{2}$$

Podstawowe własności całki oznaczonej

- dla $a \leqslant c \leqslant b$ mamy $\int_a^c f(s)ds + \int_c^b f(s)ds = \int_a^b f(s)ds$ bo
$$\int_a^c f(s)ds + \int_c^b f(s)ds = F(c) - F(a) + (F(b) - F(c)) =$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(s)ds.$$
- Jeśli α jest dowolną liczbą i g pewną funkcją ciągłą, to
$$\int_a^b (f(s) + \alpha g(s))ds = \int_a^b f(s)ds + \int_a^b \alpha g(s)ds =$$
$$= \int_a^b f(s)ds + \alpha \int_a^b g(s)ds.$$

Pierwsza własność sugeruje, że definicję całki oznaczonej można rozszerzyć na funkcje kawałkami ciągłe mówiąc, że całka z funkcji kawałkami ciągłej jest sumą całek obliczonych na przedziałach ciągłości funkcji.