Matematyka dla biologów — Zajęcia nr 3.

Dariusz Wrzosek

17 października 2023

Analiza matematyczna

Przez kilka wykładów będziemy omawiać podstawowe pojęcia analizy matematycznej.

Główne pojęcia analizy to granica funkcji, ciągłość i pochodna funkcji oraz całka.

Są one niezbędne do konstruowania i analizy modeli matematycznych we wszystkich naukach przyrodniczych i społecznych.

Geneza tych pojęć wywodzi się z próby opisu zjawisk fizycznych i sięga wieku XVII.

Tematy:

1. Ciągi i ich granice, szeregi nieskończone
2. Ciągłość funkcji, pochodna funkcji i jej zastosowania
3. Całka i jej zastosowania

Dlaczego zajmujemy się ciągami liczb?

Wyobraźmy sobie, że śledzimy przebieg jakiegoś procesu, którego stan jest określony w ustalonych chwilach czasu np. co minutę co godzinę co rok itp. Może to być stężenie jakiejś substancji mierzone co godzinę albo stan jakiejś populacji mierzony co rok. Chwilom czasu przyporządkowane są zatem pewne liczby. Z matematycznego punktu widzenia to jest właśnie ciąg liczb. Jest wiele powodów by rozważać ciągi o nieskończonej liczbie wyrazów. Pojawiają się naturalne pytania

- czy ciąg jest ograniczony ?
- czy jest okresowy albo oscylujący?
- czy jest liczba do której zbliżają się wyrazy tego ciągu tzn. czy istnieje jego granica?

Po co nam nieskończoność?

Skoro wszystko co możemy zmierzyć jest skończone po co zajmować się nieskończonością. Są co najmniej dwa ku temu powody:

- liczby niewymierne takie jak π albo $\sqrt{2}$ mają w zapisie dziesiętnym nieskończenie wielu cyfr po przecinku i nie da się tego zredukować bez utraty informacji, można je tylko przybliżać np. poprzez odrzucenie cyfr zapisu dziesiętnego od pewnego miejsca.
- jeśli interesuje nas przewidywanie stanu do którego dąży jakiś proces w długiej perspektywie czasowej to wygodnie jest przyjąć, że czas dąży do nieskończoności i szukać jego granicy, bo są metody matematyczne służące do"przechodzenia do granicy w nieskończoności" i w konsekwencji **pojęcie nieskończoności staje się wygodnym i praktycznym narzędziem.**

Ciąg liczbowy i jego granica

Definicja

Ciągiem elementów z X nazywamy funkcję określoną na dowolnym podzbiorze A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ o wartościach w X, czyli:

$$A \ni n \to a(n) = a_n \in X.$$

Zajmiemy się ciągami nieskończonymi —tzn. gdy zbiór A ma nieskończenie wiele elementów.

Wyobraźmy sobie, że wyrazy ciągu reprezentują stany jakiegoś procesu fizycznego w kolejnych chwilach $n = 0\,,1\,,2\,\ldots$.

Jeżeli stany te przyjmują z czasem wartości coraz bliższe pewnego stanu granicznego, do którego proces dąży, to matematyczną idealizacją tego typu zjawiska jest właśnie pojęcie zbieżności ciągu do granicy.

Definicja granicy ciągu nieskończonego

Rozważymy najprostszy przypadek gdy $X = \mathbb{R}$ i przypomnijmy, że wtedy odległość pomiędzy punktami x i y równa jest $d(x, y) = |x - y|$.

