

Matematyka dla biologów — Zajęcia nr 1.

Koordynator - Prof. Dariusz Wrzosek

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki,
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski,
Banacha 2, 02-097 Warszawa
pokój 5600

Czy matematyka jest potrzebna biologom?

- rachunek prawdopodobieństwa i statystyka
- modelowanie matematyczne i komputerowe zjawisk biologicznych

Zaliczenie przedmiotu

Przedmiot zalicza się po uzyskaniu odpowiedniej liczby punktów, które uzyskuje się na podstawie

- prac domowych, pięciokrotnie zadane będą po trzy zadania domowe do zrobienia na kartkach (1 zad. domowe = 2 punkty),
- sprawdzianów, odbędą się dwa sprawdziany 30 minutowe na których trzeba będzie udzielić odpowiedzi na trzy pytania (1 zad. na sprawdzianie = 5 punktów),
- egzaminu pisemnego.

Punktacja i zaliczenie przedmiotu

Punktacja

- 30 pktów - sprawdziany (2x3 zadania)
- 30 pktów - prace domowe (5x3 zadania)
- 10 pktów - aktywność na zajęciach
- 40 pktów - egzamin pisemny

Aby zaliczyć przedmiot trzeba uzyskać 50 punktów. To daje szansę zaliczenia przedmiotu bez podchodzenia do egzaminu i motywuje do systematycznej pracy.

Literatura

Podstawowe podręczniki:

- Dariusz Wrzosek, *Matematyka dla biologów*, Wydawnictwa UW, 2008
- Marek Bodnar, *Zbiór zadań z matematyki dla biologów*, Wydawnictwa UW, 2008
- *Tablice Matematyczne*, Wydawnictwo Adamantan, 1999.

Literatura uzupełniająca bardziej zaawansowana

- Urszula Foryś, *Matematyka w biologii*, WNT 2005.
- Miłostawa Sokół, *Metody modelowania populacji*, PWN 2013.
- J.D. Murray, *Wprowadzenie do biomatematyki*, Wydawnictwa Naukowe PWN, 2008
- Janusz Uchmański, *Klasyczna ekologia matematyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1992.

Strona internetowa

Plan kursu

- zajęcia 1-2; przypomnienie podstaw logiki, operacje na zbiorach, liczby, podstawowe własności funkcji,
- zajęcia 3-4; funkcja liniowa, potęgowa wykładnicza i logarytmiczna, logarytmiczne układy współrzędnych,
- zajęcia 5-7; granica ciągu, szereg liczbowy (potęgowy), zapis liczby rzeczywistej, granica funkcji, pochodna funkcji jednej zmiennej, ekstrema funkcji, wypukłość
- zajęcia 8-9; macierz, mnożenie macierzy gradient funkcji wielu zmiennych, metoda najmniejszych kwadratów, funkcja pierwotna całka oznaczona,
- zajęcia 10-12; podstawowe modele matematyczne z czasem ciągłym (równanie różniczkowe Malthusa i logistyczne) i z czasem dyskretnym,
- zajęcia 12-15; kombinatoryka i podstawy rachunku prawdopodobieństwa, Twierdzenie Bayesa, rozkłady dyskretne i rozkłady ciągłe zmiennych losowych, ciąg prób Bernoulliego, rozkład dwumianowy, rozkład jednostajny, wykładniczy i normalny, łańcuchy

Czym jest logika

Logika formalna lub matematyczna zajmuje się badaniem takich reguł wnioskowania, dzięki którym z prawdziwości jednych zdań wnosimy o prawdziwości innych zdań bez rozpatrywania ich znaczeń i związku z rzeczywistością. Wszelkie rozumowania w matematyce i innych dziedzinach wiedzy wykorzystują logikę.

Stosowanie praw logiki umożliwia precyzyjną komunikację między ludźmi i ma znaczenie podstawowe w naukach ścisłych i przyrodniczych.

Podstawy rachunku zdań i logiki dwuwartościowej, tzn. takiej, która przyjmuje, że dane zdanie może być albo **prawdziwe**, albo **fałszywe** i nic pośrodku, są w programie szkoły średniej i zakładamy, że wszyscy się z tym zetknęli.

Zdanie logiczne

Definicja

Zdaniem w logice nazywamy wyrażenie oznajmujące, któremu można przyporządkować wartość prawdy (oznaczamy jako 1) lub fałszu (oznaczamy jako 0).

Zauważmy, że w definicji zdania nie ma mowy o tym, w jaki sposób można się przekonać czy dane zdanie jest prawdziwe, czy nie.

Logika formalna **nie zajmuje** się bezpośrednio badaniem rzeczywistości empirycznej, ale **badaniem wzajemnych zależności między zdaniami, które coś o rzeczywistości stwierdzają**.

Na gruncie klasycznej logiki formalnej omija się całą złożoną debatę filozoficzną dotyczącą pojęcia prawdy, odnoszącą się przede wszystkim do relacji pomiędzy myślami czy głoszonymi sądami a rzeczywistością.

Przykłady zdań logicznych

Nie każde zdanie z punktu widzenia gramatyki jest zdaniem z punktu widzenia logiki.

Zdanie, które nie jest zdaniem z punktu widzenia logiki

Pytania nie są zdaniami w sensie logicznym, a zdanie

Litera „a” poprzedza literę „b”.

mimo iż jest dobrze zbudowane i wyraża pewien sąd, to jego prawdziwość zależy od kontekstu.

