Zbiór zadań z Układów Dynamicznych

Krzysztof Barański Michał Krych Anna Zdunik

9 października 2017

Spis treści

Rozdział 1

Punkty okresowe, zbiory graniczne, sprzężenia

Definicje i twierdzenia

Definicja 1.1. Niech X będzie zbiorem, a $f : X \to X$ odwzorowaniem.
Złożenie $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ razy}}$ nazywamy n-tą *iteracją* przekształcenia f.

Orbitą lub *trajektorią* (w przód) punktu $x \in X$ nazywamy zbiór $\mathrm{Orb}_+(x) := \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, ...\}$. Jeśli f jest odwracalne, to zbiór $\mathrm{Orb}(x) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy *pełną orbitą* lub *trajektorią* punktu x.

Definicja 1.2. Niech X będzie zbiorem, a $f : X \to X$ odwzorowaniem.
Punkt $x \in X$ nazywamy *okresowym* o *okresie* $p \in \mathbb{N}$, jeśli $f^p(x) = x$. Najmniejszą taką liczbę p nazywamy *okresem podstawowym* punktu x.
Punkt $x \in X$ nazywamy *preokresowym*, jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $f^k(x)$ jest okresowy.
Orbitę punktu *pre*(*okresowego*) nazywamy *orbitą pre*(*okresową*).
Zbiór wszystkich punktów okresowych przekształcenia f oznaczamy przez $\mathrm{Per}(f)$.

Definicja 1.3. Niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem przestrzeni topologicznej X.
Zbiorem ω-granicznym punktu $x \in X$ nazywamy zbiór

$$\omega(x) = \left\{ y \in X : \text{ istnieje ciąg } n_k \to +\infty \text{ taki, że } \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y \right\}.$$

Zbiorem α-granicznym punktu $x \in X$ nazywamy zbiór

$$\alpha(x) = \left\{ y \in X : \text{ istnieje ciąg } n_k \to -\infty \text{ taki, że } \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y \right\}.$$

Definicja 1.4. Niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem przestrzeni topologicznej X. Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem błądzącym*, gdy istnieje takie jego otoczenie otwarte U, że dla dowolnego $n > 0$ zachodzi $U \cap f^n(U) = \emptyset$. Punkt x nazywamy punktem niebłądzącym, gdy nie jest on błądzący. Zbiór wszystkich punktów niebłądzących odwzorowania f oznaczamy przez $\Omega(f)$.

Definicja 1.5. Niech $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ będą przekształceniami przestrzeni topologicznych X, Y.

Mówimy, że przekształcenia f i g są *topologicznie półsprzężone*, jeśli istnieje przekształcenie $h : X \to Y$ (*półsprzężenie topologiczne*), które jest ciągłe, surjektywne i takie, że diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \big\downarrow h & & \big\downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

komutuje, tzn. $h \circ f = g \circ h$. Mówi się także wtedy, że g jest *faktorem* f.

Mówimy, że przekształcenia f i g są *topologicznie sprzężone*, jeśli przekształcenie h jest dodatkowo homeomorfizmem. Przekształcenie h nazywa się wtedy *sprzężeniem topologicznym.*

Definicja 1.6. Niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem przestrzeni topologicznej X.

Zbiór $Y \subset X$ nazywamy niezmienniczym, gdy $f(Y) \subset Y$ oraz minimalnym, gdy jest niezmienniczy oraz nie zawiera właściwego, niepustego podzbioru niezmienniczego. Przekształcenie f nazywamy *minimalnym*, gdy X jest zbiorem minimalnym.

Definicja 1.7. Niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem przestrzeni topologicznej X.

Przekształcenie f nazywamy *topologicznie tranzytywnym*, gdy dla dowolnych niepustych podzbiorów otwartych $U, V \subset X$ istnieje $n \geqslant 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Przekształcenie f nazywamy *punktowo tranzytywnym*, gdy istnieje $x \in X$ takie, że orbita punktu x jest gęsta w X.

Definicja 1.8. Niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem przestrzeni topologicznej X.

Przekształcenie f nazywamy *topologicznie mieszającym*, gdy dla dowolnych niepustych podzbiorów otwartych $U, V \subset X$ istnieje $N \geqslant 0$ takie, że dla każdego $n \geqslant N$ zachodzi $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definicja 1.9. Niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem przestrzeni metrycznej (X, d).

Przekształcenie f nazywamy *ekspansywnym* (w przód), gdy istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdej pary punktów $x, y \in X$, $x \neq y$, można znaleźć $n \geqslant 0$ takie, że $d(f^n(x), f^n(y)) \geqslant \varepsilon$.

Definicja 1.10. Porządkiem Szarkowskiego na $\mathbb{N}$ nazywamy następujący porządek:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec ... \prec 2{\cdot}3 \prec 2{\cdot}5 \prec 2{\cdot}7 ... \prec 2^n{\cdot}3 \prec 2^n{\cdot}5 \prec 2^n{\cdot}7 \prec ... \prec 2^m \prec 2^{m-1} \prec ... \prec 4 \prec 2 \prec 1.$$

Twierdzenie 1.1 (Szarkowski)**.** Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie odcinkiem domkniętym, zaś $f : I \to I$ odwzorowaniem ciągłym. Niech $p, q \in \mathbb{N}$ będą takie, że $p \prec q$. Jeśli f posiada punkt okresowy o okresie podstawowym p, to posiada także punkt okresowy o okresie podstawowym q.

Definicja 1.11. Niech $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ (czyli A jest macierzą wymiaru $n \times n$ o wyrazach całkowitych) będzie taka, że $\det(A) = \pm 1$. Wówczas A rzutuje się do odwzorowania $\varphi_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ ($\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ jest torusem n-wymiarowym) takiego, że $\pi \circ A = \varphi_A \circ \pi$, gdzie π jest naturalnym rzutowaniem $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ (tzn. $\pi(x_1, ..., x_n) = (x_n \mod 1, ..., x_n \mod 1)$). Odwzorwanie φ_A nazywamy *algebraicznym automorfizmem torusa* indukowanym przez A.

Definicja 1.12. *(Jednostonną) przestrzenią symbolową* nazywamy zbiór $\Sigma_\infty^+ = \prod_{i=0}^{\infty}\{0,1\}$, zaś *dwustronną przestrzenią symbolową* nazywamy zbiór $\Sigma_\infty = \prod_{i=-\infty}^{\infty}\{0,1\}$. Oba z nich rozpatrzmy z topologią produktową, wyznaczoną przez dyskretną topologię w $\{0,1\}$. Otrzymujemy w ten sposób zwarte przestrzenie metryzowalne (por. zad. 54 oraz 55). *Przesunięciem w lewo* nazywamy odwzorowanie $\sigma : \Sigma_\infty^+ \to \Sigma_\infty^+$ zadane jako

$$(\sigma(\mathbf{s}))_i = s_{i+1} \quad \text{dla} \quad \mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots).$$

Tak samo, *przesunięciem w lewo* nazywamy odwzorowanie $\sigma : \Sigma_\infty \to \Sigma_\infty$ zadane jako

$$(\sigma(\mathbf{s}))_i = s_{i+1} \quad \text{dla} \quad \mathbf{s} = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots).$$

Przejdziemy teraz do układów z czasem ciągłym, czyli tzw. potoków.

Definicja 1.13. Niech X będzie zbiorem. *Potokiem* na X nazywamy rodzinę odwzorowań $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$, $\varphi_t : X \to X$ będąca półgrupą ze względu na składanie odwzorowań, tzn. spełniającą $\varphi_0 = Id$ oraz $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$ dla dowolnych $s, t \geqslant 0$. Jeżeli wszystkie odwzorowania są odwracalne, to potok nazywamy odwracalnym i możemy rozszerzyć go do grupy $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ zadając $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$.

Dla ustalonego $t_0 \geqslant 0$, odwzorowanie φ_{t_0} nazywamy *odwzorowaniem po czasie* t_0.

Definicja 1.14. Niech $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie potokiem na zbiorze X.

Orbitą lub *trajektorią* (w przód) punktu $x \in X$ nazywamy zbiór $\mathrm{Orb}_+(x) := \{\varphi_t(x) : t \geqslant 0\}$. Jeśli potok jest odwracalny, to zbiór $\mathrm{Orb}(x) := \{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ nazwamy *pełną orbitą* lub *trajektorią* punktu x.

Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem stałym* potoku, jeśli $\varphi_t(x) = x$ dla wszystkich $t > 0$.

Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem okresowym* potoku, jeśli istnieje $t_0 > 0$ takie, że $\varphi_{t_0}(x) = x$. Mówimy wówczas również, że orbita $\mathrm{Orb}(x)$ jest orbitą zamkniętą. Najmniejsze takie dodatnie t_0 (o ile istnieje) nazywamy okresem podstawowym punktu x (orbity $\mathrm{Orb}(x)$).

Definicja 1.15. Niech $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie potokiem na przestrzeni topologicznej X.

Zbiorem ω-granicznym punktu $x \in X$ nazywamy zbiór

$$\omega(x) = \left\{ y \in X : \text{ istnieje ciąg } t_n \to +\infty \text{ taki, że } \lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(x) = y \right\}.$$

Zbiorem α-granicznym punktu $x \in X$ nazywamy zbiór

$$\alpha(x) = \left\{ y \in X : \text{ istnieje ciąg } t_n \to -\infty \text{ taki, że } \lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(x) = y \right\}.$$

Definicja 1.16. Niech $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie potokiem na przestrzeni topologicznej X. Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem błądzącym*, gdy istnieje takie jego otoczenie otwarte U oraz $t_0 > 0$ takie, że dla dowolnego $t \geqslant t_0$ zachodzi $U \cap \varphi_t(U) = \emptyset$. Punkt x nazywamy punktem niebłądzącym, gdy nie jest on błądzący. Zbiór wszystkich punktów niebłądzących potoku $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ oznaczamy przez $\Omega(\{\varphi_t\})$.

Definicja 1.17. Niech $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie potokiem na przestrzeni topologicznej X, a $\{\psi_t\}_{t\geqslant 0}$ potokiem na przestrzeni topologicznej Y.

Mówimy, że potoki $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ oraz $\{\psi_t\}_{t\geqslant 0}$ są *topologicznie półsprzężone*, jeśli istnieje przekształcenie $h : X \to Y$ (*półsprzężenie topologiczne*), które jest ciągłe, surjektywne i takie, że diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_t} & X \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow h \\ Y & \xrightarrow{\psi_t} & Y \end{array}$$

komutuje dla dowolnego $t \geqslant 0$, tzn. $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$. Mówi się także wtedy, że $\{\psi_t\}_{t\geqslant 0}$ jest *faktorem* $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$.

Mówimy, że potoki $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ oraz $\{\psi_t\}_{t\geqslant 0}$ są *topologicznie sprzężone*, jeśli przekształcenie h jest dodatkowo homeomorfizmem. Przekształcenie h nazywa się wtedy *sprzężeniem topologicznym*.

Mówimy, że potoki $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ oraz $\{\psi_t\}_{t\geqslant 0}$ są *topologicznie równoważne*, jeśli istnieje homeomorfizm $h : X \to Y$ oraz ciągłe i ściśle rosnące przekształcenie $\tau : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takie, że dla dowolnego $t \geqslant 0$ zachodzi $h \circ \varphi_t = \psi_{\tau(t)} \circ h$ (oznacza to, że orbity potoków są homeomorficzne z zachowaniem orientacji, ale przeskalowaniem czasu).

Definicja 1.18. Niech $\{\varphi_t\}$ będzie potokiem na przestrzeni topologicznej X. Całką pierwszą potoku nazywamy funkcję ciągłą $f : X \to \mathbb{R}$ stałą na trajektoriach, tzn. taką, że dla dowolnego t oraz $x \in X$ zachodzi $f(x) = f(\varphi_t(x))$.

Zadania

Zadanie 1. Pokazać, że trajektoria w przód punktu x w przestrzeni metrycznej X pod działaniem ciągłego przekształcenia $f : X \to X$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy x jest preokresowy.

Zadanie 2. Niech X przestrzeń metryczna i $f : X \to X$ homeomorfizm. Pokazać, że jeśli trajektoria w przód punktu $x \in X$ jest zbiorem zwartym, to punkt x jest okresowy.

Zadanie 3. Pokazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłe i każdy punkt jest okresowy, to f^2 jest identycznością.

Zadanie 4. Pokazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i prawie każdy punkt (względem miary Lebesgue'a) jest okresowy, to f^2 jest identycznością.

Zadanie 5. Podać przykład takiego homeomorfizmu $f\colon X \to X$ zwartej przestrzeni metrycznej (X, d), że dla dowolnych $x, y \in X$

$$d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \quad \text{dla } n \to \infty.$$

Zadanie 6. Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie przekształceniem ciągłym.

(a) (Twierdzenie Li-Yorke'a) Wykazać, że jeśli f ma orbitę okresową o okresie 3, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje orbita okresowa o okresie podstawowym n

(b) Wykazać, że jeśli f ma orbitę o okresie 4 taką, że $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, gdzie $f(x_i) = x_{i+1}$ dla $i = 1, 2, 3$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje orbita okresowa o okresie podstawowym n.

