Matematyka dla biologów — Zajęcia nr 4.

Dariusz Wrzosek

23 października 2023

Podstawy analizy matematycznej

- granica funkcji
- ciągłość funkcji
- pochodna funkcji

Granica funkcji w punkcie

Rozpatrujemy funkcję $f : (a\,, b) \mapsto \mathbb{R}$.

Definicja

Niech $x_0 \in (a, b)$ — w szczególności x_0 może być punktem na brzegu dziedziny. Funkcja f ma granicę w punkcie $x_0 \in [a, b]$ równą g , co zapisujemy

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = g,$$

w.t.w. gdy dla dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ punktów odcinka (a, b), $x_n \in (a, b)$, $x_n \neq x_0$, takiego że $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$, ciąg wartości funkcji wziętych w kolejnych wyrazach ciągu dąży do g, czyli

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = g\,.$$

Funkcja nie musi być określona w punkcie x, w którym badamy granicę.

Rozróżnia się granicę granicę prawostronną i granicę lewostronną funkcji w punkcie w zależności od tego, czy wyrazy ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ w powyższej definicji mają wartości większe lub mniejsze od x_0.

Zamiast sformułowania „granicą funkcji gdy x dąży do x_0 jest g" mówić można także, że „funkcja f dąży do g gdy x dąży do x_0".

Uwaga

Powyższa definicja obejmuje także przypadek, gdy zamiast g wpiszemy $+\infty$ lub $-\infty$. Wtedy mówimy, że funkcja dąży do $+\infty$ lub $-\infty$ gdy x dąży do x_0.

Definicja

Funkcja f ma granicę g w $+\infty$, czyli

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g$$

w.t.w. gdy dla dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, takiego że $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, istnieje granica ciągu $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ oraz

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = g\,.$$

Podobnie definiuje się granicę funkcji w $-\infty$.

Przykład funkcji, która nie ma granicy w nieskończoności

Funkcja $f(x) = \sin x$. Weźmy dwa ciągi

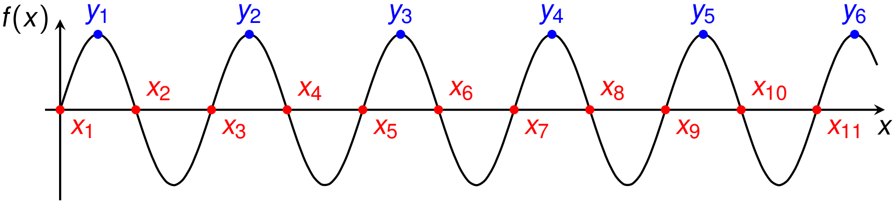
$$x_n = \pi n\,, \qquad y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_n) = \sin \pi n = 0\,, \qquad f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Są to ciągi stałe, których granice są różne.

Zatem granica funkcji $\sin x$ w nieskończoności nie istnieje.



*Dla zainteresowanych-przykład funkcji ograniczonej, która nie ma granicy w punkcie

Rozpatrzmy funkcję zwaną sinusoidą warszawską

$$g(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad x > 0\,.$$

Funkcja ta jest ograniczona, gdyż funkcja sinus przyjmuje tylko wartości z przedziału $[-1\,,1]$, ale nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$. Aby to uzasadnić wybierzemy dwa ciągi

$$a_n = \frac{1}{\pi n}\,, \qquad b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

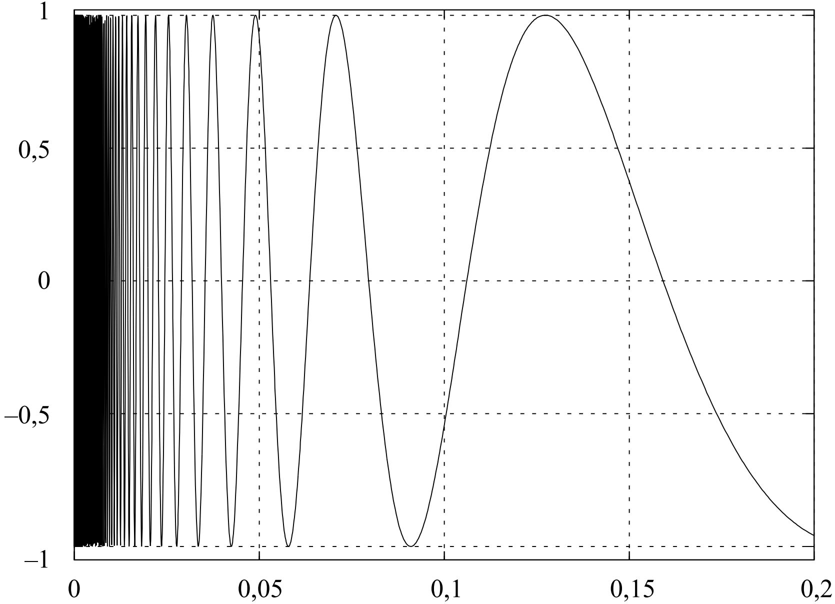
Oczywiście

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0,$$

ale

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{a_n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{b_n} = 1.$$