Zdanie spełniające definicję zdania logicznego

Litera „a” poprzedza literę „b” w wyrażeniu „absolut”.

Podstawowe typy zdań złożonych

W logice najczęściej mamy do czynienia ze zdaniami złożonymi.

Konwencja

Zdania oznaczane będą literami $p, q, r \dots$

Zaprzeczenie zdania p oznaczamy przez $\neg p$.

Podstawowe zdania złożone określa się definiując ich wartość logiczną na podstawie wartości logicznej zdań składowych.

Możliwe wartości logiczne zdania złożonego w zależności od wartości zdań składowych przedstawia się w tzw. **tabelce logicznej**.

Przykład — tabela logiczna dla negacji (zaprzeczenia)

p	$\neg p$
1	0
0	1

Równoważność zdań

Równoważność zdań p, q oznaczamy $p \Leftrightarrow q$ odpowiada wyrażeniu: „zдание p jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy prawdziwe jest zdanie q ”.

Inaczej: Zdanie p jest równoważne zdaniu q , gdy oba zdania są jednocześnie prawdziwe bądź fałszywe.

Tabela logiczna dla równoważności

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Zamiast wyrażenia „wtedy i tylko wtedy” będziemy używać skrótu „w.t.w.”

Koniunkcja i alternatywa zdań

Koniunkcja zdań p i q

(oznaczamy $p \wedge q$) jest prawdziwa w.t.w. gdy oba człony koniunkcji są jednocześnie prawdziwe:

Tabela logiczna dla koniunkcji zdań

p	q	$p \wedge q$
1	0	0
0	1	0
0	0	0
1	1	1

Alternatywa zdań p lub q

(oznaczamy $p \vee q$) jest prawdziwa w.t.w. gdy przynajmniej jeden z członów alternatywy jest prawdziwy:

Tabela logiczna dla alternatywy zdań

p	q	$p \vee q$
1	0	1
0	1	1
0	0	0
1	1	1

Alternatywa zdań: logika a mowa potoczna

Warto podkreślić, że alternatywa dwóch zdań jest prawdziwym zdaniem także wtedy, gdy oba zdania składowe są prawdziwe, a nie tylko gdy jedno z dwóch jest prawdziwe.

W mowie potocznej często nie zwraca się uwagi na to, czy mówiąc „*zachodzi A lub B*” ma się na myśli sytuację, w której równie dobrze zachodzi A jak i B, czy też tylko zachodzi A, a B nie zachodzi lub na odwrót.

W celu podkreślenia niemożności jednoczesnego spełnienia obu zdań składowych lepiej użyć słowa „*albo*” zamiast „*lub*”, tak jak w słynnym *być albo nie być*.

Implikacja

Implikacja: jeśli p to q (oznaczamy $p \Rightarrow q$) jest prawdziwa, gdy poprzednik implikacji p jest fałszywy lub następnik implikacji q jest prawdziwy i jest fałszywa **tylko wtedy**, gdy prawdziwy jest poprzednik i fałszywy następnik.

Sens implikacji $p \Rightarrow q$ dobrze oddaje rzadko już używane określenie:
zdanie p pociąga za sobą zdanie q .

Tabela logiczna dla implikacji

p	q	$p \Rightarrow q$
1	0	0
0	1	1
0	0	1
1	1	1

Dwa zdania p i q są równoważne, gdy
 $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$.

Należy podkreślić, że jeśli poprzednik implikacji jest fałszywy, to implikacja jest zawsze prawdziwa.

Implikacja a mowa potoczna

Zdanie

Jeśli będziesz się uczył cały tydzień przed egzaminem, to go zdasz

jest fałszywe tylko wtedy, gdy uczyłeś się cały tydzień przed egzaminem i go nie zdałeś, natomiast jest prawdziwe również wtedy, gdy nie uczyłeś się przez tydzień i zdałeś egzamin, gdyż o wyniku egzaminu przesądziły jakieś inne czynniki.

Jest ono oczywiście prawdziwe, gdy nie uczyłeś się przez tydzień i nie zdałeś egzaminu.

Podkreślmy, że implikacji rozumianej jak wyżej nie należy mylić z wnioskowaniem logicznym, które jest zastosowaniem któregoś prawa logiki przy przechodzeniu od założeń (przesłanek) do wniosku.

Implikacja a mowa potoczna

Zastąpienie konstrukcji okresu warunkowego „jeśli p to q ” wyrażeniem „z p wynika q ” może sugerować, że q jest wnioskiem z p i prowadzić do nieporozumień.

Poniższa implikacja jest przykładem oczywistego wnioskowania dedukcyjnego

Jeśli Karol mieszka w Krakowie, to mieszka w Polsce.

Fakt, że Karol mieszka w Warszawie, a nie w Krakowie, nie wpływa na prawdziwość tego zdania, zgodnie z definicją implikacji.

Zdanie

Jeśli 4 jest podzielne przez 2, to pies ma cztery nogi.

jest przykładem prawdziwej implikacji, bo zarówno poprzednik jak i następnik są zdaniami prawdziwymi, ale oczywiście nie jest to przykład wnioskowania.

Warunek konieczny i wystarczający

Definicja

W przypadku implikacji

$$p \Rightarrow q \quad (\star)$$

Zdanie q nazywamy **warunkiem koniecznym** dla zdania p .

Zdanie p nazywamy **warunkiem wystarczającym** (lub **dostatecznym**) dla zdania q .

Implikację $q \Rightarrow p$ nazywa się **implikacją odwrotną** do $(\star)$.