Zadanie 7. Skonstruować przekształcenie ciągłe $f : [0,1] \to [0,1]$ o tej własności, że f ma orbity okresowe o wszystkich okresach podstawowych $n \in \mathbb{N}$ poza okresem 3.

Zadanie 8. Rozpatrzmy przekształcenie, $F\colon [0,1] \to [0,1]$, którego wykres jest „namiotem", tzn.

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2 - 2x & \text{dla } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Wykazać, że punkt $x \in [0,1]$ jest preokresowy wtedy i tylko wtedy gdy $x \in \mathbb{Q}$. Wykazać, że x jest okresowy wtedy i tylko wtedy, gdy x jest postaci $\frac{2k}{p}$, gdzie k jest liczbą naturalną, a p jest liczbą naturalną nieparzystą.

Zadanie 9. Określamy funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$ wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{dla } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Wykazać, że f ma orbity okresowe o wszystkich okresach podstawowych $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 10. Określamy funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$ wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } 0 \leqslant x < \frac{1}{3}, \\ \frac{2}{3} & \text{dla } \frac{1}{3} \leqslant x < \frac{2}{3}, \\ 2 - 2x & \text{dla } \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Wykazać, że f ma punkt stały, ale nie ma orbit okresowych o wyższych okresach podstawowych.

Zadanie 11. Określamy funkcję $f\colon [0,1] \to [0,1]$ wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } 0 \leqslant x < \frac{2}{5}, \\ \frac{4}{5} & \text{dla } \frac{2}{5} \leqslant x < \frac{3}{5}, \\ 2 - 2x & \text{dla } \frac{3}{5} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Wykazać, że f ma punkt stały: $\frac{2}{3} \mapsto \frac{2}{3}$ oraz orbitę o okresie 2: $\frac{2}{5} \mapsto \frac{4}{5} \mapsto \frac{2}{5}$, ale nie ma orbit okresowych o wyższych okresach.

Zadanie 12. Weźmy $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ (czyli A jest macierzą wymiaru $n\times n$ o wyrazach całkowitych). Pokazać, że istnieje gładkie odwzrowanie $\varphi_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ ($\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^2$ jest torusem n-wymiarowym) takie, że $\pi \circ A = \varphi_A \circ \pi$, gdzie π jest naturalnym rzutowaniem $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ (tzn. $\pi(x_1, ..., x_n) = (x_n \mod 1, ..., x_n \mod 1)$). Pokazać, że jeśli $\det(A) = \pm 1$, to φ_A jest odwracalne.

Zadanie 13. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (2x+y, x+y)$. Sprawdzić, że F rzutuje się na dyfeomorizm f torusa $\mathbb{T}^2$. Wyznaczyć $\mathrm{Per}(f)$.

Zadanie 14. (Uogólnienie poprzedniego zadania) Niech A będzie macierzą wymiaru 2×2 o wyrazach całkowitych i taką, że $\det(A) = \pm 1$. Pokazać, że jeśli A nie posiada wartości własnych będących pierwiastkami z jedności, to $\mathrm{Per}(\varphi_A) = (\mathbb{Q} \cap [0,1))^2$.

Zadanie 15. Niech
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}.$$
Niech φ_A będzie przekształceniem dwuwymiarowego torusa $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ indukowanym przez macierz A. Znaleźć punkty okresowe przekształcenia φ_A.

Zadanie 16. Niech
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
i niech φ_A oznacza przekształcenie czterowymiarowego torusa $\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ indukowane przez macierz A. Znaleźć punkty okresowe przekształcenia φ_A.

Zadanie 17. Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $1, \alpha_1, \alpha_2$ liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$. Niech $G = \{l\alpha + m : l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^2\}$. Pokazać, że zbiór G jest gęsty w $\mathbb{R}^2$. (Por. zadanie 90.)

Zadanie 18 (Przesunięcie na torusie)**.** Niech $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Rozważmy przekształcenie $T_{(\alpha_1,\alpha_2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $T_{(\alpha_1,\alpha_2)}(x, y) = (x + \alpha_1, y + \alpha_2)$. To przekształcenie wyznacza dyfeomorfizm torusa $\mathbb{T}^2$; oznaczamy go tak samo.

(a) Wykazać, że jeżeli $1, \alpha_1, \alpha_2$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$, to trajektoria każdego punktu torusa jest gęsta.

(b) Wykazać, że jeżeli $1, \alpha_1, \alpha_2$ są liniowo zależne nad $\mathbb{Q}$ to żadna trajektoria nie jest gęsta.

(c) Wykazać, przy założeniu punktu (a), że dla każdej funkcji ciągłej $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ mamy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\infty} f \circ T^i_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \int f dL$$
jednostajnie na torusie $\mathbb{T}^2$, gdzie L oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}^2$.

Zadanie 19. Udowodnić, że jeśli A jest macierzą wymiaru $m \times m$ o współczynnikach całkowitych, $\det A = d \neq 0$ i $\varphi_A\colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$, $\varphi_A(x) = Ax \mod \mathbb{Z}^m$, jest przekształceniem indukowanym m-wymiarowego torusa $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$, to każdy punkt $\mathbb{T}^m$ ma dokładnie d przeciwobrazów przy przekształceniu φ_A.

Zadanie 20. Udowodnić, że jeśli A jest macierzą wymiaru $m \times m$ o współczynnikach całkowitych $\det A = d \neq 0$ i $\varphi_A\colon \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$, $\varphi_A(x) = Ax \mod \mathbb{Z}^m$, jest przekształceniem indukowanym m-wymiarowego torusa $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$, to zbiór punktów okresowych przekształcenia φ_A jest gęsty w $\mathbb{T}^m$. Opisać w sensowny i krótki sposób punkty okresowe φ_A.

Zadanie 21. Niech f będzie przekształceniem pełnego torusa $N = \mathbb{T} \times \mathbb{D}$, gdzie $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ danym przez
$$f(t, z) = \left(2t \bmod 1,\ \frac{z}{4} + \frac{e^{2\pi i t}}{2}\right).$$
Pokazać, że f ma nieskończenie wiele punktów okresowych.

Zadanie 22 (Uogólnienie zadania 21)**.** Pokazać, że zbiór punktów okresowych dla przekształcenia f z zadania 21 jest gęsty w zbiorze granicznym $\Lambda = \bigcap_{n\geqslant 0} f^n(N)$ (tzw. *solenoidzie*).

Zadanie 23. Udowodnić, że $f(\omega(x)) = \omega(x)$ dla każdego homeomorfizmu f.

Zadanie 24. Niech f będzie zachowującym orientację homeomorfizmem prostej. Udowodnić, że zbiór punktów ω-granicznych każdej trajektorii jest pusty lub jednoelementowy. Jak jest w wypadku zmieniającego orientację homeomorfizmu prostej?

Zadanie 25. Czym jest zbiór punktów ω-granicznych dla obrotu na okręgu?

Zadanie 26. Niech $F(x) = x + \frac{1}{10}\sin(2\pi x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Definiujemy funkcję $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ wzorem $f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i F(t)}$. Znaleźć $\omega(z)$ i $\alpha(z)$ w zależności od punktu $z \in \mathbb{S}^1$.

Zadanie 27. Niech $F(x) = x + \frac{1}{100}\sin^2(17\pi x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Definiujemy funkcję $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ wzorem $f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i F(t)}$. Znaleźć $\omega(z)$ i $\alpha(z)$ w zależności od punktu $z \in \mathbb{S}^1$.

Zadanie 28. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — wzorem $g(x) = x + \frac{1}{2}\cos x$. Rozstrzygnąć, czy f i g są topologicznie sprzężone.

Zadanie 29. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = x + x^3$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — wzorem $g(x) = x + \frac{x^2}{1+x^2}$. Rozstrzygnąć, czy f i g są topologicznie sprzężone.

Zadanie 30. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = -x - x^3$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — wzorem $g(x) = -x + x^3$. Rozstrzygnąć, czy f i g są topologicznie sprzężone.

Zadanie 31. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określone wzorem $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin x$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — wzorem $g(x) = x + \frac{1}{2}\cos^2 x$. Rozstrzygnąć, czy f i g są topologicznie sprzężone.

Zadanie 32. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określone wzorem $f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + y, \frac{1}{2}y\right)$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — wzorem $g(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$. Rozstrzygnąć, czy f i g są topologicznie sprzężone.

Zadanie 33. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określone wzorem $f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + y, -\frac{1}{2}y\right)$, a przekształcenie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — wzorem $g(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$. Rozstrzygnąć, czy f i g są topologicznie sprzężone.

Zadanie 34. Niech

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$$

dla $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Pokazać, że dla każdych $\lambda_1, \lambda_2 \in (1, 2)$ przekształcenia f_{λ_1} i f_{λ_2} są topologicznie sprzężone.

(b) Rozstrzygnąć, czy przekształcenia f_1 i f_2 są topologicznie sprzężone.

(c) Rozstrzygnąć, czy przekształcenia f_2 i f_3 są topologicznie sprzężone.

(d) Rozstrzygnąć, czy przekształcenia f_3 i f_4 są topologicznie sprzężone.

(e) Pokazać, że dla każdych $\lambda_1, \lambda_2 \in (4, +\infty)$ przekształcenia f_{λ_1} i f_{λ_2} są topologicznie sprzężone. Znaleźć liczbę punktów okresowych o okresie podstawowym 5 dla przekształcenia f_λ, $\lambda \in (4, +\infty)$. Czym jest (topologicznie) zbiór

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R} : |f_\lambda^n(x)| \not\to \infty \text{ przy } n \to \infty\}$$

dla $\lambda \in (4, +\infty)$?

Zadanie 35. Niech $f(x) = 4x(1-x)$ dla $x \in [0,1]$, $g(x) = 1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$ dla $x \in [0,1]$, $\varphi(x) = 1 - 2x^2$, dla $x \in [-1,1]$. Czy przekształcenia f, g, φ są topologicznie sprzężone? Jeśli któreś dwa są, to czy są też gładko sprzężone?

Zadanie 36. Pokazać, że przekształcenie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 - 1$ jest topologicznie sprzężone z przekształceniem $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - c$ dla pewnego c zależnego od a. Wypisać wzorem to sprzężenie.

Zadanie 37. Podać przykład dwóch przekształceń f, g takich, że f^2 jest sprzężone z g^2, a f nie jest sprzężone z g.

Zadanie 38. Które z poniższych przekształceń $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są topologicznie sprzężone? W których przypadkach sprzężenie jest hölderowskie, a w których różniczkowalne?

a. $f(x) = \dfrac{x}{2}$, b. $f(x) = 2x$, c. $f(x) = -2x$,
d. $f(x) = 5x$, e. $f(x) = x^3$, f. $f(x) = 2x + x^3$.

Zadanie 39. Które z poniższych przekształceń są topologicznie sprzężone w pewnym otoczeniu 0? W których przypadkach to sprzężenie jest hölderowskie, a w których różniczkowalne?

a. $f(x) = \operatorname{tg} x$, b. $f(x) = \sqrt{2}\, x$, c. $f(x) = \sin x$,
d. $f(x) = -2x$, e. $f(x) = \pi x$.

Zadanie 40. Rozważmy homeomorfizmy $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ takie, że $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$, i f, g nie mają innych punktów stałych. Wykazać, że f i g są topologicznie sprzężone.

Zadanie 41. Niech f, g będą przekształceniami klasy C^1 określonymi w otoczeniu 0 w $\mathbb{R}$, takimi że $f(0) = g(0) = 0$, $0 < f'(0) < 1$, $0 < g'(0) < 1$. Wykazać, że f i g są sprzężone topologicznie w pewnym otoczeniu 0. Ponadto wykazać, że można zbudować sprzężenie bilipschitzowskie wtedy i tylko wtedy gdy $f'(0) = g'(0)$.

Zadanie 42. Wykazać, że przekształcenie $x \mapsto x + \frac{x^2}{1+x^2}$ nie jest topologicznie sprzężone w otoczeniu 0 z żadnym przekształceniem liniowym, zaś przekształcenie $x \mapsto x + x^3$ – jest.

Zadanie 43. Niech $0 < c < 1$. Rozważmy przekształcenie $f_c : [0,1] \to [0,1]$ określone jako $f_c(x) = \frac{x}{c}$ dla $x \in [0,c]$ i $f_c(x) = \frac{x}{c-1} - \frac{1}{c-1}$ dla $x \in [c,1]$. Pokazać, że wszystkie przekształcenia f_c są topologicznie sprzężone. Czy homeomorfizm sprzęgający jest gładki? Lipschitzowski? Hölderowski?

Zadanie 44. Niech X będzie przestrzeń topologiczna, a $f : X \to X$ przekształceniem ciągłym. Pokazać, że następujące stwierdzenia są równoważne:

(a) przekształcenie f jest minimalne,

(b) każdy punkt $x \in X$ ma orbitę gęstą w X,

(c) dla każdego punktu $x \in X$ zachodzi $\omega(x) = X$.