Definicja

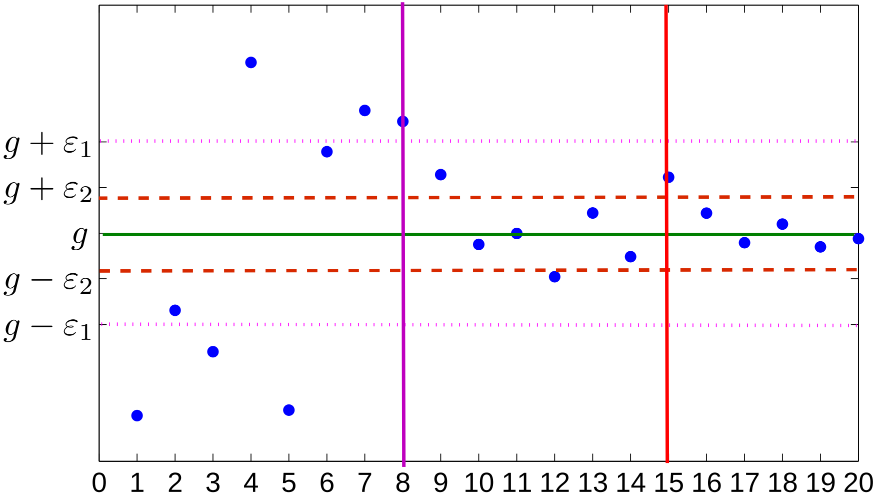
Element $g \in X$ jest granicą ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ w.t.w. gdy dla dowolnie wybranej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba N, taka że

$$|a_n - g| < \varepsilon. \quad dla \;\; n > N\,.$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = g\,,$$

i mówimy, że ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny/dąży do g.



Dla ε_1 mamy $N = 8$, natomiast dla ε_2 mamy $N = 15$.

Jeśli z ciągu zbieżnego usuniemy dowolną skończoną liczbę wyrazów, nie zmieni to granicy ciągu.

Twierdzenie

Ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę.

Definicja (Rozbieżność ciągu)

Ciąg, który nie ma granicy nazywamy ciągiem rozbieżnym

Ciąg okresowy

Definicja (Ciąg okresowy, ciąg stały)

Ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *nazywamy ciągiem okresowym jeżeli istnieje liczba* $T \geqslant 2$ *taka, że* $a_{n+T} = a_n$ *dla każdego* $n \geqslant 0$. *Gdy* $T = 1$ *ciąg nazywamy ciągiem stałym.*

Ciąg okresowy jest rozbieżny np. ciąg

$$c_n = (-1)^n$$

o okresie 2 przyjmuje wartość 1, gdy n jest liczbą parzystą oraz -1 w przeciwnym przypadku.

Przyklad

Granicą ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{+\infty}$ jest 0, co zapisujemy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

By to wykazać wystarczy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ znaleźć N, takie że dla $n > N$ zachodzi

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon\,.$$

Każda liczba $N \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ spełnia ten warunek. Na przykład dla $\varepsilon = \frac{1}{10}$ wystarczy wziąć $N = 10$, bo wtedy $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$ dla wszystkich $n > 10$.

Jeśli wybierzemy $\varepsilon = \frac{1}{520}$ to wystarczy wziąć $N = 520$ itd.

Definicja

Ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ jest rozbieżny do $+\infty$ w.t.w. gdy dla dowolnego $R > 0$ istnieje N, takie że dla wszystkich $n > N$ $a_n > R$. Piszemy wtedy

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,.$$

Ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest rozbieżny do $-\infty$ w.t.w gdy ciąg $\{-a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Fakt

$$\text{Jeśli}\quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \quad \text{to} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Przykłady

$$\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty, \quad \text{gdy } k > 0; \qquad \lim_{n\to+\infty} n^k = 0, \quad \text{gdy } k < 0;$$

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty, \quad \text{gdy } b > 1; \qquad \lim_{n\to+\infty} b^n = 0, \quad \text{gdy } |b| < 1;\,.$$