Implikację $\neg q \Rightarrow \neg p$ nazywa się **kontrapozycją** $(\star)$.

Implikację $\neg p \Rightarrow \neg q$ **implikacją przeciwną** do $(\star)$.

Dla przykładu: **jeśli jakaś osoba jest posłem, to ma ukończone 18 lat.**
Zatem warunkiem koniecznym, aby być posłem jest ukończenie 18 lat.
Nie jest to jednak warunek wystarczający.

Prawdziwość złożonych zdań logicznych

Aby sprawdzić czy dane zdanie złożone jest prawdziwe, trzeba rozpatrzyć wszystkie możliwe wartości logiczne zdań składowych i posłużyć się definicjami podstawowych zdań złożonych.

Najłatwiej zastosować metodę zero-jedynkową i skonstruować tabelkę logiczną.

Udowodnimy, że implikacja $p \Rightarrow q$ jest równoważna swojej kontrapozycji $\neg q \Rightarrow \neg p$, co zapiszemy jako

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad (**)$$

W powyższym zdaniu użyliśmy nawiasów, co ma na celu wyodrębnienie zdań składowych w zdaniu złożonym.

Aby określić wartość logiczną głównego zdania złożonego, określa się wartości logiczne zdań składowych objętych nawiasami, poczynając od zdania objętego najbardziej wewnętrznymi nawiasami.

Implikacja jest równoważna swojej kontrapozycji

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad (**)$$

Oznaczając równoważność w $(**)$ jako zdanie r mamy

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	r
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1

W ostatniej kolumnie występują same jedynki, a to znaczy, że zdanie r jest zawsze prawdziwe niezależnie od wartości logicznych zdań składowych.

Tautologia

Sprawdzenie czy dane zdanie złożone jest prawdziwe czy nie, zostało sprowadzone do automatycznego zastosowania pewnych prostych reguł. Dlatego ten dział logiki matematycznej nazywamy **rachunkiem zdań**.

Zdanie w omawianym przed chwilą przykładzie ($\star\star$) to właśnie **prawo logiki**, czyli **tautologia** w sensie logicznym.

W sensie potocznym przez tautologię rozumiemy zwykle powtórzenie tego, co już zostało powiedziane.

Definicja

Tautologia (w sensie logiki) to prawo logiki, tzn. każde zdanie złożone, które jest prawdziwe przy dowolnej wartości logicznej zdań, z których się składa.

Słowo tautologia wywodzi się od greckiego $\tau α υ τ ο ο ς$ — ten sam i $λ ο γ ο ο ς$ — mowa.

Prawo podwójnego zaprzeczenia

Prawo podwójnego zaprzeczenia

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p.$$

Łatwo sprawdzić, że to rzeczywiście jest tautologia .

Nie wszystkie języki naturalne respektują to prawo (na przykład język polski).

Zdanie

„Nie było nikogo w pokoju.”

zawiera dwa zaprzeczenia, które nie znoszą się wzajemnie.

Angielskie tłumaczenie tego zdania

”There was nobody in the room.”

zawiera tylko jedno zaprzeczenie.

Prawo wyłącznego środka i prawa de Morgana

Prawo wyłącznego środka

$$p \vee \neg p$$

Zatem nie ma żadnej wartości logicznej pomiędzy prawdą i fałszem.

Zaprzeczenie alternatywy oraz koniunkcji (prawa de Morgana)

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Zdanie

„nieprawda, że kruki są czarne **lub** białe”

jest równoważne zdaniu

„kruki nie są czarne **i** kruki nie są białe”

czyli innymi słowy

„kruki nie są ani czarne ani białe ”

Zaprzeczenie implikacji

Zaprzeczenie implikacji

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

Np. zdanie

„Nieprawda, że jeśli koń jest pokryty łuską, to jest wielorybem”

równoważne jest zdaniu

„Koń jest pokryty łuską i nie jest wielorybem”.

Ważne tautologie

Modus ponens (łac.)

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

Ta tautologia jest podstawą reguły wnioskowania zwanej dedukcją.

Modus tollens (łac.)

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

Obie tautologie pokazane na tym slajdzie są szczególnie ważne i bez nich nie sposób wyobrazić sobie wnioskowania w jakiegokolwiek dziedzinie ludzkiej działalności.

Konstruując tabelkę logiczną można w każdym przypadku sprawdzić, czy dane zdanie jest tautologią czy nie.

Zastosowanie tautologii *modus ponens*

Dedukcja to następujący schemat wnioskowania:

jeśli przyjmiemy daną implikację za prawdziwą
i sprawdzimy, że poprzednik tej implikacji jest prawdziwy,
to prawdziwy jest także następnik.

Przykład zastosowania dedukcji

Przyjmijmy, że prawdziwa jest implikacja

Jeśli po jeziorze płynie żaglówka,
to jezioro nie jest zamarznięte

Będąc nad jeziorem Mamry stwierdzamy, że

Po jeziorze płynie żaglówka

Dzięki dedukcji wnioskujemy, że

Jezioro Mamry nie jest zamarznięte

Zastosowanie tautologii *modus tollens*

Ta tautologia jest przydatnym narzędziem służącym do obalania zdań ogólnych w rodzaju

„Wszystkie kruki są czarne”.

Niech to będzie zdanie „p”.

Wynika stąd, że skoro wszystkie kruki mają tę cechę, to oczywiście każdy napotkany z osobna kruk też ją ma.