Zadanie 45. Znaleźć przykład przestrzeni topologicznej X i ciągłego przekształcenia $f : X \to X$, które:

(a) jest topologicznie tranzytywne i nie jest punktowo tranzytywne,

(b) jest punktowo tranzytywne i nie jest topologicznie tranzytywne.

Zadanie 46. Niech X przestrzeń topologiczna i niech $f : X \to X$ ciągłe. Udowodnić, że jeśli f jest punktowo tranzytywne i X nie ma punktów izolowanych, to f jest topologicznie tranzytywne.

Zadanie 47. Niech X przestrzeń topologiczna i niech $f : X \to X$ ciągłe. Udowodnić, że jeśli f jest topologicznie tranzytywne i X jest przestrzenią ośrodkową II kategorii Baire'a (tzn. X nie jest przeliczalną sumą zbiorów nigdziegęstych), to f jest punktowo tranzytywne.

Zadanie 48. Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą bez punktów izolowanych i niech $T : X \to X$ będzie homeomorfizmem. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

(a) dla dowolnych niepustych podzbiorów otwartych $U, V \subset X$ istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,

(b) dla dowolnych niepustych podzbiorów otwartych $U, V \subset X$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,

(c) jeśli $U \subset X$ jest otwarty, niepusty i niezmienniczy (tzn. $f(U) = U$), to U jest gęsty w X,

(d) istnieje punkt $x \in X$, którego orbita $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{f^n(x)\}$ jest gęsta w X,

(e) zbiór tych $x \in X$, których orbita $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{f^n(x)\}$ jest gęsta w X, jest gęstym podzbiorem typu G_δ w X.

Zadanie 49. Produkt układów dynamicznych $f : X \to X$ i $g : Y \to Y$ to przekształcenie: $(f, g) : X \times Y \mapsto X \times Y$, $(f, g)(x, y) = (f(x), g(y))$. Czy produkt przekształceń topologicznie tranzytywnych jest topologicznie tranzytywny? To samo pytanie dla: topologicznie mieszających, minimalnych, ekspansywnych.

Zadanie 50. Wykazać, że izometria w przestrzeni metrycznej zwartej nie jest przekształceniem topologicznie mieszającym.

Zadanie 51. Podać przykład homeomorfizmu $f : M \to M$ zwartej rozmaitości M, dla którego jedynym zbiorem minimalnym jest punkt stały.

Zadanie 52. Wykazać, że przekształcenie $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ określone wzorem

$$f(x, y) = (x + \alpha, y + x) \mod \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

jest topologicznie tranzytywne wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Zadanie 53. Wskazać przykład przekształcenia ciągłego $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, które ma własność wrażliwości na warunki początkowe i przykład przekształcenia ciągłego $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, różnego od identyczności, które nie ma tej własności. Sprawdzić, że automorfizm liniowy torusa $\mathbb{T}^2$, wyznaczony przez macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ma własność wrażliwości na warunki początkowe. Podać przykład dyfeomorfizmu torusa $\mathbb{T}^2$, różnego od identyczności, który nie ma tej własności.

Zadanie 54. W przestrzeni $\Sigma_\infty^+ = \prod_{i=0}^\infty \{0,1\}$ wprowadzamy topologię produktową, wyznaczoną przez dyskretną topologię w $\{0,1\}$. Otrzymujemy (tw. Tichonowa) przestrzeń zwartą. Przekonać się, że ta sama topologia jest wyznaczona przez metrykę

$$d(\mathbf{s},\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{\lambda^j}$$

dla $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots)$, $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots)$, gdzie λ jest dowolną ustaloną liczbą większą niż 1. Przestrzeń Σ_∞^+ jest więc przestrzenią metryczną zwartą, a zatem zupełną. Sprawdzić, że *cylindry*

$$C_{t_0,\dots t_k} = \{\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots) \in \Sigma_\infty^+ : s_0 = t_0, s_1 = t_1 \dots, s_k = t_k\}$$

wyznaczone przez skończone ciągi $(t_0, \dots t_k)$ są otwarto-domkniętymi podzbiorami Σ_∞^+ (oraz tworzą bazę topologii produktowej).

Zadanie 55. Sformułować i rozwiązać odpowiednik zadania 54 dla przestrzeni Σ_∞ będącej produktem nieskończonym dwustronnym: $\Sigma_\infty = \prod_{j=-\infty}^\infty \{0,1\}$.

Zadanie 56. Wykazać że przekształcenie „przesunięcia w lewo"

$$\sigma : \Sigma_\infty^+ \to \Sigma_\infty^+, \qquad (\sigma(\mathbf{s}))_i = s_{i+1} \quad \text{dla} \quad \mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots)$$

na przestrzeni Σ_∞^+ jest topologicznym mieszaniem.

Rozdział 2

Przekształcenia okręgu

Definicje i twierdzenia

Okrąg w notacji multiplikatywnej oznaczać będziemy przez $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, zaś w notacji addytywnej przez $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ($= [0,1)$ z utożsamionymi końcami).

Definicja 2.1. Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ będzie funkcją ciągłą. Istnieje wówczas ciągłe przekształcenie prostej $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zwany podniesieniem f) taki, że $\pi \circ F = f \circ \pi$, gdzie $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ jest naturalnym rzutowaniem $\pi(x) = x \mod 1$.

Można sprawdzić, że podniesienie jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do stałej całkowitej (zad. 57).

Definicja 2.2. Stopniem przekształcenia ciągłego $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ nazywamy liczbę całkowitą $|F(t+1) - F(t)|$ dla dowolnie ustalonego F będącego podniesieniem f i $t \in \mathbb{R}$ (por. zad. 57)

Jeśli $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ jest homeomorfizmem, to F także (zad. 58). Ponieważ każdy homemorfizm prostej jest albo ściśle monotoniczny, wprowadzamy następującą definicję:

Definicja 2.3. Homeomorfizm $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ nazywamy zachowującym orientację jeśli jego podniesienie jest ściśle rosnące, zaś odwracającym orientację, jeśli jego podniesienie jest ściśle malejące.

Definicja 2.4. Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ będzie homeomorfizmem okręgu, zaś F jego podniesieniem. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n},$$

której część ułamkowa nie zależy od x i wyboru podniesienia F (zad. 59). Liczbę tę nazywamy liczbą obrotu homeomorfizmu f i oznaczamy przez $\rho(f)$.

Fakt 2.1. Liczba obrotu jest niezmiennikiem sprzężenia topologicznego (tzn. jeśli homeomorfizmy okręgu f i g są topologicznie sprzężone, to ich liczby obrotu są równe). Jeśli f odwraca orientację, to $\rho(f) = 0$. Liczba obrotu jest wymierna wtedy i tylko wtedy gdy f posiada punkt okresowy.

Definicja 2.5. Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ będzie homeomorfizmem okręgu. Łuk (domknięty) $I \subset \mathbb{T}$ nazywamy łukiem błądzącym, jeśli zbiory $\{f^n(I)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ są parami rozłączne.

Twierdzenie 2.1. Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ będzie homeomorfizmem okręgu o liczbie obrotu $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Wówczas zbiór $\omega(x)$ nie zależy od punktu $x \in \mathbb{T}$ oraz zachodzi jedna z dwóch możliwości:

(i) $\omega(x) \neq \mathbb{T}$. Wówczas istnieje łuk błądzący i obrót niewymierny $R_{\rho(f)}$ jest faktorem f,

(ii) $\omega(x) = \mathbb{T}$. Wówczas nie istnieją łuki błądzące i f jest topologicznie sprzężone z obrotem $R_{\rho(f)}$.

Twierdzenie 2.2 (Denjoy)**.** Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ będzie dyfeomorfizmem okręgu klasy C^2 o niewymiernej liczbie obrotu $\rho(f)$. Wówczas f jest topologicznie sprzężone z obrotem $R_{\rho(f)}$.

Uwaga 2.1. W powyższym twierdzeniu wystarczy założyć, że $\log |f'|$ ma skończone wahanie.

Zadania

Zadanie 57. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ jest ciągła, to istnieje taka funkcja ciągła $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iF(t)}$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$. Wtedy $F(t+1) - F(t) = \mathrm{const} \in \mathbb{Z}$. Jeśli $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją spełniającą warunek $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iG(t)}$, to funkcja $G - F$ jest stała, a jej jedyna wartość jest liczbą całkowitą. Sprawdzić, że liczba $F(t + 1) - F(t)$ jest całkowita oraz niezależna od wyboru podniesienia F i $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 58. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ jest ciągła i różnowartościowa, to $|F(t+1)-F(t)| = 1$, gdzie F jest podniesieniem f. Udowodnić, że jeśli f jest homeomorfizmem, to F także.

Zadanie 59. Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ będzie homeomorfizmem okręgu, zaś F jego podniesieniem. Pokazać, że dla dowolnego x $\mathbb{T}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

oraz jej część ułamkowa nie zależy od x oraz podniesienia F.

Zadanie 60. Niech $F(x) = x + \frac{1}{100}\sin^2(17\pi x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Definiujemy funkcję $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ wzorem $f(e^{2\pi it}) = e^{2\pi iF(t)}$. Udowodnić, że nie istnieje taki homeomorfizm $g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, że $f = g \circ g$.

Zadanie 61. Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $f(t) = 2t \mod 1$. Udowodnić, że przekształcenie f ma punkt o gęstej trajektorii (ogólniej: istnieje gęsty zbiór punktów o rozłącznych gęstych trajektoriach).

Zadanie 62. Udowodnić, że przekształcenie f z zadania 61 ma gęsty zbiór punktów okresowych.

Zadanie 63. Ile różnych orbit o okresie podstawowym 6, a ile o okresie podstawowym 7 ma przekształcenie f z zadania 61?

Zadanie 64. Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i niech $R_\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $R_\alpha(t) = t + \alpha \mod 1$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ (obrót na okręgu). Pokazać, że jeśli $\alpha \in \mathbb{Q}$, to wszystkie punkty są okresowe (z tym samym okresem), a jeśli $\alpha \notin \mathbb{Q}$, to wszystkie punkty mają gęste trajektorie.

Zadanie 65. Pokazać, że trajektorie punktów pod działaniem przekształcenia R_α z zadania 64, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, są równo rozłożone w $\mathbb{T}$, tzn. dla każdego $(a,b) \subset [0,1]$ i $x \in \mathbb{T}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{1 \leqslant k \leqslant n : R_\alpha^k(x) \in (a,b)\}}{n} = b - a.$$

Zadanie 66. Pokazać, że jeśli $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $R_\alpha(z) = ze^{2\pi i\alpha}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ i $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f \circ R_\alpha^i \rightrightarrows \frac{1}{\ell(\mathbb{S}^1)} \int_{\mathbb{S}^1} f d\ell,$$

gdzie ℓ jest miarą Lebesgue'a na $\mathbb{S}^1$.

Zadanie 67. Wyznaczyć $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sin\sqrt{3}n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \cos n$ oraz $\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sin\sqrt{3}n + \cos n\Big)$.

Zadanie 68. Niech a_n będzie pierwszą (od lewej) cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym liczby 2^n. Pokazać, że w ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty$ wszystkie cyfry pojawią się nieskończenie wiele razy. Co można powiedzieć o częstościach pojawiania się poszczególnych cyfr?

Zadanie 69. Udowodnić, że dla przesunięcia $T(x) = x + \alpha$ na torusie $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, jeśli $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$, to wszystkie punkty $x \in \mathbb{T}^n$ mają gęste trajektorie.

Zadanie 70. Udowodnić, że jeśli $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ jest homeomorfizmem okręgu zmieniającym orientację, to h ma dwa punkty stałe.

Zadanie 71. Znaleźć orbity okresowe i podać liczby obrotu dla homeomorfizmów okręgu danych (w podniesieniu) wzorami

$$F(X) = X + \varepsilon\sin(2\pi nX), \qquad G(X) = X + \frac{1}{n} + \varepsilon\sin(2\pi nX),$$

gdzie $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\pi n}$.

Zadanie 72. Niech $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie homeomorfizmem okręgu zachowującym orientację i niech $\varrho(h)$ będzie liczbą obrotu h. Pokazać, że $\varrho(h) = 0 \mod 1$ wtedy i tylko wtedy gdy h ma punkt stały.

Zadanie 73. Udowodnić, że liczba obrotu homeomorfizmu $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zachowującego orientację jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy f ma punkt okresowy.

Zadanie 74. Udowodnić, ze jeśli liczba obrotu homeomorfizmu $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zachowującego orientację jest niewymierna, to dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$ zachodzi równość $\omega(z_1) = \omega(z_2)$.

Zadanie 75. Pokazać, że jeśli f i g są homeomorfizmami okręgu zachowującymi orientację oraz f i g są topologicznie sprzężone, to mają tę samą liczbę obrotu.