Podstawowe twierdzenia

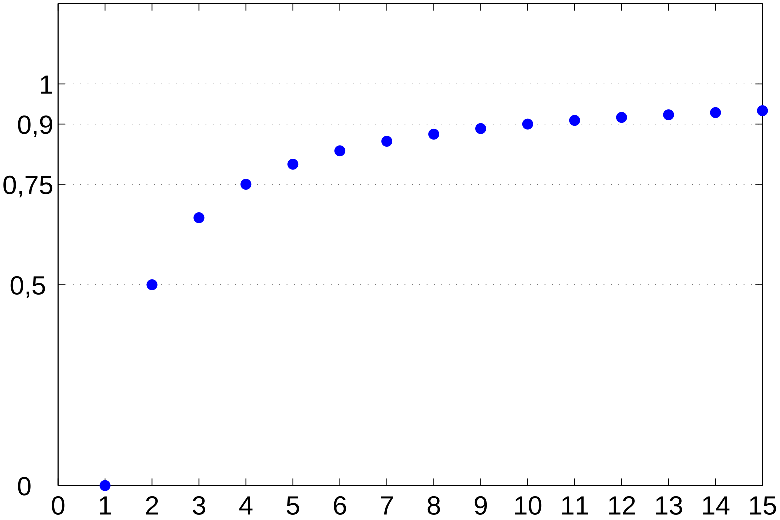
Twierdzenie

Ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, który jest ograniczony (czyli istnieje liczba M, taka że dla każdego n $|a_n| < M$) i niemalejący lub nierosnący jest zbieżny do pewnej liczby g, takiej że $|g| \leqslant M$.

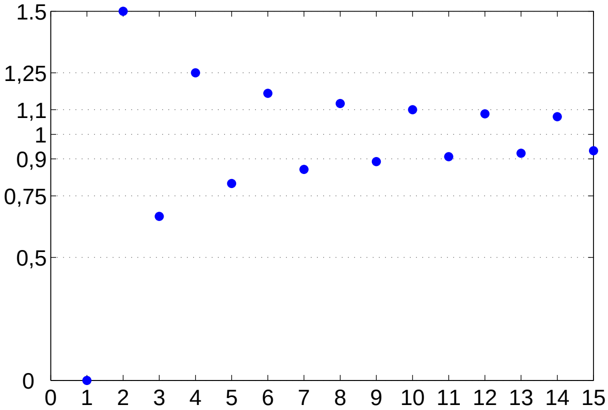
W przypadku ciągu nierosnącego jego granica jest największą z liczb ograniczających ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ od dołu. Liczbę tą nazywamy kresem dolnym zbioru wszystkich wyrazów ciągu.

W przypadku ciągu niemalejącego tą granicą jest najmniejsza z liczb ograniczających ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ od góry. Tą liczbę nazywamy kresem górnym zbioru wszystkich wyrazów ciągu.

Ciąg $a_n = 1 - \frac{1}{n}$



Ciąg $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$



Nie jest nierosnący ani niemalejący. Jego wyrazy zbiegają do granicy (równej 1) oscylacyjnie, tzn. przyjmują wartości na przemian mniejsze lub większe od 1.

Stała Eulera

Ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony przez liczbę 3. Zatem ma granicę.

Wartość można przyjąć jako definicję stałej Eulera oznaczanej przez e,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\,.$$

Jest to liczba, która jest podstawą logarytmu naturalnego. Jest ona niewymierna, a jej przybliżona wartość wynosi $\mathrm{e}\approx 2{,}718$.

Definicja

Podciągiem danego ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *nazywamy dowolny nieskończony ciąg wyrazów wybranych z ciągu* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *, z zachowaniem ich porządku występowania.*

Na przykład: podciągiem ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciąg $\{a_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ składający się tylko z wyrazów o numerach parzystych.

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest zbieżny do pewnej liczby, to wszystkie jego podciągi zbiegają do tej samej liczby.

Przykład

Ciąg: $a_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$. Widać, że $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 5$. Podciągi:

1. $a_{2n} = 5 + \frac{1}{2n}$, $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n} = 5$
2. $a_{2n+1} = 5 - \frac{1}{2n+1}$, $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n+1} = 5$

Własności arytmetyczne granicy ciągu

Twierdzenie

Przy założeniu, że istnieją granice ciągów $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *oraz* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ *spełnione są następujące równości*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = ab$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad \text{o ile } \; b, b_n \neq 0$$

Wszystkie te własności wynikają bezpośrednio z definicji.