Tak powstaje zdanie „q” stwierdzające, że napotkany kruk jest czarny.

Jeśli tylko znajdziemy kruka o ubarwieniu innym niż czarne, czyli stwierdzimy, że zdanie „q” jest fałszywe, to zdanie „p” jest także fałszywe.

Kwantyfikatory

Bardzo często (w matematyce i innych naukach) formułuje się twierdzenia, które mówią, że pewna własność jest wspólna dla **wszystkich** elementów jakiegoś zbioru lub że **istnieje** przynajmniej jeden element danego zbioru.

Aby takie zdania lub twierdzenia zapisać symbolicznie używamy znaczków zwanych kwantifikatorami.

Istnieją dwa kwantyfikatory:

- **ogólny** odpowiadający wyrażeniu „**dla wszystkich**” lub „**dla każdego**”
- **szczegółowy** odpowiadający wyrażeniu „**istnieje**”

Kwantyfikator ogólny

Kwantyfikator ogólny

Oznaczany jako $\forall$ odpowiada określeniom „dla każdego”, „wszyscy”, „zawsze”

Oznaczenie pochodzi od odwróconej litery „A”, pierwszej litery angielskiego słowa „All”.

W szkole i w niektórych starych polskich podręcznikach akademickich można się spotkać z notacją polską: $\wedge$.

W matematyce używa się skrótu

$$\forall x \in X$$

co znaczy „dla każdego elementu x ze zbioru X ”.

Kwantyfikator szczegółowy

Kwantyfikator szczegółowy

Nazywany jest również kwantyfikatorem egzystencjalnym i oznaczamy jako $\exists$. Odpowiada w mowie potocznej określeniom „istnieje”, „niektóre”, „zdarza się” itp.

Oznaczenie pochodzi od odwróconej litery „E”, pierwszej litery angielskiego słowa „*Exists*”.

W szkole i w niektórych starych polskich podręcznikach akademickich można się spotkać z notacją polską: $\vee$.

Zapis

$$\exists x \in X$$

oznacza „istnieje element x należący do zbioru X ”.

Nie ma tekstu matematycznego, który nie zawierałby zdań z kwantyfikatorami, co nie oznacza, że w tekście używa się powszechnie wyżej wprowadzonych oznaczeń kwantyfikatorów. Użycie oznaczeń ułatwia jednak wprowadzenie praw rządzących użyciem kwantyfikatorów.

Rozważmy zdanie

Wszyscy zostali wybrani
w demokratycznych wyborach.

Póki nie określi się zbioru osób, do których odnosi się słowo „wszyscy”, to powyższe wyrażenie, będące zdaniem w sensie gramatyki, nie jest zdaniem w sensie logiki.

Brakuje tu określenia dziedziny, tak jakbyśmy zapisali wyrażenie $x^2 > 5$ nie precyzując, jaki jest zakres zmienności zmiennej x .

Takie „prawie zdanie” nazywa się funkcją zdaniową.

Jeśli za słowem „wszyscy” wstawimy np. słowo „ministrowie”, otrzymamy zdanie w sensie logiki o wartości fałszu.

Funkcja zdaniowa

Definicja

***Funkcją zdaniową** nazywamy wyrażenie zawierające pewne zmienne, które staje się zdaniem (prawdziwym bądź fałszywym) po podstawieniu zamiast zmiennej jakiejś nazwy albo w wyniku związania tej zmiennej kwantyfikatorem.*

*Zbiór, którego elementy możemy podstawiać za zmienną, nazywamy **zakresem zmienności funkcji zdaniowej**.*

Rolę zmiennej w naszym przykładowym zdaniu pełni dopełnienie dalsze, w sensie gramatyki, precyzujące zbiór osób, o których stwierdzamy, że są lub nie są wybierane w demokratycznym głosowaniu.

Przykład

Rozważmy następujące wyrażenie ze zmienną x

$$x^2 \geq x$$

które nazwiemy funkcją zdaniową P ze zmienną x , co zapisujemy skrótowo jako $P(x)$.

Póki nie znamy zakresu zmienności zmiennej x , powyższe wyrażenie nie jest zdaniem logicznym.

Staje się ono zdaniem, gdy dodamy na początku „Dla każdej liczby parzystej x ” lub „Istnieje liczba naturalna x ”, itp.

Niech φ będzie funkcją zdaniową. Wówczas

- zdanie „dla każdego x ze zbioru X zachodzi funkcja zdaniowa $\varphi(x)$ ”, co zapisujemy jako

$$\forall x \in X \quad \varphi(x),$$

jest prawdziwe w.t.w. gdy przy każdym podstawieniu w funkcji zdaniowej φ nazwy elementu zbioru X otrzymujemy zdanie prawdziwe;

- zdanie „istnieje x ze zbioru X , taki że zachodzi funkcja zdaniowa $\varphi(x)$ ”, co zapisujemy jako

$$\exists x \in X \quad \varphi(x),$$

jest prawdziwe w.t.w. gdy przy podstawieniu nazwy choćby jednego elementu ze zbioru X otrzymujemy zdanie prawdziwe.

Pozostawiając na boku kwestię prawdziwości zdań rozpatrzmy przykład zdania zawierającego kwantyfikator ogólny

Każda komórka w żywym organizmie zawiera fragment kwasu DNA.

oraz zdania z kwantyfikatorem szczegółowym

Niektóre komórki w żywym organizmie mają podwójną liczbę chromosomów.