Dla dowolnej liczby $y \in [0\,,1]$ istnieje ciąg $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, taki że


1
0,5
0
–0,5
–1
0
0,05
0,1
0,15
0,2

Definicja ciągłości funkcji

Funkcja jest ciągła w punkcie x swojej dziedziny, jeśli dla argumentów zbliżających się do punktu x wartości tej funkcji zbliżają się do wartości funkcji w punkcie x.

Definicja

Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *jest ciągła w punkcie* $x_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ *w.t.w. gdy dla dowolnego ciągu punktów* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *ze zbioru* (a,b)*, takiego że* $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ *zachodzi*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0), \quad \textit{czyli} \quad \lim_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x_0)| = 0\,.$$

Funkcję, która jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny nazywamy funkcją ciągłą.

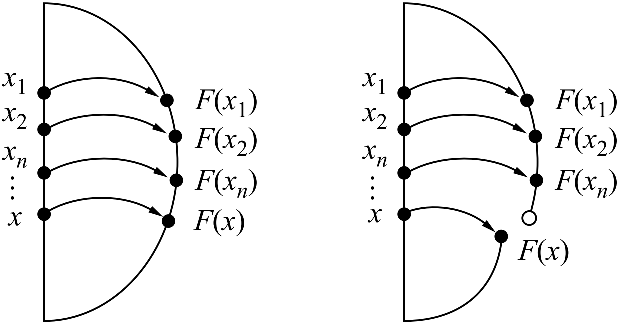
Jeśli funkcja jest ciągła, to małym zmianom argumentów funkcji odpowiadają niezbyt wielkie zmiany wartości funkcji.

Ciągłość funkcji na przykładzie rozciągającej się struny.

Wybierzmy jeden punkt x na strunie i ciąg punktów $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ z odcinka reprezentującego strunę zbieżny do x. Rozciągnięcie struny prowadzi do jej odkształcenia.

Jeśli struna się nie zerwie, to ciąg punktów $\{F(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ dąży do $F(x)$.

Jeśli struna się zerwie, to granice ciągu $\{F(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ są różne w zależności od tego, z której strony ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ zbiega do punktu x.



Fakt

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, a, b — dowolne stałe, jest funkcją ciągłą.

Dowód.

Ustalmy punkt x_0 i wybierzmy dowolny ciąg, taki że

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0.$$

Z własności granicy ciągu i działań na granicach wynika, że

$$\lim_{n \to +\infty} (ax_n + b) = ax_0 + b.$$

Zatem f jest ciągła w dowolnym punkcie swojej dziedziny $\mathbb{R}$, czyli jest funkcją ciągłą. $\square$

Uwaga

Funkcje potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne (w podstawowej dziedzinie) są funkcjami ciągłymi.

* Dla zainteresowanych

Sprawdzimy, że funkcja $f(x) = x^2$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

- Ustalmy punkt x_0 i weźmy dowolny ciąg $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$
- Chcemy sprawdzić, że $\lim_{n\to+\infty} x_n^2 = x_0^2$.
- W tym celu rozpatrzymy ciąg $\{x_n^2 - x_0^2\}_{n=1}^{+\infty}$
- Korzystamy ze wzoru $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- Ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ jest zbieżny, jest więc ograniczony, czyli istnieje liczba M, taka że $|x_n| \leqslant M$ dla każdego $n \geqslant 0$.
- Zatem $|x_0^2 - x_n^2| \leqslant (|x_n| + |x_0|)|x_0 - x_n| \leqslant 2M|x_0 - x_n|$.
- ciąg po prawej stronie dąży do 0, to także ciąg po lewej stronie — co kończy dowód.