Obliczanie granicy ciągu

Znajdziemy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n+3}{7n+2}.$$

W tym celu dzielimy licznik i mianownik przez n i dostajemy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n+3}{7n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{3}{n}}{7+\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(7+\frac{2}{n}\right)} = \frac{5}{7}.$$

W przypadku wyrażeń wymiernych (takich jak wyżej) wystarczy porównać najszybciej rozbieżne (= o najwyższym wykładniku) wyrazy z licznika i mianownika:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4+2n}{4n^4+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4}{4n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Zajmijmy się teraz ciągami zadanymi rekurencyjnie, czyli za pomocą pewnej zależności (funkcji), która określa kolejny ($n+1$) wyraz ciągu, jeśli znamy poprzedni (n) wyraz.

Mamy dany pierwszy wyraz ciągu a_1, pewną funkcję f oraz zależność

$$a_{n+1} = f(a_n).$$

Tak zadane ciągi pojawiają się w naturalny sposób w modelach matematycznych. Funkcja f określa prawo, według którego jakiś układ przechodzi od stanu a_n do stanu a_{n+1} w jednym kroku czasowym. Takie modele noszą nazwę modeli z czasem dyskretnym.

Rozpatrzmy przykład populacji, której stanem w sezonie n jest liczebność lub zagęszczenie (liczba osobników na jednostkę powierzchni lub objętości). Wtedy funkcja f opisuje wpływ rozrodczości i śmiertelności oraz innych czynników na stan tej populacji po upływie jednego sezonu.

Jest jasne, że różne populacje będą wymagały uwzględnienia nieco innych funkcji w ramach tego schematu.

Ciąg arytmetyczny

Zadany jest rekurencyjnie przez funkcję $f(x) = x + r$, czyli

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.

Własności ciągu arytmetycznego

- $a_n = a_1 + (n-1)r$ dla $n \geqslant 1$,
- $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$
- $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = n\dfrac{a_1 + a_n}{2}$,
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, jeśli $r > 0$,
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, jeśli $r < 0$

Jeśli kule bilardowe ułożyć w stos, to liczba kul w kolejnych warstwach opisana jest ciągiem arytmetycznym.

Ciąg geometryczny

Zadany jest rekurencyjnie przez funkcję $f(x) = qx$.

$$a_{n+1} = q\,a_n.$$

Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.

Własności i możliwe granice ciągu geometrycznego

- $a_n = a_1 q^{n-1}$, dla $n \geqslant 1$
- $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$, dla $q \neq 1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, jeśli $q > 1$ i $a_1 > 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, jeśli $q > 1$ i $a_1 < 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, jeśli $|q| < 1$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ nie istnieje, jeśli $q \leqslant -1$.

Model populacyjny z czasem dyskretnym.

Założenia

- pewien gatunek zwierząt rozmnaża się jeden raz w roku;
- młode są zdolne do rozrodu w następnym roku;
- liczby x_n dla $n \geqslant 1$, oznaczają liczebność populacji samic w n-tym roku tuż przed wydaniem potomstwa,
- na stan populacji w $n+1$ roku wpływa jedynie śmiertelność w ciagu roku i rozrodczość w poprzednim sezonie;
- samica ma średnio r potomków płci żeńskiej (średnio 60% całego miotu);
- Część s samic dożywa do następnego roku, $s \in (0\,,1]$.

Liczebność/zagęszczenie populacji samic w sezonie $n+1$ wynosi

$$x_{n+1} = s(x_n + r\,x_n) = s(1+r)x_n,$$

Model populacyjny z czasem dyskretnym.

Założenia

- pewien gatunek zwierząt rozmnaża się jeden raz w roku;
- młode są zdolne do rozrodu w następnym roku;
- liczby x_n dla $n \geqslant 1$, oznaczają liczebność populacji samic w n-tym roku tuż przed wydaniem potomstwa,
- na stan populacji w $n+1$ roku wpływa jedynie śmiertelność w ciagu roku i rozrodczość w poprzednim sezonie;
- samica ma średnio r potomków płci żeńskiej (średnio 60% całego miotu);
- Część s samic dożywa do następnego roku, $s \in (0\,,1]$.

Liczebność/zagęszczenie populacji samic w sezonie $n+1$ wynosi

$$x_{n+1} = s(x_n + r\,x_n) = s(1+r)x_n,$$

Model populacyjny z czasem dyskretnym.