Pozostawiając specjalistom stwierdzenie, czy zdania te są zgodne z obecną wiedzą, czy nie, zbudujemy zaprzeczenia tych zdań.

Istnieje komórka w żywym organizmie, która nie zawiera choćby fragmentu kwasu DNA.

oraz

Wszystkie komórki w żywym organizmie mają różną od podwójnej liczbę chromosomów.

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

Budowę zdań będących zaprzeczeniami zdań z kwantyfikatorami określają prawa de Morgana dla kwantyfikatorów. Niech φ oznacza pewną funkcję zdaniową

Dla kwantyfikatora ogólnego

$$\neg (\forall x \in X \varphi(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X (\neg \varphi(x))$$

Dla kwantyfikatora szczegółowego

$$\neg (\exists x \in X \varphi(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X (\neg \varphi(x)).$$

Kolejność kwantyfikatorów

Uwaga! Kolejność występowania kwantyfikatorów w zdaniu jest istotna i zmienia sens zdania.

Przykład

Zdanie

Każdy student ożeni się z jakąś studentką
zawiera dwa kwantyfikatory, gdyż znaczy to samo co

Dla dowolnego studenta istnieje studentka,
z którą się ożeni.

Po przestawieniu kwantyfikatorów dostajemy zdanie

Istnieje studentka, z którą ożeni się każdy student.

Zbiór

Przez wieki poszukiwano pojęcia podstawowego, za pomocą którego można by określić przedmiot badań matematyków. Na przełomie XIX i XX wieku zaczęło kształtować się przekonanie, że podstawowym pojęciem w matematyce jest **pojęcie zbioru**.

Tego pojęcia nie definiuje się formalnie, jest to tak zwane **pojęcie pierwotne**, którego znaczenie przedstawia się opisowo odnosząc się do intuicji.

Koncepcja zbioru w matematyce

Zbiór jest pewnym obiektem, który albo **nic nie zawiera**, to znaczy nie należą do niego żadne elementy, albo **zawiera jakieś elementy**, które też mogą hierarchicznie składać się z jakiś elementów i.t.d.

Pojęcia należenia do zbioru i inkluzji

Jest rzeczą podstawowej wagi by rozróżnić dwa pojęcia:

- 1 pojęcie pierwotne **należenia** elementu do jakiegoś zbioru, albo inaczej bycia elementem zbioru;
- 2 od pojęcia **inkluzji**, czyli zawierania się jednego zbioru w drugim lub inaczej bycia podzbiorem zbioru.

Sens stwierdzenia, że x należy do zbioru A , czyli x jest elementem zbioru A uznajemy za powszechnie zrozumiały.

W tym sensie pojęcie należenia elementu do zbioru uznajemy za pierwotne.

Powszechnie używa się zapisu $x \in A$, co oznacza, x należy do A .

Pojęcie inkluzji — definicja

W oparciu o pierwotne pojęcie należenia do zbioru i pojęcie implikacji określamy pojęcie zawierania się zbiorów, czyli inkluzji zbiorów.

Definicja

Zbiór A **jest zawarty** w zbiorze B , co oznaczamy $A \subset B$ w.t.w. gdy prawdą jest, że

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Zbiór A zawarty w zbiorze B nazywamy jego podzbiorem.

W szczególności każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem.

Taki podzbiór, który jest różny od całego zbioru nazywamy **podzbiorem właściwym**.

Nawiasy klamrowe $\{$ oraz $\}$ oznaczają w zapisie początek i koniec listy elementów danego zbioru.

Niech A będzie zbiorem dwóch elementów $A = \{a, b\}$.

Zbiór którego jedynym elementem jest a , czyli $\{a\}$ jest zawarty w zbiorze A , co zapisujemy jako

$$\{a\} \subset A.$$

Zbiór pusty

Zbiór pusty, to taki zbiór, który nie zawiera żadnych elementów.

Oznaczamy go symbolem $\emptyset$

Z definicji implikacji wynika, że dla dowolnego zbioru A

$$\emptyset \subset A.$$

Z punktu widzenia matematyki jest niepoprawne stwierdzenie, że liczba 2 zawiera się w zbiorze liczb parzystych. Powiemy poprawnie, że liczba 2 **należy** do zbioru liczb parzystych. Natomiast zbiór, którego jedynym elementem jest liczba 2, czyli $\{2\}$ **jest zawarty** w zbiorze liczb parzystych.

Zbiór wszystkich podzbiorów

Przykład zbioru wszystkich podzbiorów $\mathcal{P}(A)$ zbioru dwuelementowego $A = \{a, b\}$;

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}.$$

Elementami tego zbioru są wszystkie zbiory zawarte w A . Pamiętajmy, że

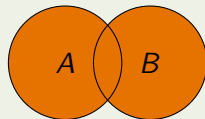
jeśli $a \in A$ to $\{a\} \subset A$ i $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

Działanie na zbiorach: suma i iloczyn zbiorów

1. Suma zbiorów

Sumą zbioru A i zbioru B nazywa się zbiór oznaczany jako $A \cup B$, który składa się z tych elementów, które należą do zbioru A **lub** do zbioru B , co zapisujemy następująco:

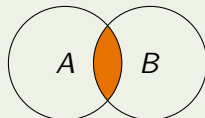
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B).$$



2. Przecięcie zbiorów (inaczej część wspólna albo iloczyn zbiorów)

Przecięciem (iloczynem, częścią wspólną) zbiorów A i B nazywa się zbiór oznaczany jako $A \cap B$, który składa się z tych elementów, które należą do zbioru A **i** do zbioru B , co zapisujemy następująco:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B).$$