Na podstawie danych empirycznych trudno jest stwierdzić, czy dany proces fizyczny ma przebieg ciągły, czy skokowy, gdyż zawsze dysponujemy tylko skończoną liczbą danych pomiarowych i nigdy nie mamy pewności, jaki jest przebieg funkcji poza tymi punktami. Ciągłość różnych procesów fizycznych jako funkcji czasu wynika na ogół z modeli matematycznych fizyki, które je opisują.

To czy przebieg procesu fizycznego ma przebieg ciągły, czy skokowy, jest na ogół istotne dla zrozumienia zjawiska, bo obecność skoków natychmiast prowadzi do pytania, co je spowodowało.

Niektóre procesy fizyczne są ciągłe „z natury”, np. wartość temperatury w określonym punkcie Ziemi jako funkcja czasu.

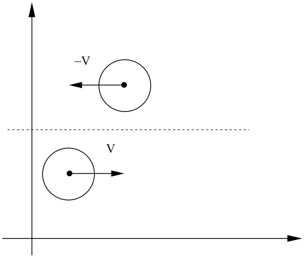
Wartości ciśnienia oraz temperatury przy powierzchni Ziemi jako funkcje położenia są, zgodnie z teorią i doświadczeniem, funkcjami ciągłymi.

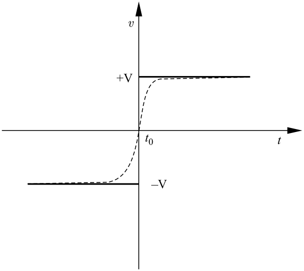
Ciągły jest także ruch Ziemi, ciągła jest także funkcja czasu, która opisuje położenie (współrzędne) kamienia podrzuconego do góry.

Nieciągły przebieg rożnych procesów wiąże się zwykle z występowaniem katastrof.

Rozważmy jako funkcję czasu prędkość toczącej się kuli bilardowej (sztywnej, niesprężystej) uderzającej centralnie o twardą kamienną ścianę i odbijającą się od niej. Przed zderzeniem wektor prędkości skierowany jest w stronę ściany, a po zderzeniu od ściany.

Prędkość piłki tenisowej uderzonej o tę samą ścianę, ze względu na sprężystość piłki, zmienia się gwałtownie, ale w sposób ciągły.





F. ciągła przyjmuje wartości pośrednie

Często mówi się o ewolucji gatunków jako o procesie ciągłym, stąd poszukiwanie ”brakujących ogniw” w łańcuchu kolejnych gatunków utrwalonym w zapisie kopalnym.

Wiąże się to z następującym twierdzeniem, które mówi, że funkcja ciągła określona na odcinku przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy dwoma dowolnie wybranymi jej wartościami.

Twierdzenie (własność Darboux)

Załóżmy, że $f\colon [x_1\,, x_2] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą oraz że dla* $x, y \in [x_1\,, x_2]$ *mamy* $d = f(x)$ *i* $c = f(y)$*. Przyjmijmy, że* $c < d$*. Wtedy dla dowolnej liczby* $c_0 \in [c, d]$ *istnieje* $x_0 \in [x\,, y]$*, taki że* $f(x_0) = c_0$*.*

Wynika stąd np. fakt, że jeśli w jednym punkcie na Ziemi jest $+5^\circ$C, a w innym na tym samym równoleżniku jest -5°C, to w jakimś miejscu na tym samym równoleżniku jest w tej samej chwili 0°C. Jest to konsekwencją przyjęcia założenia o ciągłym rozkładzie temperatury przy powierzchni Ziemi i powyższego

Twierdzenie Weierstassa

(Karl Weierstass (1815-1897)) Twierdzenie wyraża jedną z najważniejszych własności funkcji ciągłych.

Twierdzenie (Weierstassa)

Funkcja ciągła określona na odcinku domkniętym o wartościach w $\mathbb{R}$ osiąga w pewnych punktach tego zbioru wartości najmniejszą i największą.

Przykład

Funkcja $f_1(x) = \frac{1}{x}$ określona na odcinku $x \in D = (0\,, 1]$ jest funkcją ciągłą na swojej dziedzinie, która nie jest odcinkiem domkniętym. Nie jest zatem spełnione założenie powyższego twierdzenia. Funkcja f_1 jest nieograniczona

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = +\infty$$

i nie przyjmuje w żadnym punkcie swojej dziedziny wartości największej.

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x^2$.

Dziedzina: odcinek $[0\,,1]$. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą w punkcie 0 i największą w punkcie 1 .

