

Porządki dobrze ufundowane

Zadanie ma na celu dowiedzenie pewnych własności rozszerzenia leksykograficznego danej relacji. Ewentualną kontynuacją byłoby zdefiniowanie rozszerzenia multizbiorowego i dowiedzenie dla niego podobnych własności.

Używane będzie pojęcie „pięknej relacji”, zdefiniowane następująco:

Relacja $ltA \in A \times A$ jest *piękna*, jeśli z każdego nieskończonego ciągu $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ można wybrać parę indeksów $i < j$ t.ż. $(ltA a_i a_j)$ lub $a_i = a_j$.

Alternatywna (równoważna) własność definiująca piękność relacji to: z każdego nieskończonego ciągu $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ można wybrać podciąg $\{a_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ t.ż. dla każdego j zachodzi $(ltA a_{i_j} a_{i_{j+1}})$ lub $a_{i_j} = a_{i_{j+1}}$.

Państwa zadaniem będzie:

1. obejrzenie i zrozumienie definicji rozszerzenia leksykograficznego danej relacji ltA na zbiorze A na listy elementów z A (Definicja `Lt1` jest w pliku `theories/Relations/Relation_Operators.v` i używa `leA` jako nazwy rozszerzanej relacji. Jednak nazwa `ltA` wydaje się sensowniejsza.¹)
2. zdefiniowanie `Ltlen` – ograniczenia `Lt1` do list o równej długości
3. dowiedzenie, że jeśli ltA jest dobrze ufundowane (definicja `well_founded` w pliku `theories/Init/Wf.v`), to `Ltlen` też jest dobrze ufundowane
4. zdefiniowanie pojęcia “bycia ostrym porządkiem” (chodzi o zdefiniowanie własności, które ostry porządek musi spełniać – w stylu definicji z pliku `theories/Relations/Relation_Definitions.v`)
5. dowiedzenie, że jeśli ltA jest ostrym porządkiem, to `Lt1` i `Ltlen` też są ostrymi porządkami
6. zdefiniowanie pięknej relacji
7. dowiedzenie, że każde rozszerzenie (w sensie zawierania relacji) pięknej relacji jest piękną relacją

¹le – “less or equal”, lt – “less than” – rozszerzanie leksykograficzne relacji “nieostrej” nie wydaje się być sensowne

8. dowiedzenie, że rozszerzenie leksykograficzne z ograniczoną długością
L₁ ⊆ L₂ pięknej relacji jest piękną relacją
9. (*)dowiedzenie, że każda piękna relacja jest dobrze ufundowana

Jacek Chrzęszcz, 11 kwietnia 2002

ostatnia zmiana: 23 maja 2002