Zadanie 76. Niech $\mathcal{H}$ oznacza zbiór wszystkich homeomorfizmów okręgu $\mathbb{S}^1$, a $\mathcal{H}_+$ — zbiór homeomorfizmów okręgu zachowujących orientację. Niech

$$d(h_1, h_2) = \sup\{|h_1(z) - h_2(z)|\colon z \in \mathbb{S}^1\}.$$

Udowodnić, że przekształcenia $(h_1, h_2) \mapsto h_1 \circ h_2$ i $h \mapsto h^{-1}$ są ciągłe. Czy funkcja $\mathcal{H}_+ \ni h \mapsto \rho(h) \in [0,1)$ przypisująca homemorfizmowi jego liczbę obrotu jest ciągła? Czy spełnia warunek Lipschitza?

Zadanie 77. Niech f będzie homeomorfizmem okręgu. Sprawdzić, że liczbę obrotu $\rho(f)$ można zdefiniować w następujący, równoważny sposób:

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leqslant i \leqslant n\colon\ f^i(x) \in [z, f(z))\},$$

gdzie x, z są dowolnymi punktami okręgu $\mathbb{S}^1$, a $[z, f(z))$ jest dodatnio zorientowanym domknięto-otwartym łukiem w $\mathbb{S}^1$.

Zadanie 78. Wykazać, że liczbę obrotu homeomorfizmu $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zachowującego orientację można równoważnie zdefiniować, nie używając podniesienia f, w następujący sposób. Najpierw określamy funkcję $d : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ tak, że dla $x \in \mathbb{S}^1$ wartość $d(x)$ jest długością dodatnio zorientowanego łuku o początku w punkcie x i końcu w punkcie $f(x)$. Następnie, definiujemy ciąg

$$d_n(x) = d(x) + d(f(x)) + \cdots + d(f^{n-1}(x)).$$

Wykazać, że

$$d_n(x) + d_m(x) - 1 \leqslant d_{n+m}(x) \leqslant d_n(x) + d_m(x) + 1$$

i że, w takim razie, ciąg $\frac{d_n(x)}{n}$ ma granicę $\rho(x)$. Wykazać, że $\rho(x)$ jest równe liczbie obrotu f (i, w takim razie, nie zależy od x).

Zadanie 79. Niech $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^2 z niewymierną liczbą obrotu. Oznaczmy przez R_β obrót o kąt $\beta \neq 0$. Uzasadnić że dyfeomorfizmy f oraz $R_\beta \circ f$ mają różne liczby obrotu.

Zadanie 80. Niech $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie homeomorfizmem zachowującym orientację, o liczbie obrotu α. Oznaczmy przez R_β obrót o kąt $\beta \neq 0$. Porównać liczby obrotu dla homeomorfizmów f i dla $R_\beta \circ f$. Sformułować założenia na f oraz/lub α, które gwarantują, że te liczby obrotu będą różne.

Zadanie 81. Niech f będzie homeomorfizmem $\mathbb{S}^1$ z niewymierną liczbą obrotu. Wykazać, że zbiór punktów ω-granicznych $\omega(x)$ nie zależy od x i że jest albo całym okręgiem $\mathbb{S}^1$, albo pewnym zbiorem niezmienniczym, doskonałym i nigdziegęstym.

Zadanie 82. Podać przykład takiego homeomorfizmu $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zachowującego orientację, dla którego $\varrho(h) = 0$ oraz zbiór punktów niebłądzących $\Omega(h)$ jest

(a) równy $\mathbb{S}^1$, (b) różny od $\mathbb{S}^1$.

Zadanie 83. Opisać wszystkie homeomorfizmy okręgu, $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zachowujące orientację, o następującej własności: istnieje $\alpha > 0$ takie, że jeśli łuk I na długość α, to łuk $f(I)$ ma długość mniejszą bądź równą α.

Zadanie 84. Wykazać, że nie istnieje ekspansywny homeomorfizm $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Rozdział 3

Gładkie układy dynamiczne

Definicje i twierdzenia

Przez wartości własne macierzy $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ będziemy rozumieli pierwiastki (także zespolone) wielomianu charakterystycznego A. Zbiór wartości własnych A będziemy oznaczać przez $\sigma(A)$. Przez gładką rozmaitość będziemy na ogół rozumieli skończenie wymiarową, 'wystarczająco gładką' rozmaitość (np. gdy będziemy rozważać dyfeomorizm klasy C^r, będziemy zakładać, że rozmaitość również jest klasy przynajmniej C^r). Dla uproszczenia będziemy zakładać, że rozważane rozmaitości są zanurzone w $\mathbb{R}^N$.

Definicja 3.1. Macierz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ nazywamy hiperboliczną, gdy wszystkie jej wartości własne mają moduł różny od 1. Odwzorowanie liniowe $T : V \to V$ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$ nazywamy hiperbolicznym, jeśli macierz odwzorowania T jest hiperboliczna (powyższa definicja nie zależy od wyboru bazy V w której określamy macierz odwzorowania T).

Fakt 3.1. Jeśli $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ jest macierzą hiperboliczną, to istnieją podprzestrzenie liniowe $E^s, E^u \subset \mathbb{R}^m$, nazywane odpowiednio podprzestrzenią stabliną i niestabilną, takie, że $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$, $A(E^s) \subset E^s$, $A(E^u) \subset E^u$ oraz dla $x \in E^s$ mamy $A^n x \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, zaś dla $x \in E^u \setminus \{0\}$ mamy $\|A^n x\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ (por. zad. 86). Podobnie, jeśli $T : V \to V$ jest odwzorowaniem liniowym na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$, to istnieją podprzestrzenie stabilna E^s i niestabilna E^u takie, że $E^s \oplus E^u = V$.

Definicja 3.2. Niech $f : M \to M$ będzie odwzorowaniem klasy C^r na gładkiej rozmaitości M. Punkt okresowy $p \in M$ o okresie n nazywamy hiperbolicznym, jeśli różniczka $D(f^n)(p) : T_pM \to T_pM$ jest odwzorowaniem hiperbolicznym.

Uwaga 3.1. Hiperboliczność punktu okresowego można również zdefiniować odwołując się bezpośrednio do ustalonej mapy. Ustalmy w tym celu mapę φ określoną na otoczeniu zera w $\mathbb{R}^m$ taką, że $\varphi(0) = p$. Wówczas punkt p jest hiperboliczny wtedy i tylko wtedy gdy różniczka $D\varphi^{-1} \circ f^n \circ \varphi(0)$ jest hiperboliczna. W szczególności, powyższa definicja hiperboliczności nie zależy od wyboru mapy.

Twierdzenie 3.1 (Grobmana-Hartmana)**.** Niech f będzie odwzorowaniem klasy C^1 określonym na otoczeniu punktu $p \in \mathbb{R}^m$, takim że $f(p) = p$. Załóżmy, że różniczka $Df(p)$ jest hiperboliczna. Istnieją wówczas otoczenia U_1, U_2 punktu p, otoczenia V_1, V_2 zera w $\mathbb{R}^m$ oraz homeomorfizm $h : U_1 \cup U_2 \to V_1 \cup V_2$ takie, że $h(p) = 0$ oraz $f = h^{-1} \circ Df(p) \circ h$ na U_1, tzn. poniższy diagram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{f} & U_2 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ V_1 & \xrightarrow{Df(p)} & V_2 \end{array}$$

Uwaga 3.2. Niech p będzie hiperbolicznym punktem stałym dla odwzorowania f klasy C^1 określonego na m-wymiarowej gładkiej rozmaitości M. Weźmy mapę φ określoną na otoczeniu zera w $\mathbb{R}^m$ taką, że $\varphi(0) = p$. Stosując powyższe twierdzenie dla $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$, otrzymujemy lokalne sprzężenie z odwzorowaniem liniowym dla przekształcenia f.

Definicja 3.3. Niech $f : M \to M$ będzie dyfeomorfizmem gładkiej m-wymiarowej rozmaitości M. Niech $p \in M$ będzie hiperbolicznym punktem stałym odwzorowania f. Dla $\varepsilon > 0$ definiujemy stabilną rozmaitość lokalną punktu p jako

$$W^s_\varepsilon(p) := \{x \in B(p, \varepsilon) : \underset{n \geqslant 0}{\forall}\ f^n(x) \in B(p, \varepsilon)\},$$

oraz niestabilną rozmaitość lokalną punktu p jako

$$W^u_\varepsilon(p) := \{x \in B(p, \varepsilon) : \underset{n \leqslant 0}{\forall}\ f^n(x) \in B(p, \varepsilon)\}.$$

Definicja 3.4. Przekształcenie $\psi : N \to M$ klasy C^1 między gładkimi rozmaitościami M oraz N nazywamy immersją, gdy przekształcenie liniowe $D\psi(x) : T_xN \to T_{\psi(x)}M$ ma rząd równy $\dim N$ dla dowolnego $x \in N$. Jeśli ψ jest immersją klasy C^r, to obraz $\psi(N)$ nazywamy immersyjną podrozmaitością M klasy C^r.

Twierdzenie 3.2 (Hadamarda-Perrona)**.** Niech f będzie dyfeomorfizmem klasy C^r określonym na otoczeniu punktu $p \in \mathbb{R}^m$. Załóżmy, że p jest hiperbolicznym punktem stałym odwzorowania f. Wówczas, dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$, zbiory $W^s_\varepsilon(p)$ oraz $W^u_\varepsilon(p)$ są podrozmaitościami klasy C^r. Co więcej, $T_pW^s_\varepsilon(p) = E^s$ oraz $T_pW^s_\varepsilon(p) = E^u$, gdzie E^s oraz E^u są odpowiednio stabilną oraz niestabilną podprzestrzenią różniczki $Df(p)$. Co więcej,

$$f^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \text{ dla } x \in W^s_\varepsilon(p) \text{ oraz } f^n(x) \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} p \text{ dla } x \in W^u_\varepsilon(p).$$

Uwaga 3.3. Podobnie jak wcześniej, korzystając z ustalonej mapy, powyższy wynik można przenieść na przypadek dyfeomorfizmu gładkiej rozmaitości.

Definicja 3.5. Niech $f : M \to M$ będzie dyfeomorfizmem gładkiej m-wymiarowej rozmaitości M. Niech $p \in M$ będzie hiperbolicznym punktem stałym odwzorowania f. Dla $\varepsilon > 0$ definiujemy stabilną rozmaitość globalną punktu p jako

$$W^s(p) := \{x \in M : f^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p\},$$

oraz niestabilną rozmaitość globalną punktu p jako

$$W^u(p) := \{x \in B(p, \varepsilon) : f^n(x) \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} p\}.$$

Fakt 3.2. Dla odpowiednio małych $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$W^s(p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W^s_\varepsilon(p)) \text{ oraz } W^u(p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{n}(W^u_\varepsilon(p)).$$

Co więcej, $W^s(p)$ oraz $W^u(p)$ są immersyjnymi podrozmaitościami M klasy C^r (immersje określone są odpowiednio na $\mathbb{R}^s$ oraz $\mathbb{R}^u$, gdzie $s = \dim E^s$ oraz $u = \dim E^u$).

Przejdziemy teraz do przypadku gładkich pól wektorowych.

Definicja 3.6. Niech M będzie gładką m-wymiarową rozmaitością. Polem wektorowym klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $V : M \to TM$ klasy C^r takie, że $V(p) \in T_pM$. Potokiem pola X nazywamy odwracalny potok $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ dyfeomorfizmów na $\mathbb{R}$ taki, że dowolnego $p \in M$ oraz dowolnego $t_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(p)|_{t=t_0} = X(\varphi_{t_0}(p)).$$

Twierdzenie 3.3. Jeśli X jest polem wektorowym klasy C^r na zwartej, gładkiej rozmaitości M, to istnieje jedyny potok $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ pola V. Co więcej, potok $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ jest klasy C^r.

Definicja 3.7. Punkt $p \in M$ nazywamy punktem krytycznym pola wektorowego X na rozmaitości M, jeśli $V(p) = 0$. Punkt krytyczny p nazywamy hiperbolicznym, jeśli różniczka DX_p nie posiada wartości własnych o zerowej części rzeczywistej.

Definicja 3.8. Niech $\gamma = \mathrm{Orb}(p)$ będzie orbitą zamkniętą potoku φ_t pola wektorowego X na gładkiej rozmaitości M. Lokalnym cięciem transwersalnym orbity γ w punkcie $p \in \gamma$ nazywamy taką podrozmaitość $S \subset M$ kowymiaru 1, że $p_0 \in S$ oraz $V(p) \notin T_pS$. Dla takiego cięcia S określamy przekształcenie Poincarégo $\Theta : U \to S$ na odpowiednio małym otoczeniu $U \subset S$ punktu p warunkiem

$$\Theta(x) = \varphi_{t(x)}(x),\ \ x \in U,$$

gdzie $t(x)$ jest najmniejszą liczbą dodatnią taką, że $\varphi_{t(x)}(x) \in S$ (por. zad. 88).

Definicja 3.9. Orbitę zamkniętą $\gamma = \mathrm{Orb}(x)$ potoku φ_t pola wektorowego V na gładkiej rozmaitości M nazywamy orbitą hiperboliczną, jeśli x jest hiperbolicznym punktem stałym przekształcenia Poincarégo dla orbity γ.

Uwaga 3.4. Powyższa definicja nie zależy od wyboru punktu $x \in \gamma$ oraz lokalnego cięcia transwersalnego S (por. zad. 88).

