

Zadania z gwiazdką

Seria I o językach regularnych

1. **Wieloznaczność.** Powiemy, że automat ma *wieloznaczność wielomianową*, jeśli istnieje wielomian $p(n)$ taki, że dla każdego słowa długości n , automat ma co najwyżej $p(n)$ biegów akceptujących. Zaprojektować algorytm, który rozstrzyga, czy dany na wejściu automat ma wieloznaczność wielomianową.
2. **Dodawanie liter.** Język $L \subseteq A^*$ nazwiemy *zamkniętym na dodawanie liter*, jeśli dla dowolnych $w, v \in A^*$ i $a \in A$ spełnia

$$wv \in L \Rightarrow wav \in L$$

Pokazać, że każdy język zamknięty na dodawanie liter jest regularny.

3. **Tylko operacje boolowskie.** Rozważmy najmniejszą klasę \mathcal{X} języków, która zawiera języki skończone, oraz jest zamknięta na operacje sumy $L \cup K$, konkatenacji $L \cdot K$ i dopełnienia $A^* - L$. Rozważmy alfabet Π_n będący zbiorem permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$. Dla jakich n język klasa \mathcal{X} zawiera język

$$L_n = \{\pi_1 \cdots \pi_k \in (\Pi_n)^* : \text{złożenie } \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k \text{ jest identycznością.}\}?$$

4. **Przepisywanie.** Ustalmy skończony zbiór par słów $X \subseteq A^* \times A^*$. Powiemy, że słowo w można przepisać prefiksowo w jednym kroku w słowo v , co oznaczamy $w \rightarrow v$, jeśli

$$w = xu, v = yu \quad \text{dla pewnych } (x, y) \in X \text{ oraz } u \in A^* .$$

Niech \rightarrow^* domknięcie przechodnio-zwrotne relacji \rightarrow . Pokazać, że jeśli $L \subseteq A^*$ jest regularny, to $\{w : v \rightarrow^* w \text{ dla pewnego } v \in L\}$ też.

5. **Automat licznikowy.** Rozważmy skończony zbiór liczników C o wartościach całkowitych (niekoniecznie dodatnich), oraz instrukcje licznikowe

$$I_C = \{“c := c + k” : c \in C, k \in \mathbb{Z}\} .$$

Rozważmy automat deterministyczny o stanach Q , stanie początkowym q_I , stanach końcowych $F \subseteq Q$, oraz przejściach wyposażonych w ciągi instrukcji licznikowych: $\{\delta_a : Q \rightarrow Q \times I_C^*\}_{a \in A}$. Automat zaczyna czytać słowo w stanie q_I z pustymi licznikami (o wartościach 0). Akceptuje słowo, jeśli skończy w stanie z F z pustymi licznikami. Wskazać algorytm, który rozstrzyga, czy automat akceptuje przynajmniej jedno słowo.