Dziedzina: odcinek $(0\,,1]$. Funkcja $f(x)$ nie przyjmuje w żadnym punkcie swojej dziedziny wartości najmniejszej. Dla każdego $x > 0$ istnieje $0 < \bar{x} < x$. Oczywiście mamy $f(\bar{x}) = \bar{x}^2 < x^2 = f(x)$.

Uwaga

Na odcinku otwartym funkcja może przyjmować wartość największą/najmniejszą ale nie musi.

Pochodna funkcji

Pojęcie pochodnej funkcji ma swoje korzenie w fizyce.

Powstało ono po to, by matematycznie wyrazić i scharakteryzować pojęcie tempa zmiany jakiejś wielkości w czasie.

Jako przykład może posłużyć pojęcie prędkości poruszającego się ciała, jeśli znamy jego położenie (współrzędną w jakimś układzie odniesienia) w każdej chwili.

Aby obliczyć tę prędkość dzielimy przyrost współrzędnej przez przyrost czasu, w którym się ten przyrost dokonał — licząc od pewnego ustalonego momentu t_0.

Im krótszy przedział czasu w tym celu uwzględnimy, tym lepiej przybliżymy to, co nazywamy prędkością ciała w chwili t_0.

W biologii podkreśla się różnicę pomiędzy stanem jakiejś wielkości i tempem zmiany tej wielkości. Czym innym jest stan danej wielkości, a czym innym produkcja tej wielkości.

Stężenie tlenu w danej chwili w przezroczystym naczyniu, którym szczelnie przykryliśmy roślinę doniczkową jest czym innym niż produkcja tlenu przez tę roślinę - są to wielkości nieporównywalne.

Stan danej wielkości (tu: stężenia) wyrażony jest w jednostkach $\left[\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}\right]$,
a produkcja tej wielkości wyraża się „na jednostkę czasu”, czyli np. $\left[\frac{\text{mol}}{\text{min. m}^3}\right]$.

Widzimy tu wyraźnie że przebieg pewnych procesów zależy od wielkości typu prędkość (prędkość podawania porcji tlenu lub produkcja tlenu), czyli „branych na jednostkę czasu”. Matematycznym źródłem tego typu wielkości jest właśnie pojęcie pochodnej funkcji.

Niech $x(t)$ określa położenie obiektu (samochodu) poruszającego się po prostoliniowym torze. Jeśli znamy położenie samochodu w chwili t_0, czyli $x(t_0)$, oraz w chwili późniejszej $t_0 + \Delta t$, to prędkość średnia ruchu samochodu w tym przedziale czasu wynosi

$$v_{śr}(t_0\,,\Delta t) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Nie oznacza to, że w przedziale czasu $[t_0\,, t_0 + \Delta t]$ samochód nie zwalniał i nie przyspieszał.

Prędkość samochodu w chwili t_0 definiuje się jako granicę prędkości średnich

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{śr}(t_0\,,\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t},$$

czyli $v_{śr}(t_0\,,\Delta t)$ przy coraz krótszym przedziale czasu Δt.

Definicja

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na odcinku otwartym (a,b) i niech $x_0 \in (a,b)$. Iloraz

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazywa się ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0.

Oznaczając przyrost argumentu przez $h = x - x_0$ możemy zapisać:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

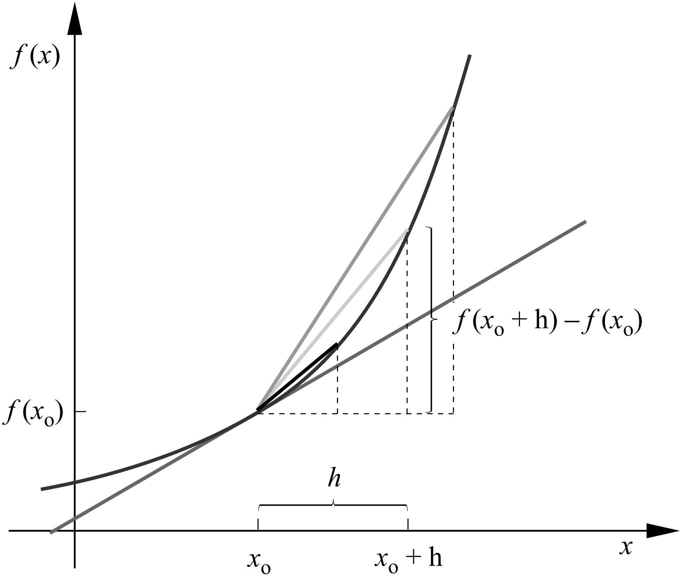
Definicja

Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na odcinku otwartym (a,b) i niech $x_0 \in (a,b)$. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 oznaczoną jako $f'(x_0)$ nazywamy granicę ilorazu różnicowego

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

o ile ta granica istnieje.