Twierdzenie 3.4 (Grobmana-Hartmana dla potoków)**.** Niech V będzie polem wektorowym klasy C^1 określonym na otoczeniu punktu $p \in \mathbb{R}^m$. Załóżmy, że p jest hiperbolicznym punktem krytycznym pola V. Istnieją wówczas otoczenia U punktu p, V zera w R^m oraz homeomorfizm $h : U \to V$ takie, że h sprzęga potok φ_t pola V na U z potokiem ψ_t pola liniowego $DV(p)$ na V, tzn. $h(p) = 0$ oraz $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$ na U dla odpowiednio małych t.

Uwaga 3.5. W powyższym twierdzeniu potok pola liniowego $DV(p)$ można znaleźć bezpośrednio jako $\varphi_t(x) = e^{tDV(p)}x$.

Twierdzenie 3.5 (Hadamarda-Perrona dla potoków)**.** Niech V będzie polem wektorowym klasy C^r określonym na zwartej m-wymiarowej rozmaitości M. Załóżmy, że p jest hiperbolicznym punktem krytycznym pola V. Niech E^s oraz E^u będą podprzestrzeniami własnymi różniczki $DV(p)$ odpowiadającymi wartościom własnym o odpowiednio ujemnej i dodatniej części rzeczywistej (por. zad. 86). Niech $k = \dim E^s$. Istnieją wówczas różnowartościowe immersje $\psi_+ : \mathbb{R}^k \to M$, $\psi_- : \mathbb{R}^{m-k} \to M$ klasy C^r takie, że

(1) $\psi_+(0) = \psi_-(0) = p$,

(2) $\psi_+(\mathbb{R}^k) = W^s(p) := \{x \in M : \lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = p\}$, $\psi_-(\mathbb{R}^{m-k}) = W^u(p) := \{x \in M : \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = p\}$,

(3) $T_p(W^s(p)) = E^s$, $T_p(\psi_-(W^u(p)) = E^u$.

Definicja 3.10. Podrozmaitości $W^s(p)$, $W^u(p)$ zdefiniowane w powyższym twierdzeniu nazywamy odpowiednio stabilną oraz niestabilną rozmaitością (globalną) punktu p.

Definicja 3.11. Niech V będzie polem wektorowym klasy C^r określonym na zwartej m-wymiarowej rozmaitości M, zaś γ jego hiperboliczną orbitą zamkniętą. Ustalmy punkt $p \in \Gamma$, lokalne cięcie transwersalne S orbity γ w punkcie p oraz przekształcenie Poincarégo Θ cięcia S. Punkt p jest hiperbolicznym punktem stałym odwzorowania Θ, więc (z tw. Hadamarda-Perrona dla dyfeomorfizmów) istnieją w S jego lokalne rozmaitości stabilna $W^s_\varepsilon(p)$ oraz niestabilna $W^u_\varepsilon(p)$. Zdefiniujmy

$$W^s(\gamma) := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(W^s_\varepsilon(p)),\ W^u(\gamma) := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(W^u_\varepsilon(p)).$$

Powyższe zbiory są podrozmaitościami M i nie zależą od wyboru punktu $p \in \gamma$ oraz cięcia S. Nazywamy je odpowiednio stabilną oraz niestabilną rozmaitością (globalną) orbity zamkniętej γ.

Definicja 3.12. Niech $f, g : M \to M$ będą odwzorowaniem klasy C^r na gładkiej, zwartej rozmaitości M. Ustalmy skończony atlas $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j) : j = 1, ..., n\}$. Istnieją wówczas zwarte zbiory $K_1, ..., K_n$ takie, że $K_j \subset U_j$ oraz $\bigcup_{j=1}^{n} K_j = M$. Zdefiniujmy

$$d_{\mathcal{U}}(f, g) := \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sup_{x\in K_j} \sum_{i=0}^{r} \|D^i f \circ \varphi_j(x) - D^i g \circ \varphi_j(x)\|.$$

Topologia wyznaczona przez powyższą metrykę nie zależy od wyboru atlasu $\mathcal{U}$ ani zbiorów $K_1, ..., K_n$. Tak wprowadzoną topologię nazywamy topologią C^r na zbiorze przekształceń M klasy C^r. Analogicznie definujemy topologię C^r na zbiorze pól wektorowych klasy C^r na M (po przeniesieniu przez mapę pole wektorowe jest odwzorowaniem z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^N$).

Definicja 3.13. Mówimy, że dyfeomorfizm f klasy C^r na gładkiej, zwartej rozmaitości M jest C^r-strukturalnie stabilny, jeśli istnieje takiego jego otoczenie U w topologii C^r na M, że każdy dyfeomorfizm $g \in U$ jest topologicznie sprzężony z f. Podobnie mówimy, że pole wektorowe V klasy C^r na gładkiej, zwartej rozmaitości M jest C^r-strukturalnie stabilne, jeśli istnieje takie jego otoczenie U w topologii C^r na zbiorze C^r pól wektorowych na M, że potok dowolnego pola $X \in U$ jest topologicznie równoważny potokowi pola V.

Definicja 3.14. Niech M będzie rozmaitością klasy C^1, zaś N oraz W jej podrozmaitościami klasy C^1. Mówimy, że N i W przecinają się transwersalnie w punkcie $x \in N \cap W$ jeśli $T_xM = T_xN + T_xW$ (suma nie musi być prosta).

Definicja 3.15. Niech $f : M \to M$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^r zwartej, gładkiej rozmaitości M. Mówimy, że f jest dyfeomorfizmem Morse'a-Smale'a, jeśli

(a) f ma skończenie wiele punktów okresowych i każdy z nich jest hiperboliczny,

(b) $\Omega(f) = \mathrm{Per}(f)$,

(c) wszystkie przecięcia globalnych rozmaitości stabilnych i niestabilnych punktów okresowych są transwersalne.

Definicja 3.16. Elementami krytycznymi pola wektorowego V na rozmaitości M nazywamy jego punkty krytyczne oraz orbity zamknięte potoku tego pola.

Definicja 3.17. Niech V będzie polem wektorowym klasy C^r na zwartej, gładkiej rozmaitości M. Mówimy, że V jest polem Morse'a-Smale'a, jeśli

(a) V ma skończenie wiele elementów krytycznych i każdy z nich jest hiperboliczny,

(b) zbiór $\Omega(V)$ jest równy sumie elementów krytycznych pola V,

(c) wszystkie przecięcia globalnych rozmaitości stabilnych i niestabilnych elementów krytycznych są transwersalne.

Zadania

Zadanie 85. Dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiujemy jej promień spektralny jako $r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Pokazać, że dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje norma na $\mathbb{R}^n$ taka, że $\|A\| \leqslant r(A) + \delta$.

Zadanie 86. Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą hiperboliczną. Ustalmy bazę $e_1^1, ..., e_{n_1}^1, ..., e_1^m, ..., e_{n_m}^m$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w której A ma postać klatkową Jordana, tzn.

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{bmatrix},$$

gdzie dla $1 \leqslant k \leqslant m$ mamy

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \text{ dla pewnej rzeczywistej wartości własnej } \lambda \text{, bądź}$$

$$J_k = \begin{bmatrix} R & I_2 & & 0 \\ & R & I_2 & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & R \end{bmatrix} \text{ dla pewnej zespolonej wartości własnej } \lambda = a + ib,\ b > 0 \text{, gdzie}$$

$$R = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ oraz } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech V_k będzie podprzestrzenią odpowiadającą k-tej klatce, tzn. $V_k = \mathrm{span}\{e_1^k, ..., e_{n_k}^k\}$. Niech E^s będzie sumą prostą podprzestrzeni V_k odpowiadających wartościom własnym o module mniejszym niż 1, zaś E^u sumą prostą podprzestrzeni V_k odpowiadających wartościom własnym o module większym niż 1. Uzasadnić następujące fakty:

(i) $E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n$,

(ii) podprzestrzenie E^s oraz E^u są niezmiennicze, tzn. $A(E^s) \subset E^s,\ A(E^u) \subset E^u$,

(iii) dla $x \in E^s$ mamy $A^n x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ wykładniczo szybko oraz, jeśli A jest odwracalna, to $\|A^n x\| \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} \infty$ wykładniczo szybko,

(iv) dla $x \in E^u \setminus \{0\}$ mamy $\|A^n x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ wykładniczo szybko oraz, jeśli A jest odwracalna, to $A^n x \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ wykładniczo szybko,

(v) dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus (E^s \cup E^u)$ mamy $\|A^n x\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ wykładniczo szybko. Jeśli A jest odwracalna, to ta sama zbieżność zachodzi także przy $n \to -\infty$.

Zadanie 87. Pokazać, że macierze hiperboliczne tworzą gęsty i otwarty podzbiór zbioru macierzy rzeczywistych wymiaru $n \times n$.

Zadanie 88. Uzasadnić, że przekształcenie Poincarégo w Definicji 3.8 jest dobrze określone. Pokazać, że jeśli $\Theta_1,\ \Theta_2$ są dwoma przekształceniami Poincarégo w punktach $p_1,\ p_2$ orbity zamkniętej γ, to Θ_1 oraz Θ_2 są dyfeomorficznie sprzężone na odpowiednio małych otoczeniach p_1 oraz p_2.

Zadanie 89. Niech $\gamma = \mathrm{Orb}(x)$ będzie potoku φ_t pola wektorowego V na gładkiej rozmaitości M o okresie podstawowym t_0. Niech Θ będzie przekształceniem Poincarégo w punkcie x. Pokazać, że $\sigma(D\Theta(x)) \cup \{1\} = \sigma(D\varphi_{t_0}(x))$.

Zadanie 90. Niech V będzie stałym niewymiernym polem wektorowym na $\mathbb{T}^2$ (tzn. polem wyznaczonym przez stałe pole wektorowe (v_1, v_2) na $\mathbb{R}^2$, $\frac{v_1}{v_2} \notin \mathbb{Q}$. Pokazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje pole wektorowe Y, które ma dokładnie n orbit zamkniętych, odległe od V o mniej niż ε w metryce C^1.

Zadanie 91. Niech V pole wektorowe klasy C^1 na zwartej gładkiej rozmaitości M. Udowodnić, że zbiór punktów niebłądzących $\Omega(V)$ dla potoku generowanego przez V jest niepusty, zwarty i w pełni niezmienniczy. Udowodnić, że dla każdego $x \in M$ zbiór ω-graniczny $\omega(x)$ dla potoku generowanego przez V jest niepusty, zwarty, w pełni niezmienniczy i spójny.

Zadanie 92. Pokazać, że zbiór punktów niebłądzących $\Omega(V)$ dla potoku generowanego przez pole wektorowe V klasy C^1 na zwartej rozmaitości M zawiera zbiory ω-graniczne $\omega(x)$ dla każdego $x \in M$.

Zadanie 93. Niech γ będzie orbitą rekurencyjną potoku φ_t pola wektorowego V klasy C^1 na zwartej rozmaitości Riemanna M, tzn. dla każdego $p \in \gamma$ istnieje ciąg $t_n \to \infty$, taki że $\varphi_{t_n}(p) \to p$). Pokazać, że każdy punkt $p \in \gamma$ jest również rekurencyjny dla dyfeomorfizmu ϕ_1 „po czasie 1”, tzn. istnieje ciąg $n_k \to \infty$, $n_k \in \mathbb{N}$, taki że $\varphi_{n_k}(p) \to p$.

Zadanie 94. Niech γ będzie izolowaną orbitą zamkniętą pola wektorowego V klasy C^r na dwuwymiarowej zwartej rozmaitości M. Pokazać, że istnieje otoczenie $U \supset \gamma$, takie że dla każdego $p \in U$ albo $\alpha(p) = \gamma$, albo $\omega(p) = \gamma$.

Zadanie 95. Rozważmy następujące pola wektorowe na płaszczyźnie

$$V(x, y) = (x, y), \qquad W(x, y) = (x + y, -x + y).$$

Pokazać (wypisując explicite sprzężenie), że potoki pól V, W są topologicznie sprzężone.

Zadanie 96. Udowodnić, że dyfeomorfizmy rozmaitości zwartej, których różniczki w ich punktach stałych nie mają wartości własnej 1, tworzą zbiór otwarty i gęsty w C^1–topologii w zbiorze wszystkich dyfeomorfizmów.

Zadanie 97. Udowodnić, że dyfeomorfizmy okręgu, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne, tworzą zbiór otwarty i gęsty w C^1–topologii w zbiorze wszystkich dyfeomorfizmów.

Zadanie 98. Punkt okresowy p o okresie n nazywamy hiperbolicznym, jeśli moduły wartości własnych przekształcenia $Df^n(p)$ są różne od jedności. Udowodnić, że dyfeomorfizmy rozmaitości zwartej, których wszystkie punkty stałe są hiperboliczne, tworzą zbiór otwarty i gęsty w C^1–topologii w zbiorze wszystkich dyfeomorfizmów. Wykazać, że twierdzenie jest też prawdziwe dla zbioru dyfeomorfizmów, których punkty okresowe o okresie 7 są hiperboliczne.