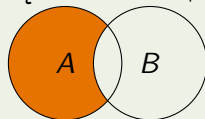


Działanie na zbiorach

3. Różnica zbiorów

Dla danych zbiorów A i B różnicą zbiorów oznaczaną jako $A \setminus B$ jest zbiór tych wszystkich elementów ze zbioru A , które nie należą do zbioru B , czyli

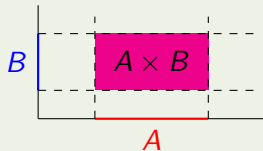
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$$



4. Produkt kartezjański zbiorów (iloczyn kartezjański zbiorów)

Dla dowolnych dwóch zbiorów A i B istnieje zbiór wszystkich uporządkowanych par, oznaczany $A \times B$, który nazywa się produktem kartezjańskim lub iloczynem kartezjańskim zbiorów,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$



Co to jest funkcja?

Definicja

Funkcją f określoną na zbiorze X o wartościach w Y nazywamy przyporządkowanie dowolnemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y = f(x) \in Y$.

Zbiór X nazywamy **dziedziną** lub **zbiorem argumentów funkcji**, a element $y \in Y$ wartością funkcji.

Zbiór wszystkich w ten sposób przyporządkowanych elementów y to **obraz zbioru X** lub zbiór wartości funkcji, który jest podzbiorem zbioru Y .

Notacja

Określając funkcję f zwykle piszemy

$$f : X \mapsto Y, \quad y = f(x).$$

Można również napisać

$$X \xrightarrow{f} Y, \quad y = f(x)$$

lub nawet

$$X \ni x \mapsto y = f(x) \in Y.$$

Mamy sporo dowolności przy wyborze notacji, najważniejsze by pamiętać zawsze o sprecyzowaniu dziedziny funkcji i zbioru, w którym przyjmuje ona wartości.

Niesprecyzowanie dziedziny funkcji prowadzić zwykle do nieporozumień.

Złożenie funkcji

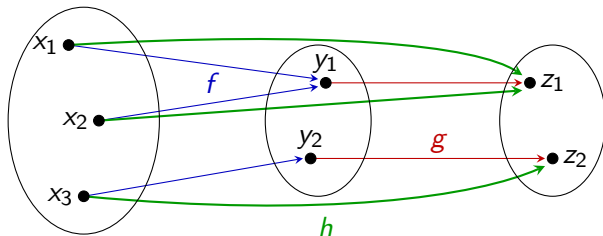
Definicja (złożenie lub inaczej superpozycja dwóch funkcji)

Niech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$. Funkcję, która każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowuje dokładnie jeden element $z \in Z$, taki że $z = g(f(x))$ nazywamy **superpozycją (złożeniem)** funkcji f i g .

Wyznaczona jest nowa funkcja, którą oznaczmy przez h

$$h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

Stosuje się zapis: $h = g \circ f$ czyli $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

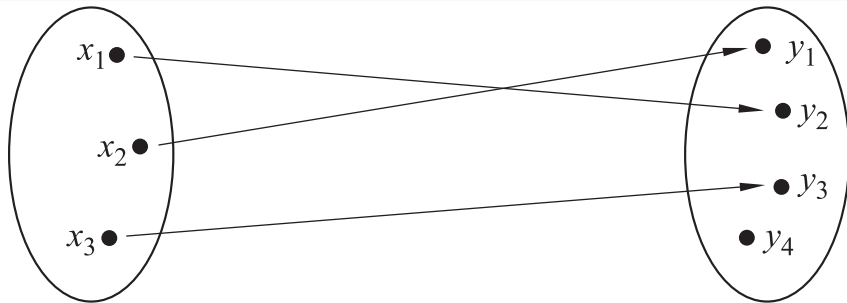


Funkcja różnowartościowa (iniekcja)

Definicja

Funkcję $f: X \mapsto Y$ nazywamy **funkcją różnowartościową (iniekcją)**, jeżeli

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$



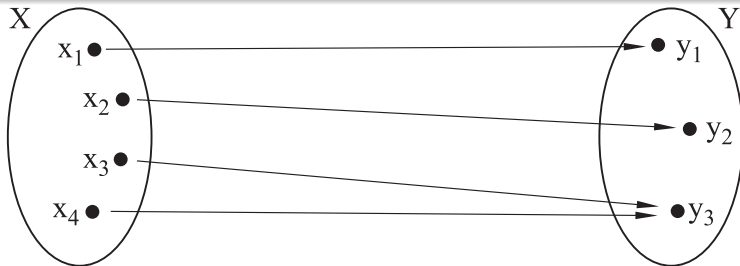
Przykład iniekcji dla zbiorów skończonych.

Definicja surjekcji (funkcji „na”)

Definicja

Funkcję $f: X \mapsto Y$ nazywamy **surjekcją (funkcją „na”)**, jeżeli

$$\forall y \in Y \exists x \in X \quad f(x) = y.$$



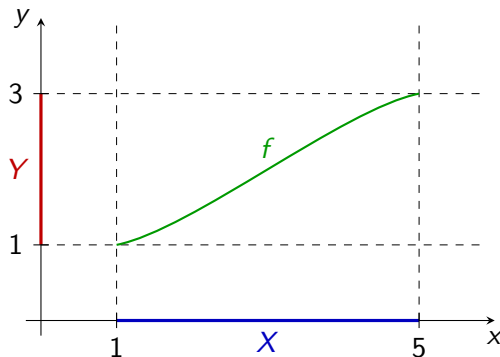
Przykład

Przyporządkowanie każdej osobie w Polsce numeru miesiąca, w którym się urodziła nie jest iniekcją, ale jest surjekcją.