Ilustracja graficzna



Ze względów historycznych stosuje się też inne oznaczenia pochodnej: $\frac{df(x_0)}{dx}$ oraz $\dot{f}(x_0)$. Pierwsze z nich wywodzi się od zwyczajowego oznaczenia przyrostu, czyli różnicy wartości funkcji $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ i przyrostu argumentu $\Delta x = x - x_0$. Wtedy iloraz różnicowy można przedstawić jako $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ i stąd oznaczenie pochodnej $\frac{df(x_0)}{dx}$, które odnosi się do faktu, że pochodna to granica ilorazu różnicy wartości i różnicy argumentów funkcji gdy różnica argumentów dąży do zera. Jest to źródło pojęcia różniczki i stąd historyczna nazwa tego działu matematyki — rachunek różniczkowy.

Obliczanie pochodnych nazywa się różniczkowaniem i dlatego funkcję, która ma pochodną nazywa się funkcją różniczkowalną.

Pojęcie pochodnej wprowadził jeden z najwybitniejszych uczonych nowożytnych Isaac Newton (1643–1727) w związku ze swoimi badaniami dotyczącymi praw opisujących ruch ciał niebieskich.

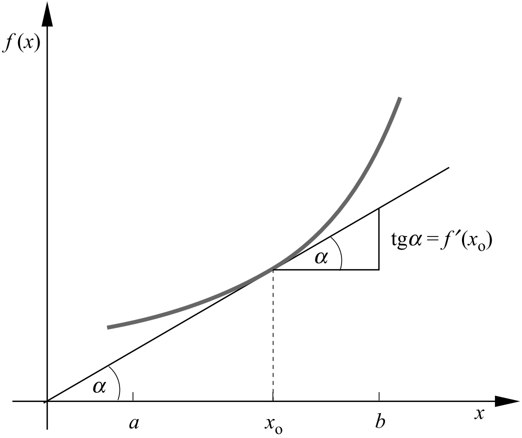
Oznaczenie $\dot{f}(x_0)$ najczęściej stosuje się w kontekście fizycznym/przyrodniczym, gdy argument funkcji interpretujemy jako czas.

Prosta styczna

Geometrycznie pochodna funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in D$, czyli $f'(x_0)$, określa współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkt $(x_0\,, f(x_0))$ należący do wykresu funkcji.

Tę prostą nazywa się prostą styczną do wykresu funkcji w punkcie $(x_0\,, f(x_0))$. Prosta ta jest wykresem funkcji $y = p(x) = ax + b$, gdzie $a = f'(x_0)$ i $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

Pochodna w punkcie x_0 równa jest tangensowi kąta pod jakim prosta styczna w tym punkcie przecina oś poziomą układu współrzędnych.



Nieistnienie pochodnej funkcji w punkcie

Nie każda funkcja ciągła ma pochodną; na przykład funkcja

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x > 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

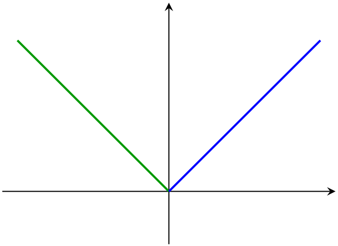
nie ma pochodnej w punkcie $x = 0$, gdyż granica prawostronna ilorazu różnicowego w 0 wynosi $+1$, a granica lewostronna ilorazu różnicowego wynosi -1, zatem granica ilorazu różnicowego nie istnieje — granica lewostronna jest różna od prawostronnej.

Granica z prawej strony ($h > 0$) to

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1\,,$$

a z lewej strony ($h < 0$)

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1\,.$$



Obliczanie pochodnych

Twierdzenie

Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi określonymi na odcinku (a, b)*. Wtedy dla dowolnego* $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Niech teraz $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $g\colon (c, d) \to (a, b)$ *i obie funkcje mają pochodne. Pochodną złożenia funkcji* $(c, d) \ni x \to h(x) = f(g(x))$ *oblicza się następująco, wg. tzw. reguły łańcuchowej:*

$$h'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Pochodne podstawowych funkcji

Z definicji wynika, że pochodna funkcji $v(x) = \text{const}$ jest równa 0.