Zadanie 99. Udowodnić, że zbiór dyfeomorfizmów rozmaitości zwartej wymiaru większego od 1, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne nie jest otwarty.

Zadanie 100. Udowodnić, że zbiór dyfeomorfizmów rozmaitości zwartej M wymiaru większego od 1, których wszystkie punkty okresowe są hiperboliczne ma niepuste wnętrze.

Zadanie 101. Pokazać, że potoki pól liniowych hiperbolicznych V i W w $\mathbb{R}^n$ są topologicznie sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy wymiar podprzestrzeni stabilnej dla V jest taki sam jak wymiar podprzestrzeni stabilnej dla W.

Zadanie 102. Pokazać, że jeśli pole liniowe V w $\mathbb{R}^n$ nie jest hiperboliczne, to można je zaburzyć zmieniając macierz definiującą pole w ten sposób, aby zmienił się wymiar podprzestrzeni stabilnej i niestabilnej.

Zadanie 103. Korzystając z twierdzenia Hadamarda–Perrona udowodnić, że globalne rozmaitości stabilna i niestabilna punktu stałego hiperbolicznego są immersyjnymi podrozmaitościami M.

Zadanie 104. Rozpatrzmy pole wektorowe w $\mathbb{R}^2$ zadane przez

$$V(x, y) = (2y, 4x - 4x^3).$$

Sprawdzić, że punkt $(0, 0)$ jest hiperbolicznym punktem krytycznym pola V, jego globalna rozmaitość stabilna pokrywa się z globalną rozmaitością niestabilną i jest podrozmaitością immersyjną, ale nie regularną w $\mathbb{R}^2$. (Wsk: Pole V jest postaci $\left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right)$ dla pewnej funkcji H, więc H jest całką pierwszą.)

Zadanie 105. Niech $p \in M$ będzie hiperbolicznym punktem stałym dyfeomorfizmu $f : M \to M$ gładkiej zwartej rozmaitości M. Załóżmy, że istnieje ciąg punktów okresowych $p_n \to p$, $p_n \neq p$. Pokazać, że wówczas istnieje także $p' \in W^u(p)$, $p' \neq p$ i ciąg punktów q_n, okresowych dla f, taki że $q_n \to p'$.

Zadanie 106. Pokazać, że jeśli $p \in M$ jest hiperbolicznym punktem stałym dla dyfeomerfizmu $f : M \to M$ klasy C^1 zwartej rozmaitości M, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje otoczenie U punktu p, takie że każdy punkt okresowy w $U \setminus \{p\}$ ma okres większy niż n.

Zadanie 107. Rozważmy przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$f(x, y, z) = (ax, ac(y + \varepsilon xz), cz),$$

gdzie $a > 1$, $0 < c < 1$, $ac > 1$, $\varepsilon > 0$. Twierdzenie Grobmana–Hartmana gwarantuje, że w małym otoczeniu $(0, 0, 0)$ to przekształcenie jest topologicznie sprzężone ze swoją częścią liniową w punkcie $(0, 0, 0)$, tzn. z

$$A(x, y, z) = (ax, acy, cz).$$

Pokazać, że to sprzężenie w żadnym otoczeniu $(0, 0, 0)$ nie jest klasy C^1.

Zadanie 108. Uzasadnić, że pole wektorowe klasy C^r (na gładkiej zwartej rozmaitości) z nieskończoną liczbą punktów krytycznych nie jest strukturalnie stabilne.

Zadanie 109 (Nieliniowa wersja zadania 102)**.** Udowodnić (naszkicować argument), że jeśli pole V klasy C^r na zwartej rozmaitości M jest C^r strukturalnie stabilne, to wszystkie punkty krytyczne są hiperboliczne.

Zadanie 110. Udowodnić, że jeśli dyfeomorfizm $f : M \to M$ jest strukturalnie stabilny, to wszystkie punkty stałe są hiperboliczne.

Zadanie 111. Niech V będzie polem wektorowym w M mającym orbitę zamkniętą. Niech φ_t będzie potokiem tego pola. Pokazać, że dyfeomorfizm φ_1 nie jest strukturalnie stabilny (chociaż oczywiście nie wyklucza to stabilności samego pola V).

Zadanie 112. Udowodnić, że pole gradientowe $V = \operatorname{grad} g$ klasy C^1 na zwartej rozmaitości M nie ma nietrywialnych orbit zamkniętych.

Zadanie 113. Udowodnić, że jeśli $V = \operatorname{grad} g$ jest polem gradientowym klasy C^1 na zwartej rozmaitości M, to dla każdego $x \in M$ zbiór $\omega(x)$ składa się z punktów krytycznych pola V.

Zadanie 114. Uzasadnić, że pole $V = \operatorname{grad} g$, $g(x, y, z) = -z$ na „postawionym torusie” nie jest polem Morse'a–Smale'a, a na (trochę) pochylonym torusie – jest.

Zadanie 115. Niech V pole wektorowe Morse'a–Smale'a klasy C^1 na zwartej rozmaitości M klasy C^1. Udowodnić, że dla każdego $x \in M$ zbiór ω-graniczny $\omega(x)$ jest pewnym elementem krytycznym (punktem krytycznym lub orbitą okresową) pola V.

Zadanie 116. Pokazać, że pole wektorowe Morse'a–Smale'a na spójnej i zwartej rozmaitości nie ma niestałych całek pierwszych.

Zadanie 117. Niech φ_t będzie potokiem pola wektorowego V klasy C^1 na zwartej gładkiej rozmaitości M. Niech $f : M \to M$, $f(x) = \varphi_1(x)$ będzie dyfeomorfizmem „po czasie 1”.

(a) Pokazać, że jeśli p jest hiperbolicznym punktem krytycznym pola V, to rozmaitości stabilne (odp. niestabilne) punktu p dla potoku φ_t oraz dyfeomorfizmu f pokrywają się.

(b) Pokazać, że jeśli V jest polem Morse'a–Smale'a bez orbit zamkniętych, to f jest dyfeomorfizmem Morse'a–Smale'a.

(c) Pokazać, że jeśli V jest polem Morse'a–Smale'a i ma orbity zamknięte, to f nie jest dyfeomorfizmem Morse'a–Smale'a.

Rozdział 4

Miary niezmiennicze i teoria ergodyczna

Definicje i twierdzenia

Definicja 4.1. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem mierzalnym.

Miarę μ nazywamy *T-niezmienniczą*, jeśli dla każdego $A \in \mathfrak{M}$ zachodzi $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Mówimy wtedy też, że T *zachowuje* miarę μ.

Definicja 4.2. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem mierzalnym.

Miarę μ nazywamy *ergodyczną*, jeśli dla każdego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ takiego, że $T^{-1}(A) = A$ zachodzi $\mu(A) = 0$ lub $\mu(X \setminus A) = 0$. Mówimy wtedy też, że przekształcenie T jest ergodyczne.

Definicja 4.3. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem mierzalnym.

Miarę μ nazywamy (*silnie*) *mieszającą*, jeśli dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathfrak{M}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Mówimy wtedy też, że przekształcenie T jest (silnie) mieszające (albo że jest *mieszaniem*).

Podobnie, miarę μ nazywamy *słabo mieszającą*, jeśli dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathfrak{M}$ zachodzi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(T^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Mówimy wtedy też, że przekształcenie T jest słabo mieszające (albo że jest *słabym mieszaniem*).

Definicja 4.4. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem mierzalnym.

σ-ciałem zbiorów niezmienniczych nazywamy zbiór $\mathcal{I} = \{A : \mu(A \div T^{-1}(A)) = 0\}$ (tutaj $A \div B$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów, tzn. $A \div B := A \setminus B \cup B \setminus A$).

Twierdzenie 4.1 (Twierdzenie Poincarégo o powracaniu)**.** Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną, a $T\colon X \to X$ przekształceniem mierzalnym zachowującym miarę μ. Niech $A \in \mathfrak{M}$. Wówczas dla μ-prawie każdego $x \in A$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że $T^n(x) \in A$, tzn. prawie każdy punkt zbioru A powraca do A nieskończenie wiele razy.

Definicja 4.5. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną, a $T\colon X \to X$ przekształceniem mierzalnym zachowującym miarę μ. Niech $A \in \mathfrak{M}$ będzie zbiorem o dodatniej mierze. Funkcję $\tau_A : A \to \mathbb{N}_+$ określoną wzorem

$$\tau_A(x) = \inf\{n > 0 : T^n(x) \in A\}.$$

nazywamy czasem pierwszego powrotu do A. Z twierdzenia Poincarégo wynika, że jest ono prawie wszędzie dobrze określone. Przekształcenie $T_A : A \to A$ określone jako

$$T_A(x) = T^{\tau_A(x)}(x)$$

nazywamy przekształceniem pierwszego powrotu do A.

Twierdzenie 4.2 (Lemat Kaca, czyli szacowanie średniego czasu powrotu punktu do zbioru)**.** Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną, a $T\colon X \to X$ przekształceniem mierzalnym, ergodycznym oraz zachowującym miarę μ. Wówczas

$$\int_A \tau_A(x) d\mu = 1.$$

Twierdzenie 4.3 (Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa)**.** Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną i niech $T : X \to X$ będzie przekształceniem zachowującym miarę μ. Wówczas, dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mu)$ zachodzi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) =: f^*(x) \text{ istnieje dla } \mu\text{-p.w. } x \in X.$$

Co więcej, $f^* \in L^1(\mu)$, $f^* = \mathbb{E}(f|\mathcal{I})$, $f^* \circ T = f^*$ μ-p.w. oraz $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f^* d\mu$. Ponadto, jeśli T jest ergodyczne, to $f^* = \int\limits_X f d\mu$ p.w.

Definicja 4.6. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną, a $T\colon X \to X$ przekształceniem mierzalnym zachowującym miarę μ.

Operatorem Koopmana na $L^p(\mu)$ dla $p \in [1, \infty]$ nazywamy operator $U_T : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ zadany jako $U_T f = f \circ T$.

Twierdzenie 4.4 (Twierdzenie ergodyczne von Neumanna)**.** Niech $U : H \to H$ będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta. Załóżmy, że $\|U\| \leqslant 1$. Wówczas, dla dowolnego $x \in H$ zachodzi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n x = Px,$$

gdzie $P : H \to H$ jest rzutem ortogonalnym na domkniętą podprzestrzeń $H_U := \{x \in H : Ux = x\}$. Co więcej,

$$H = H_U \oplus H_0,$$

gdzie $H_0 := \overline{\{x - Ux : x \in H\}}$.

Definicja 4.7 (Automorfizm Bernoulliego)**.** Niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Rozważmy produktową przestrzeń probabilistyczną $(\prod_{i=0}^{\infty} X, \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}, \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mu)$. Automorfizmem Bernoulliego nazywamy mierzalne odwzorowanie $\sigma : \prod_{i=0}^{\infty} X \to \prod_{i=0}^{\infty} X$ zadane jako przesunięcie w lewo

$$\sigma((x_i)_{i=0}^{\infty}) = (x_{i+1})_{i=0}^{\infty},$$

zachowujące miarę $\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mu$.

Zadania

Zadanie 118. Pokazać, że miara μ jest T-niezmiennicza na X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu$$

dla każdej funkcji $f \in L^1(\mu)$. Wywnioskać stąd, że operator Koopmana jest izometrią na $L^p(\mu),\ p \in [1, \infty)$.

Zadanie 119. Pokazać, że przekształcenie T zachowujące miarę probabilistyczną μ jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mu(T^{-1}(A) \div A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = 0 \text{ lub } \mu(A) = 1.$$

Zadanie 120. Udowodnić twierdzenie Poincarégo o powracaniu.

Zadanie 121. Niech μ miara probabilistyczna T-niezmiennicza na X. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(a) μ jest ergodyczna,

(b) dla każdej mierzalnej funkcji f, jeśli $f \circ T = f$ μ-p.w., to $f = \text{const}$ μ-p.w.,

(c) dla każdej mierzalnej funkcji f, jeśli $f \circ T \leqslant f$ μ-p.w., to $f = \text{const}$ μ-p.w.

Zadanie 122. Niech μ miara probabilistyczna T-niezmiennicza na X. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(1) μ jest ergodyczna.

(2) Dla każdego mierzalnego $A \subset X$, jeśli $\mu(A \div T^{-1}(A)) = 0$, to $\mu(A) = 0$ lub 1.

(3) Dla każdego mierzalnego $A \subset X$, jeśli $\mu(A) > 0$, to $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)) = 1$.

(4) Dla każdej funkcji $f \in L^1(\mu)$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \int_X f d\mu.$$

(5) Dla każdej mierzalnej funkcji f, jeśli $f \circ T = f$ μ-p.w., to $f = \text{const}$ μ-p.w.

(6) Dla każdej mierzalnej funkcji f, jeśli $f \circ T \leqslant f$ μ-p.w., to $f = \text{const}$ μ-p.w.

(7) Dla każdych mierzalnych $A, B \subset X$, jeśli $\mu(A), \mu(B) > 0$, to istnieje $n > 0$ takie, że $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$.