Definicja bijekcji

Definicja

Funkcja $f: X \mapsto Y$, która jest iniekcją i surjekcją, a więc przekształca zbiór X na zbiór Y wzajemnie jednoznacznie, nazywa się **bijekcją**.



Funkcja odwrotna

Niech $f: A \rightarrow B$.

Definicja

Powiemy, że funkcja g jest **funkcją odwrotną** do funkcji f (oznaczamy $g = f^{-1}$) w.t.w.

$$g: B \rightarrow A \quad \text{oraz} \quad \forall x \in A \quad \text{zachodzi} \quad g(f(x)) = x.$$

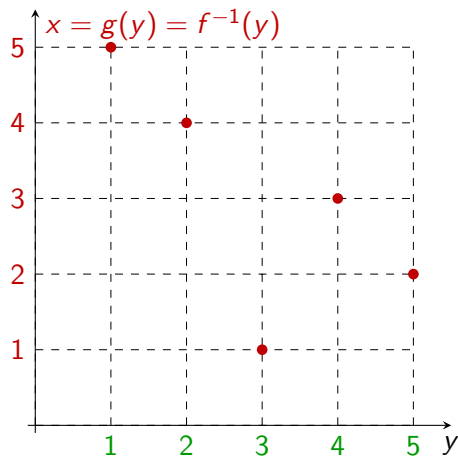
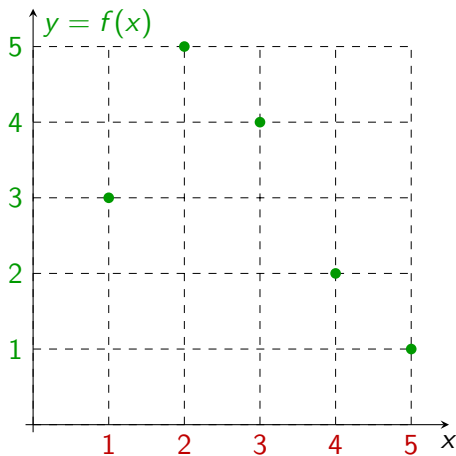
Stwierdzenie

Jeżeli $f: A \rightarrow B$ jest bijekcją, to istnieje funkcja odwrotna do f określona na całym zbiorze B .

Stwierdzenie

Każda funkcja różnowartościowa $f: A \rightarrow B$ jest bijekcją z A na zbiór swoich wartości $f(A)$.

Funkcja odwrotna



Liczby całkowite

Przyjmujemy, że wszyscy pamiętamy podstawowe fakty o zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. W wyniku odejmowania i dzielenia, tylko dla niektórych liczb naturalnych otrzymamy również liczbę naturalną.

Odejmowanie „powstaje”, gdy chcemy rozwiązać równanie $x + n = m$ i znaleźć niewiadomą x . Mamy $x = m - n$.

Wykonywalność odejmowania prowadzi do zbioru liczb całkowitych.

Liczby całkowite oznaczamy przez $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Liczby wymierne

Wykonywalność dzielenia wśród liczb całkowitych prowadzi do liczb wymiernych.

Szukając rozwiązania równania z niewiadomą x , $qx = p$, gdzie p i q to liczby całkowite, dostajemy liczbę ułamkową $x = \frac{p}{q}$, o ile $q \neq 0$.

Każdy ułamek można doprowadzić do postaci nieskracalnej, tzn. takiej, dla której nie istnieje liczba całkowita większa od 1, będąca wspólnym dzielnikiem licznika i mianownika.

Każde dwa ułamki, które można doprowadzić do tej samej postaci nieskracalnej wyznaczają tę samą liczbę, np. $\frac{8}{16} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Zbiór wszystkich takich liczb nazywamy zbiorem **liczb wymiernych** i oznaczamy przez $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Liczby całkowite a wymierne

Następująca własność odróżnia liczby wymierne od całkowitych

Twierdzenie

Dla dwóch różnych liczb wymiernych a i b istnieje liczba wymierna c , taka że $a < c < b$.

Na przykład: $c = \frac{a + b}{2}.$

Liczby rzeczywiste

Ścisłe zdefiniowanie **liczb rzeczywistych**, $\mathbb{R}$, stanowiło problem przez dziesięciolecia. W zbiorze liczb $\mathbb{R}$ są liczby wymierne ale wiadomo, że są liczby, które nie są wymierne np.:

- $\sqrt{2}$ — długość przekątnej kwadratu o boku 1
- π — połowa obwodu okręgu o promieniu 1.

Zbiór liczb rzeczywistych najlepiej charakteryzuje **aksjomat ciągłości**. Zamiast precyzyjnego sformułowania ograniczymy się do interpretacji.

Aksjomat ciągłości mówi, że zbiór liczb rzeczywistych, który nazywa się także osią liczbową, jest ciągły w tym sensie, że nie ma w nim luk — każdemu punktowi na osi odpowiada jakaś liczba rzeczywista i odwrotnie.

Definicja

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych leżących na osi liczbowej pomiędzy dwoma zadanymi liczbami nazywamy **odcinkiem**.

na przykład $(2, 3)$ oznacza odcinek z wyłączonymi końcami 2 i 3, a $[2, 3]$ oznacza odcinek wraz z końcami.