Ciąg rekurencyjny określający stan populacji można przedstawić jako

$$x_{n+1} = s(1 + r)x_n \, .$$

albo inaczej rozdzielając efekt śmiertelności (strata) od rozrodczości i przeżywalności młodych (zysk)

$$x_{n+1} = x_n - (1 - s)x_n + srx_n.$$

Interpretacja parametrów :

$(1 - s)$ – śmiertelność (per capita) , bo $(1 - s)x_n$ określa całk. stratę,

r – rozrodczość (per capita) tzn. liczba młodych samic w jednym miocie,

sr –liczba młodych przeżywających do kolejnego sezonu.

Zagęszczenie populacji opisuje ciąg geometryczny, a zatem

$$x_n = x_1(s(1+r))^{n-1}.$$

Czyli los populacji zależy od tego, czy

$$q = s(1+r) \lesseqgtr 1$$

albo równoważnie od znaku wielkości

$$-(1-s) + sr$$

określającej różnicę między śmiertelnością i rozrodczością (uwzględniającą przeżywalność młodych przez jeden sezon)

1. Jeśli $s(1+r) < 1$, czyli śmiertelność jest zbyt duża lub rozrodczość zbyt mała, to
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$$
i populacja wymiera.
2. Jeśli $s(1+r) > 1$, to zagęszczenie populacji wzrasta nieograniczenie.
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

Stan całej populacji p_n w n-tym sezonie wynosi (jeśli przyjmiemy, że w pierwszym roku samice stanowiły 60% całej populacji) $\frac{x_n}{0{,}6}$, gdyż w każdym miocie jest 60% samic.

Uwaga: To jest bardzo uproszczony model, który można rozbudowywać na wiele sposobów uwzględniając np.

- zróżnicowanie przeżywalności młodych przez pierwszy sezon od przeżywalności pozostałych osobników,
- migrację osobników albo odłów,
- strukturę populacji np. wiekową,
- wpływ konkurencji i przegęszczenia populacji wtedy np. r malałoby wraz ze wzrostem liczebności (model nieliniowy).

Paradoks dychotomii

Rozpatrzmy zagadnienie postawione przez starożytnego filozofa Zenona z Elei (490-430p.n.e.), który przedstawił cztery argumenty przeciw ruchowi twierdząc, że byt jest niezmienny. Oto jeden z nich dotyczący tzw. dychotomii.

Paradoks: ruch jest niemożliwy

Jeśli jakiś przedmiot znajdowałby się w ruchu i miał przebyć jakąś drogę to najpierw musiałby pokonać połowę tej drogi potem połowę reszty i.t.d (stąd nazwa dychotomia). Jakkolwiek tedy mała jest droga, którą musi pokonać przedmiot zawsze musi przebyć nieskończoną ilość odcinków a tego przecież w skończonym czasie dokonać niepodobna. Ruch zatem jest niemożliwy.

d — długość drogi, którą ma pokonać przedmiot.

Czy dodanie do siebie nieskończenie wielu składników

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \dots$$

Paradoks dychotomii

Rozpatrzmy zagadnienie postawione przez starożytnego filozofa Zenona z Elei (490-430p.n.e.), który przedstawił cztery argumenty przeciw ruchowi twierdząc, że byt jest niezmienny. Oto jeden z nich dotyczący tzw. dychotomii.

Paradoks: ruch jest niemożliwy

Jeśli jakiś przedmiot znajdowałby się w ruchu i miał przebyć jakąś drogę to najpierw musiałby pokonać połowę tej drogi potem połowę reszty i.t.d (stąd nazwa dychotomia). Jakkolwiek tedy mała jest droga, którą musi pokonać przedmiot zawsze musi przebyć nieskończoną ilość odcinków a tego przecież w skończonym czasie dokonać niepodobna. Ruch zatem jest niemożliwy.

d — długość drogi, którą ma pokonać przedmiot.

Czy dodanie do siebie nieskończenie wielu składników

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \dots$$

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \dots$$

Długości dróg przebytych w kolejnych etapach tworzą ciąg geometryczny

$$a_1 = \frac{d}{2}, \quad a_2 = \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad \dots$$

o ilorazie $q = \frac{1}{2}$ i pierwszym wyrazie $\frac{d}{2}$.