(8) Dla każdych mierzalnych $A, B \subset X$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

(9) Dla każdych funkcji $f, g \in L^2(\mu)$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle U_T^k(f), g\rangle = \langle f, 1\rangle\langle 1, g\rangle,$$

(10) 1 jest prostą wartością własną operatora Koopmana na $L^2(\mu)$ (tzn. jej podprzestrzeń własna jest jednowymiarowa).

Zadanie 123. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną, a $T\colon X \to X$ przekształceniem mierzalnym zachowującym miarę μ. Niech $A \in \mathfrak{M}$ będzie zbiorem o dodatniej mierze. Pokazać, że przekształcenie indukowane T_A zachowuje miarę $\mu|_A$. Pokazać, jeśli miara μ była ergodyczna dla T, to miara μ_A jest ergodyczna dla T_A.

Zadanie 124. Udowodnić Lemat Kaca.

Zadanie 125. Udowodnić, że rodzina zbiorów niezmienniczych $\mathcal{I}$ jest σ-ciałem. Pokazać, że każda funkcja $\psi : X \to \mathbb{C}$ mierzalna względem tego σ-ciała jest (μ-prawie wszędzie) T-niezmiennicza, tzn. $\psi \circ T = \psi$ μ-prawie wszędzie.

Zadanie 126. Pokazać, że jeśli μ_1 jest miarą ergodyczna T-niezmienniczą i μ_2 jest miarą T-niezmienniczą absolutnie ciągłą względem μ_1, to $\mu_1 = \mu_2$.

Zadanie 127. Pokazać, że jeśli μ_1, μ_2 są miarami ergodycznymi T-niezmienniczymi, to $\mu_1 = \mu_2$ lub μ_1 i μ_2 są wzajemnie singularne.

Zadanie 128. Udowodnić, że automorfizm Bernoulliego jest ergodyczny i jest mieszaniem.

Rozdział 5

Teoria ergodyczna układów dynamicznych

Definicje i twierdzenia

Definicja 5.1. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $T : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym. Przez $\mathcal{M}(X)$ oznaczamy zbiór zespolonych miar borelowskich na X, a przez $\mathrm{Prob}(X)$ zbiór borelowskich miar probabilistycznych na X. Przez $T_* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ oznaczamy odwzorowanie zadane jako

$$T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)),$$

czyli *transport miary* μ przez odwzorowanie T. Zbiór

$$\mathcal{M}_T(X) = \{\mu \in \mathrm{Prob}(X) : T_*\mu = \mu\}$$

nazywamy *sympleksem miar niezmienniczych.*

Twierdzenie 5.1 (Twierdzenie Kryłowa-Bogolubowa)**.** Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $T : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym. Wówczas $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$, tzn. istnieje przynajmniej jedna miara probabilistyczna T-niezmiennicza.

Definicja 5.2. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $T : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym.

Odwzorowanie T nazywamy *jednoznacznie ergodycznym (ang. uniquely ergodic)*, gdy $\mathcal{M}_T(X)$ jest zbiorem jednoelementowym.

Odwzorowanie T nazywamy *ściśle ergodycznym (ang. strictly ergodic)*, gdy jest jednoznacznie ergodyczne oraz jedyna miara probabilistyczna niezmiennicza ma pełen nośnik.

Definicja 5.3. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni liniowej E. Punkt $x \in A$ nazywamy *punktem ekstremalnym* zbioru A, gdy nie jest on punktem wewnętrznym żadnego odcinka o końcach w A, tzn.

$$\underset{y,z\in A}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\forall}\ x = ty + (1-t)z \Longrightarrow x = y = z.$$

Zadania

Zadanie 129. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $T : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym. Pokazać, że zbiór miar niezmienniczych jest zbiorem wypukłym oraz zwartym w topologii *-słabej.

Zadanie 130. Udowodnić twierdzenie Kryłowa-Bogolubowa.

Zadanie 131. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $T : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym. Pokazać, że miary probabilistyczne ergodyczne są dokładnie punktami ekstremalnymi $\mathcal{M}_T(X)$. Wywnioskować stąd, że takie odwzrowanie zawsze posiada miarę ergodyczną probabilistyczną. Zauważyć, że jeśli odwzorwanie T jest jednoznacznie ergodyczne, to jedyna miara niezmiennicza probabilistyczna jest ergodyczna.

Zadanie 132. Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $T : X \to X$ odwzorowaniem ciągłym. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) T jest jednoznacznie ergodyczne,

(ii) dla każdej funkcji $f \in C(X)$ oraz dla dowolnego $x \in X$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = C_f,$$

gdzie C_f jest stałą niezależną od x,

(iii) dla dowolnego $f \in C(X)$, zbieżność w punkcie (ii) zachodzi w sensie jednostajnym,

(iv) zbieżność w punkcie (ii) zachodzi dla funkcji f z gęstego podzbioru $C(X)$.

Pokazać, że jeśli powyższe warunki zachodzą, to $C_f = \int\limits_X f d\mu$, gdzie μ jest jedyną niezmienniczą miarą probabilistyczną.

Zadanie 133. Udowodnić, że miara niezmiennicza μ dla przekształcenia T na przestrzeni topologicznej X jest skupiona na zbiorze punktów niebłądzących $\Omega(T)$ (tzn. $\mu(\Omega(T)) = \mu(X)$).

Zadanie 134. Niech X, Y będą zwartymi przestrzeniami metrycznymi, $T : X \to X$, $S : Y \to Y$ odwzorowaniami ciągłymi, topologicznie sprzężonymi przez homeomorfizm $h : X \to Y$. Pokazać, że odwzorowanie $h_* : \mathcal{M}_T(X) \to \mathcal{M}_T(Y)$ jest homeomorfizmem (w topologii *-słabej).

Zadanie 135. Zbadać, czy następujące przekształcenia są ergodyczne:

- Obrót na okręgu, z miarą Lebesgue'a.
- Hiperboliczny automorfizm torusa T^2 z miarą Lebesgue'a.
- Automorfizm torusa T^4 określony macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

z miarą Lebesgue'a.

- Dyfeomorfizm okręgu $\mathbb{S}^1$ klasy C^2 z niewymierną liczbą obrotu i jedyną (jaką?) miarą niezmienniczą.
- Dowolny homeomorfizm $\mathbb{S}^1$ z niewymierną liczbą obrotu (najpierw ustalić ile ma miar niezmienniczych).

Zadanie 136. Pokazać, że przekształcenie $T : [0,1] \to [0,1]$ określone wzorem $T(x) = 2x \mod 1$ zachowuje miarę Lebesgue'a i jest ergodyczne.

Zadanie 137. Pokazać, że przekształcenie $T : [-1,1] \to [-1,1]$ określone wzorem

$$T(x) = 2x^2 - 1$$

zachowuje miarą równoważną mierze Lebesgue'a. Znaleźć jej gęstość.

Zadanie 138. Pokazać, że jeśli $T(z) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$, gdzie $x \in (0,1]$ (tzn. T jest tzw. *przekształceniem Gaussa*), to T zachowuje miarę z gęstością $\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x+1}$.

Zadanie 139. Pokazać, że jeśli $T(z) = z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$, gdzie $z, a_k \in \mathbb{C}$, $|a_k| < 1$ (tzn. T jest tzw. *produktem Blaschke* takim, że $T(0) = 0$), to T zachowuje miarę Lebesgue'a na okręgu jednostkowym.

Zadanie 140. Definiujemy przekształcenia $g\colon [0,1] \to [0,1]$ oraz $g_a\colon [0,1] \to [0,1]$ dla $a \in (0,1)$ wzorami:

$$g(x) = (2x) \mod 1, \qquad g_a(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & \text{dla } x \in [0,a) \\ \frac{x-a}{1-a} & \text{dla } x \in [a,1] \end{cases}.$$

(a) Sprawdzić, że przekształcenia g, g_a zachowują miarę Lebesgue'a na odcinku $[0,1]$.

(b) Wykazać, że przekształcenia g_a i g są topologicznie sprzężone.

(c) Niech homeomorfizm $h_a\colon [0,1] \to [0,1]$ będzie sprzężeniem między g oraz g_a, tzn.

$$h_a \circ g_a = g \circ h_a.$$

Wykazać, że miara $\mu_a = (h_a)_*(\mathcal{L})$, czyli obraz miary Lebesgue'a $\mathcal{L}$ przy przekształceniu h_a, jest niezmiennicza dla g.

(d) Mamy więc nieprzeliczalnie wiele różnych miar niezmienniczych dla g, wszystkie bezatomowe, o nośniku (topologicznym) będącym całym odcinkiem. Wykazać, że miary μ_a są parami różne.

(e) Wykazać, że miary μ_a są parami singularne.

Zadanie 141 (Przekształcenie piekarza)**.** Rozważamy kwadrat $X = [0,1]^2$ z miarą Lebesgue'a, określoną na σ-ciele zbiorów borelowskich. Definiujemy przekształcenie $T : X \to X$ wzorem

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}),\ y \in [0,1] \\ (2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) & \text{dla } x \in [\frac{1}{2}, 1],\ y \in [0,1] \end{cases}.$$

Wykazać, że T zachowuje miarę Lebesgue'a. Poszukać gęstych orbit.

Zadanie 142 (Przykład nieskończonej mierze niezmienniczej)**.** Rozważamy przekształcenie $T : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$T(x) = x - \frac{1}{x}.$$

Wykazać, że T zachowuje miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, w następujący sposób:

- Ustalić punkt $y \in \mathbb{R}$ i wyznaczyć jego dwa przeciwobrazy x_1, x_2, czyli takie punkty, że $T(x_1) = T(x_2) = y$.
- Obliczyć $T'(x_1)$, $T'(x_2)$ i sprawdzić, że $\frac{1}{T'(x_1)} + \frac{1}{T'(x_2)} = 1$.
- Przekonać się, że powyższa tożsamość wystarczy do wykazania, że przekształcenie T zachowuje miarę Lebesgue'a.
- Zaproponować bardziej ogólne twierdzenie, na podstawie tego przykładu.

Zadanie 143. Niech $f\colon \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = a \operatorname{tg} x$, gdzie $a > 1$. Wykazać że miara z gęstością

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi}\frac{p}{p^2 + x^2}$$

jest niezmiennicza dla f, jeśli p jest liczbą dodatnią spełniającą równanie

$$a \operatorname{tgh} p = p.$$

Zadanie 144. Niech $f\colon \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \operatorname{tg} x$. Wykazać, że miara z gęstością $\frac{1}{x^2}$ jest niezmiennicza dla f. Jest to jednak miara nieskończona. Czy przekształcenie $f(x) = \tan(x)$ ma skończoną miarę niezmienniczą bezwzględnie ciągłą względem miary Lebesgue'a?

Zadanie 145. Niech $T : (0, 1] \to (0, 1]$, $T(x) = 1/x - [1/x]$, będzie przekształceniem Gaussa. Wiadomo (por. zadanie 138), że T zachowuje miarę z gęstością $\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x+1}$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Wykazać, że przekształcenie

$$T_n(x) = \begin{cases} nx & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ T(x) & \text{dla } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

zachowuje tę samą miarę.

Zadanie 146 (Przesunięcie na torusie)**.** Dla $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, niech $T_{(\alpha_1,\alpha_2)}(x, y) = (x + \alpha_1, y + \alpha_2) \mod 1$ będzie przesunięciem na torusie z Zadania 18. Sprawdzić, że ten dyfeomorfizm zachowuje miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}^2$, a następnie wykazać, że jeżeli $1, \alpha_1, \alpha_2$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$, to $T_{(\alpha_1,\alpha_2)}$ ma dokładnie jedną probabilistyczną borelowską miarę niezmienniczą.

Zadanie 147. Udowodnić, że przesunięcie $T(x) = x + \alpha$ na torusie $\mathbb{T}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy, gdy $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$.

Zadanie 148. Pokazać, że jeśli $T(x) = Ax$ jest algebraicznym automorfizmem torusa $\mathbb{T}^n$ (tzn. A jest macierzą całkowitoliczbową oraz $\det A = \pm 1$), to T zachowuje miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}^n$.

Zadanie 149. Udowodnić, że algebraiczny automorfizm torusa $\mathbb{T}^n$, $T(x) = Ax$ jest ergodyczny wtedy i tylko wtedy, gdy A nie ma wartości własnych, które są pierwiastkami z 1.

Zadanie 150. Ile miar niezmienniczych ma homeomorfizm okręgu o niewymiernej liczbie obrotu? Czym jest nośnik miary niezmienniczej?

Zadanie 151. Wykazać że miara niezmiennicza dla dyfeomorfizmu okręgu klasy C^1 o niewymiernej liczbie obrotu jest albo bezwzględnie ciągła, albo singularna względem miary Lebesgue'a.

Zadanie 152. Niech T będzie homeomorfizmem okręgu z niewymierną liczbą obrotu i niech μ będzie borelowską miarą T-niezmienniczą. Ustalmy $x_0 \in \mathbb{S}^1$. Dla $x \in \mathbb{S}^1$ oznaczamy przez (x_0, x) dodatnio zorientowany łuk o końcach x_0, x. Określamy przekształcenie $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ wzorem

$$h(x) = \exp(2\pi i \mu(x_0, x)).$$

Wykazać, że h jest półsprzężeniem T z obrotem R_α o kąt α równy liczbie obrotu T.

