Termin 19 grudnia do północy. Za każde zadanie jest 0.5 punktu ocenowego.

1. Wskazać skończenie generowany ale nieskończony monoid, w którym zachodzi równanie $mm = mmm$.

2. Dla języka $L \subseteq A^*$ definiujemy jego pierwiastek jako

$$\sqrt{L} = \{w : ww \in L\}.$$

   Pokazać, że klasa FO języków definiowalnych w logice pierwszego rzędu spełnia

$$FO = \{\sqrt{L} : L \in FO\}.$$

3. Dla $i = 0, 1$ niech L_i oznacza zbiór wyrażeń nad alfabetem $\{0, 1, \vee, \wedge, (,)\}$ które są poprawnie ponawiasowane i mają wartość i. Pokazać, że nie istnieje język regularny L taki że

$$L_1 \subseteq L \qquad L_0 \cap L = \emptyset.$$

4. Niech $g_k(n)$ oznacza rozmiar największego monoidu syntaktycznego języka nad alfabetem k-literowym, który jest rozpoznawany przez deterministyczny automat o n stanach. Znaleźć rząd wielkości funkcji

$$n \mapsto \log(g_k(n))$$

   w zależności od parametru k.

5. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, ale dla automatów niedeterministycznych.

Termin 9 stycznia do północy. Za każde zadanie jest 0.5 punktu ocenowego.

1. Rozważmy alfabet urangowany, gdzie jest litera a dwuargumentowa i litera b zeroargumentowa. Jeśli x jest liściem w drzewie, to $\pi(x) \in \{0,1\}^*$ jest słowem, które mówi jak należy skręcać na ścieżce od korzenia do x, gdzie 0 to pójście do lewego syna a 1 to pójście do prawego syna. Rozważmy homomorfizm

$$\alpha : \{0,1\}^* \to G$$

w grupę skończoną G, oraz element $g \in G$. Czy dla każdych α, G, g następujący język drzew jest definiowalny w FO?

$$L_g^\forall = \{t : \text{ dla każdego liścia } x \text{ w drzewie } t \text{ zachodzi } \alpha(\pi(x)) = g\}$$

2. Podobnie jak w powyższym zadaniu, ale dla języka

$$L_g^\exists = \{t : \text{ dla pewnego liścia } x \text{ w drzewie } t \text{ zachodzi } \alpha(\pi(x)) = g\}$$