Zgodnie ze wzorem na sumę wyrazów ciągu geometrycznego obliczamy drogę przebytą po n etapach

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{d}{2} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) .$$

Po przejściu do granicy dostajemy

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = d .$$

Nie ma tu żadnego paradoksu — przedmiot pokona całą drogę o długości d, a więc starożytny filozof nie miał racji.

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \dots$$

Długości dróg przebytych w kolejnych etapach tworzą ciąg geometryczny

$$a_1 = \frac{d}{2}, \quad a_2 = \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad \dots$$

o ilorazie $q = \frac{1}{2}$ i pierwszym wyrazie $\frac{d}{2}$.

Zgodnie ze wzorem na sumę wyrazów ciągu geometrycznego obliczamy drogę przebytą po n etapach

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{d}{2} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) .$$

Po przejściu do granicy dostajemy

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = d .$$

Nie ma tu żadnego paradoksu — przedmiot pokona całą drogę o długości d, a więc starożytny filozof nie miał racji.

Szereg liczbowy

Pojęcie szeregu liczbowego nadaje sens sumie nieskończonej liczby składników.

Jeśli wyrazy szeregu oznaczymy przez $a_1, a_2, \ldots$, to szereg zapisujemy następująco

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Definicja

Mówimy, że szereg jest zbieżny do liczby g, jeśli ciąg sum częściowych szeregu, czyli ciąg

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

jest zbieżny do g, czyli $\lim_{n\to+\infty} S_n = g$.

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Twierdzenie

Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu jest to, aby ciąg jego wyrazów był zbieżny do 0*.*

Dowód.

Oznaczmy $a_n = S_n - S_{n-1}$.
Skoro zakładamy, że dany szereg jest zbieżny do jakiegoś g, to zarówno $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = g$, jak też $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = g$.

Zatem $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g - g = 0$. □

Warunek z poprzedniego slajdu nie jest wystarczający!

Okazuje się, że jeśli wyrazy szeregu nie zbiegają do 0 dostatecznie szybko to szereg jest rozbieżny

Przykład

Wyrazy tzw. szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zbiegają do 0, ale szereg ten jest rozbieżny do $+\infty$, gdyż można sprawdzić, że $S_{2^{n+1}} \geqslant \frac{n}{2}$, a wtedy

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2^{n+1}} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty,$$

czyli ciąg sum częściowych zawiera podciąg rozbieżny do nieskończoności, sam zatem również jest rozbieżny.

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geqslant 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geqslant 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geqslant 8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \cdots$$

O ile $|q| < 1$, to szereg potęgowy, który zapisujemy jako $\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$ jest zbieżny oraz (ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego)

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Każda liczba rzeczywista z przedziału $(0\,,1)$ jest granicą pewnego szeregu, który w systemie pozycyjnym dziesiętnym zapisujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k},$$

gdzie d_k są liczbami całkowitymi od 0 do 9. Zapisujemy wtedy $0, d_1 d_2 d_3 \ldots$

W systemie dwójkowym wykorzystywanym np. do komputerowej reprezentacji liczb mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k},$$

gdzie b_k przyjmują wartość 0 lub 1.

Dowolną liczbę w systemie dziesiętnym możemy przedstawić jako sumę części całkowitej zapisanej na ℓ miejscach przed przecinkiem i ułamkowej złożonej na ogół z nieskończenie wielu cyfr znaczących po przecinku

$$\sum_{k=0}^{\ell} d_k 10^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k} = \sum_{k=-\ell}^{+\infty} d_k 10^{-k}.$$

Przykład

$$0.33333(3) = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right) = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

Stała Eulera

Stałą Eulera e można także przedstawić jako sumę następującego szeregu

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Przykłady kolejnych wartości silni

$$\begin{array}{lllll} 2! = 2, & 4! = 24, & 6! = 720, & 8! = 40\,320, & 10! = 3\,628,800, \\ 3! = 6, & 5! = 120, & 7! = 5\,040, & 9! = 362\,880, & 11! = 39\,916\,800 \end{array}$$