Ze wzoru na pochodną iloczynu wynika, że (a — stała)

$$(af(x))' = (a)' \cdot f(x) + a \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + af'(x) = af'(x).$$

1. Pochodna funkcji $f(x) = x^2$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0 + h) = 2x_0.$$

   Pochodną funkcji $f(x) = x^2$ jest funkcja $g(x) = 2x$.

2. Ogólnie mamy

$$(x^p)' = px^{p-1} \quad \text{dla } p \in \mathbb{N}, p \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Wzór ten jest prawdziwy także dla $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, o ile $x > 0$.

3. Dla $a > 0$ i $a \neq 1$ zachodzi
$$(a^x)' = (\ln a\,)a^x.$$
W szczególności
$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$
czyli pochodna funkcji wykładniczej e^x równa jest jej samej. Jest to JEDYNA funkcja o tej własności!

Stanowi to jeden z przykładów wyjątkowych własności stałej Eulera e, dzięki czemu zyskała ona wyjątkowe miejsce w analizie matematycznej.

4. Dla funkcji $\ln x$ określonej dla $x > 0$ zachodzi
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$
Wynika to stąd, że
$$x = \mathrm{e}^{\ln x}.$$
Licząc pochodną funkcji po lewej i prawej stronie tego równania i wykorzystując twierdzenie o pochodnej złożenia funkcji, dostajemy
$$1 = \mathrm{e}^{\ln x}\,(\ln x)' = x\,(\ln x)'\,.$$

5. Z definicji pochodnej i ze wzorów trygonometrycznych można wyprowadzić wzory

$$(\sin x)' = \cos x\,, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Przykład

Korzystając z reguły łańcuchowej (wzoru na pochodną funkcji złożonej)

$$\left(\mathrm{e}^{5x^2}\right)' = \left(\mathrm{e}^{5x^2}\right)\left(\boxed{5}\,x^2\right)' = 5\left(\mathrm{e}^{5x^2}\right)\left(x^2\right)' =$$
$$= 5\left(\mathrm{e}^{5x^2}\right)\cdot 2x = 10x\mathrm{e}^{5x^2}.$$

Korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu i na pochodną funkcji złożonej:

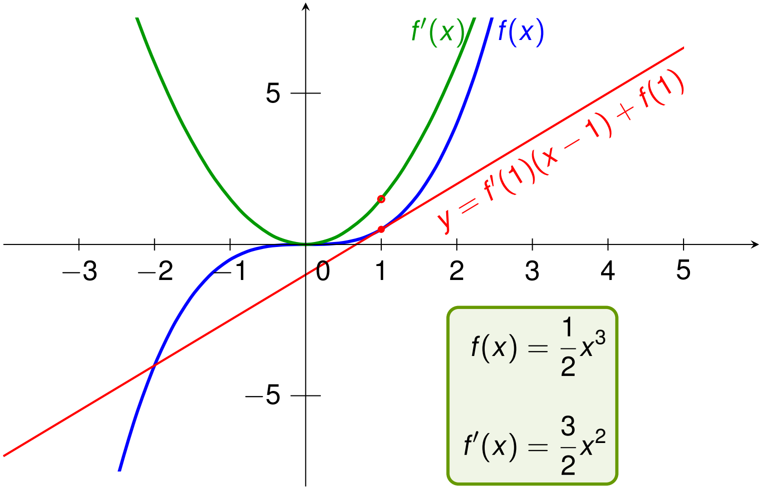
$$\left(\mathrm{e}^{2x}\sin x\right)' = \left(\mathrm{e}^{2x}\right)'\sin x + \mathrm{e}^{2x}(\sin x)' =$$
$$= \mathrm{e}^{2x}(2x)'\sin x + \mathrm{e}^{2x}\cos x =$$
$$2\mathrm{e}^{2x}\sin x + \mathrm{e}^{2x}\cos x.$$

Funkcja pochodna

Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją, która ma pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny.

Funkcję, która w każdym punkcie $x \in D$ przyjmuje wartość pochodnej $f'(x)$ nazywamy funkcją pochodną i oznaczamy f'.

Funkcja i jej funkcja pochodna



$$f(x) = \frac{1}{2}x^3$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2$$

Na kolejnych zajęciach poznamy własności pochodnej przydatne do określania przebiegu funkcji to znaczy kształtu wykresu funkcji zadanej jakimś wzorem.

Jest to tzw. badanie funkcji w ramach którego określa się lokalne maksima i minima funkcji oraz przedziały monotoniczności .