Definicja

Dla każdej pary liczb rzeczywistych $a \leq b$ oznaczamy

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Zauważmy, że jeśli $a = b$, to wówczas: $(a, b) = \emptyset$ oraz $[a, b] = \{a\} = \{b\}$.

Liczby zespolone- motywacja

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ rozszerzamy o kolejne elementy (liczby) aby móc rozwiązywać pewne równania.

- $x + 5 = 2$ daje $x = -3$, czyli liczbę ujemną $\implies$ otrzymujemy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.
- $2x = 3$ daje $x = 3/2$, czyli liczbę wymierną $\implies$ otrzymujemy zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.
- $x^2 = 2$ daje $x = \sqrt{2}$, czyli liczbę niewymierną $\implies$ otrzymujemy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.
- Określenie rozwiązań równania $x^2 = -1$ prowadzi do zbioru liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Zbiór **liczb zespolonych** pełni bardzo ważną rolę zarówno w samej matematyce jak i w fizyce. Liczby zespolone mają podstawowe znaczenie w mechanice kwantowej, teorii fizycznej, która służy do opisu przebiegu reakcji chemicznych.

Istnienie liczb zespolonych jako rozwiązań równań wielomianowych zaakceptowano już w XVI w. W zbiorze tym można zdefiniować dodawanie mnożenie oraz dzielenie i dlatego rzeczywiście elementy tego zbioru zasługują na miano liczb. Liczby zespolone stanowią naturalne rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych.

Definicja liczb zespolonych

Zdefiniujmy jako i rozwiązanie równania $x^2 = -1$, tzn.

$$i^2 = -1. \quad (\spadesuit)$$

Ze względów historycznych to rozwiązanie nazywa się jednostką urojoną. Termin liczby urojone (łac. *imaginaris*) zawdzięczamy Kartezjuszowi (1637), który chciał w ten sposób zaakcentować ich „nierzeczywistość” i absurdalność w odróżnieniu od dobrze znanych liczb „istniejących w rzeczywistości” (rzeczywistych, łac. *realis*).

Zbiór liczb zespolonych

Zbiór liczb **zespolonych** określa się jako zbiór uporządkowanych par liczb rzeczywistych

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

wraz z odpowiednio zdefiniowanymi działaniami dodawania i mnożenia. Ze względu na pożądane własności arytmetyczne i tradycję parę (x, y) zapisuje się jako $x + yi$.

Dzięki takiemu zapisowi łatwo wykonuje się dodawanie, mnożenie i dzielenie liczb zespolonych zdefiniowane tak, aby spełnione było równanie ($\spadesuit$) oraz by w odniesieniu do liczb rzeczywistych (czyli jeśli $y = 0$) działania te miały zwykły sens.

Oznaczając przez $\oplus$ dodawanie liczb zespolonych i przez $\otimes$ mnożenie mamy

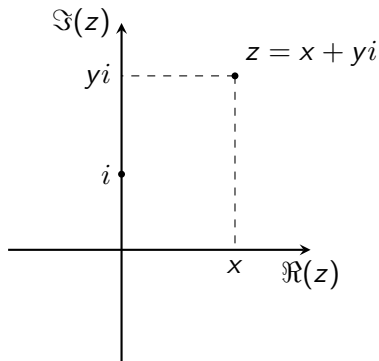
$$\begin{aligned}(x + yi) \oplus (z + wi) &= x + z + (y + w)i, \\ (x + yi) \otimes (z + wi) &= xz - yw + (xw + yz)i.\end{aligned}$$

Ostatnia równość jest konsekwencją konwencji, w myśl której wyrażenia zawierające liczby zespolone przekształcamy w zgodzie z regułami zwykłej arytmetyki liczb rzeczywistych wzbogaconej o relację $i^2 = -1$.

$$(x + yi) \otimes (z + wi) = xz + xwi + yzi + ywi^2 = xz - yw + (xw + yz)i.$$

Dla liczb rzeczywistych, tzn. gdy powyżej $y = 0$ oraz $w = 0$, otrzymujemy zwykłe mnożenie.

Interpretacja geometryczna i równanie kwadratowe



Równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\diamond)$$

ma dwa różne pierwiastki
rzeczywiste, o ile wyróżnik

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

spełnia warunek $\Delta > 0$ oraz jeden pierwiastek podwójny, jeśli $\Delta = 0$. Oba pierwiastki x_+ i x_- oraz pierwiastek podwójny dane są wzorem

$$x_{+,-} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (\clubsuit)$$

Gdy $\Delta < 0$ równanie ($\diamond$) ma również dwa pierwiastki, które są liczbami **zespolonymi** zadanymi tym samym wzorem ($\clubsuit$).

Liczyby zespolone są pierwiastkami wielomianów

Wyliczając pierwiastki zespolone trzeba jedynie uwzględnić, że pierwiastkami z liczby ujemnej a są dwie liczby zespolone $\sqrt{|a|}i$ oraz $-\sqrt{|a|}i$ — skoro $a = (-1)|a|$, to $(\sqrt{|a|}i)^2 = (-\sqrt{|a|}i)^2 = a$.

Można sprawdzić ($\longrightarrow$ ćwiczenia), że równanie kwadratowe

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

ma wyróżnik

$$\Delta = -4 \implies \sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = 2i$$

oraz dwa pierwiastki

$$x_- = 1 - i \quad \text{ i } \quad x_+ = 1 + i.$$