Zadanie 153. Wykazać, że jeśli dyfeomorfizm okręgu klasy C^1 jest sprzężony lipschitzowsko z niewymiernym obrotem, to sprzężenie jest w istocie klasy C^1.

Zadanie 154. Niech T będzie dyfeomorfizmem okręgu o niewymiernej liczbie obrotu. Wykazać że miara niezmiennicza dla T jest bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a z gęstością klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homeomorfizm h sprzęgający T z obrotem i jest on klasy C^{r+1}.

Dynamika holomorficzna

Definicje i twierdzenia

...

Zadania

Zadanie 155. Załóżmy, że okrąg jednostkowy jest całkowicie niezmienniczy dla wielomianu P stopnia $d \geqslant 2$. Pokazać, że $P(z) = e^{i\theta} z^d$ dla pewnego $\theta \in \mathbb{R}$.

Zadanie 156. Pokazać, że jeśli P wielomian stopnia $d \geqslant 2$, to $J(P) = [-1, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P = \pm P_d$, gdzie P_d jest wielomianem Czebyszewa (tzn. $P_d(\cos(z)) = \cos(dz)$).

Zadanie 157. Niech $P(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$, $|c| \leqslant \frac{1}{4}$. Pokazać, że:

- jeśli $|z| < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - |c|}$, to $P^n(z) \to z_0$ gdy $n \to \infty$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C}$,
- jeśli $|z| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$, to $P^n(z) \to \infty$ gdy $n \to \infty$.

Zadanie 158. Pokazać, że jeśli skończony zbiór $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ jest całkowicie niezmienniczy dla pewnej funkcji wymiernej f stopnia $d \geqslant 2$, to A ma co najwyżej dwa elementy.

Zadanie 159. Ile płatków w otoczeniu 0 ma przekształcenie $f(z) = -z + z^{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$?

Zadanie 160. Pokazać, że $f(z) = \frac{z}{2-z^2}$ ma punkt przyciągający, którego bezpośredni basen przyciągania jest nieskończenie spójny.

Zadanie 161. Pokazać, że zbiór Fatou dla $f(z) = \frac{z}{1+z-z^2}$ ma jedną składową, którą jest nieskończenie spójny basen paraboliczny.

Zadanie 162. Zbadać dynamikę przekształcenia $f(z) = \frac{3z^2+1}{z^2+3}$.

Zadanie 163. Pokazać, że jeśli przekształcenie wymierne stopnia $d \geqslant 2$ ma d superścieków, to jest konforemnie sprzężone z metodą Newtona dla pewnego wielomianu stopnia d.

Zadanie 164. Niech $a_2, a_3, \ldots$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi, dla których szereg $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ma dodatni promień zbieżności. Niech $f(z) = 2z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ dla tych $z \in \mathbb{C}$, dla których szereg $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny. Udowodnić, że istnieją: taka liczba $\varrho > 0$ i takie różnowartościowe przekształcenie analityczne $h\colon \mathbb{D}(0, \varrho) \to \mathbb{C}$, że $h(2z) = f(h(z))$ dla każdego $z \in \mathbb{D}(0, \varrho)$, gdzie $\mathbb{D}(0, \varrho) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < \varrho\}$.

Zadanie 165. Dla jakiego $a \in \mathbb{C}$ funkcja $z \mapsto \exp(az)$ ma punkt stały, w którym jej pochodna jest równa 1.

Zadanie 166. Co można powiedzieć o zbiorze tych $a \in \mathbb{C}$, dla których odwzorowanie $a \in \mathbb{C}$ funkcja $z \mapsto \exp(az)$ ma punkt stały, w którym moduł pochodnej jest równy 1?

Zadanie 167. Udowodnić, że w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$ funkcja $\exp(z)$ ma dokładnie jeden punkt stały oraz że moduł pochodnej w nim jest większy od 1.

Zadanie 168. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ oraz $n < -1$ w zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : 2n\pi < \operatorname{Im}(z) < 2(n+1)\pi\}$ funkcja $\exp(z)$ ma dokładnie jeden punkt stały oraz że moduł pochodnej w nim jest większy od 1.

Zadanie 169. Niech $f(z) = e^z$. Udowodnić, że dla każdego ciągu liczb całkowitych

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k)$$

istnieje taki punkt okresowy p przekształcenia f, że $\operatorname{Im}(f^j(p)) \in (2n_j\pi, (2n_j + 1)\pi)$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Ile jest takich punktów okresowych dla danego ciągu $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$? Udowodnić, że $|(f^k)'(p)| > 1$.

Zadanie 170. Niech $f(z) = e^z$. Niech $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(f^n(z)) \in (0, 2\pi) \text{ dla } n \geqslant 0\}$. Udowodnić, że $\ell_2(A) = 0$, gdzie ℓ_2 oznacza dwuwymiarową miarę Lebesgue'a.

Zadanie 171. Opisać zbiory Julii homografii.

Zadanie 172. Niech $f(z) = \sin z$, $g(z) = \sinh z$. Wykazać, że zbiór Julii przekształcenia f nie jest całą płaszczyzną. Wykazać, że zbiór Julii przekształcenia g nie jest całą płaszczyzną.

Zadanie 173. Ile punktów stałych ma przekształcenie $\mathbb{C} \ni z \mapsto \sin z \in \mathbb{C}$?

Rozdział 6

Przekształcenia quasikonforemne

Definicje i twierdzenia

...

Zadania

Zadanie 174. Operator

$$S\varphi = \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2$$

nazywamy *pochodną Schwarza*. Sprawdzić, że jeśli φ jest homografią, to $S\varphi = 0$. Sprawdzić następującą formułę opisującą zachowanie pochodnej Schwarza przy składaniu przekształceń:

$$S(f \circ g) = (Sf \circ g)\,(g')^2 + S(g).$$

Rozważyć szczególny przypadek, gdy jedno z przekształceń jest homografią.

Zadanie 175. Niech $\varphi : I \to J$, gdzie I oraz J są odcinkami. Pokazać, że jeśli $S\varphi > 0$, to φ zwiększa odległość w metryce hiperbolicznej, a jeśli $S\varphi < 0$ — to zmniejsza.

Zadanie 176. Pokazać, że metryka hiperboliczna jest niezmiennikiem odwzorowań konforemnych dysku w siebie.

Zadanie 177 (Zachowanie metryki hiperbolicznej przy brzegu obszaru)**.** Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$, na którym istnieje metryka hiperboliczna (do tego wystarczy, aby w uzupełnieniu Ω były co najmniej dwa punkty). Niech ρ będzie funkcją definiującą metrykę. Pokazać, że istnieje stała C, taka że

$$\rho(x) \leqslant \frac{C}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}.$$

Czy stałą C można wybrać uniwersalną (niezależną od obszaru)? Rozważyć obszar $\Omega = \mathbb{D}\backslash\{0\}$, aby uzasadnić, że (ogólnie) nie istnieje stała c, taka że

$$\rho(x) \geqslant \frac{c}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}$$

To drugie szacowanie jest natomiast prawdziwe, gdy obszar Ω jest jednospójny (co też można spróbować uzasadnić).

Zadanie 178 (Długość ekstremalna). *Metryki dopuszczalne* to takie funkcje ϱ, mierzalne w $\mathbb{C}$, że

$$A(\varrho) = \iint_{\mathbb{C}} \varrho^2 dxdy < \infty.$$

Niech Γ oznacza rodzinę krzywych parametryzowanych odcinkiem domkniętym, półotwartym lub okręgiem. Niech, dla krzywej $\gamma \in \Gamma$,

$$L_\gamma(\varrho) = \int_\gamma \varrho(z)|dz|$$

oznacza długość tej krzywej (o ile istnieje) w metryce ϱ. Mamy wówczas, z definicji,

$$L_\Gamma(\varrho) = \inf_{\gamma\in\Gamma} L_\gamma(\varrho).$$

Długością ekstremalną nazywamy liczbę

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\varrho: A(\varrho)<\infty} \frac{(L_\Gamma(\varrho))^2}{A(\varrho)}.$$

Można zdefiniować

$$\operatorname{mod}\Gamma = \inf_\gamma \int_{\mathbb{C}} \varrho^2 dxdy,$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich takich ϱ, że dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$,

$$\int_\gamma \varrho(z)|dz| \geqslant 1.$$

Pokazać, że wówczas $\operatorname{mod}\Gamma = 1/\lambda(\Gamma)$.

Zadanie 179. Dla danych okręgów współśrodkowych C_1 i C_2 o promieniach odpowiednio r_1 i r_2, rozważmy rodzinę Γ krzywych łączących te dwa okręgi. Mamy wówczas

$$\frac{(L_\Gamma(\varrho))^2}{A(\varrho)} \leqslant \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Pokazać, że $\varrho(z) := 1/|z|$ realizuje to supremum.

Zadanie 180. Na krzywej Jordana C wybieramy cztery dowolne, różne punkty p_1, p_2, q_1 i q_2. Niech d_1 będzie odległością między łukami p_1p_2 i q_1q_2 , a d_2 — między łukami p_1q_1 i p_2q_2. Pokazać, że $d_1d_2 \leqslant \mu(\Omega_C)$, gdzie Ω_C) jest obszarem ograniczonym przez krzywą C.

Zadanie 181. Niech (Ω_1, ϱ_1) i (Ω_2, ϱ_2) będą obszarami jednospójnymi, wyposażonymi w metryki hiperboliczne. Pokazać, że jeśli $\Omega_1 \subset \Omega_2$, to $\varrho_1 \geqslant \varrho_2$.

Zadanie 182. Niech

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k.$$

Pokazać, że φ jest uniwalentne i znaleźć obraz dysku jednostkowego $\varphi(\mathbb{D}(0, 1))$.

Zadanie 183. Rozważmy obszar Ω z gładkim brzegiem $\partial\Omega$. Na brzegu określamy funkcję u. Niech v będzie funkcją na Ω, taką że $v_{\partial\Omega} = u$. Przez D_0 oznaczmy minimum funkcjonału Dirichleta $D(v)$ po wszystkich v. Pokazać, że minimum jest realizowane przez funkcję harmoniczną.

Zadanie 184. Niech $\mu_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$, $\nu_f = \frac{\overline{f_{\bar{z}}}}{f_z}$. Sprawdzić, że $\frac{1}{2}\arg \nu_f$ jest kierunkiem dłuższej osi elipsy będącej obrazem okręgu przy działaniu różniczki Df. Sprawdzić, że $\mu_{f^{-1}} = -\nu_f \circ f^{-1}$. Wyrazić $\mu_{g \circ f}$ przez μ_g, μ_f przy założeniu, że jedno z tych przekształceń jest konforemne.

Zadanie 185. Niech A będzie homografią zachowującą górną półpłaszczyznę $\mathbb{H}$. Załóżmy, że μ jest taką różniczką Beltramiego w $\mathbb{H}$, że

$$\mu = (\mu \circ A)\frac{\overline{A'}}{A'}.$$

Niech f będzie takim quasikonforemnym przekształceniem $\mathbb{H}$ w $\mathbb{H}$, że $\mu_f = \mu$. Pokazać, że wówczas

$$\mu_{f \circ A} = \mu_f.$$

Stąd wynika, że

$$B = f \circ A \circ f^{-1}$$

jest konforemnym przekształceniem $\mathbb{H}$ w $\mathbb{H}$, czyli homografią.

Zadanie 186. Uzasadnić, że unormowane (przez warunki $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = \infty$) rozwiązanie równania Beltramiego jest jednoznaczne.

Wskazówki i rozwiązania

1. *Szkic rozwiązania:*
Załóżmy, że trajektoria $X = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ jest zwarta. Wtedy dla każdego $n \geqslant 0$ zbiór $f^n(X)$ jest zwarty, jako ciągły obraz zbioru zwartego i jest zstępujący, więc istnieje $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$. Mamy $y \in X$, więc $y = f^k(x)$ dla pewnego $k \geqslant 0$ i $y \in f^{k+1}(X)$, więc $y = f^{k+p}(x)$ dla pewnego $p \geqslant 1$. Zatem, $f^k(x)$ jest okresowy z okresem p.

7. *Wskazówka:* Weźmy punkty

$$x_5 < x_3 < x_1 < x_2 < x_4$$

niech $f(x_i) = x_{i+1}$, przedłużamy do kawałkami liniowego (jest to „orbita Štefana").

13. *Wskazówka:* Rozpatrzyć punkty płaszczyzny o współrzędnych wymiernych.

18. *Wskazówka:* Można rozumować tak jak w przypadku obrotu niewymiernego: wskazać jakiś punkt skupienia trajektorii, wybrać punkty $T^n(x), T^m(x)$ bliskie sobie i... Można też podejść do problemu analitycznie i rozważyć funkcje postaci $f(x,y) = e^{ikx}e^{imx}$ gdzie $k, m \in \mathbb{Z}$. Sprawdzić, że dla tych funkcji teza punktu (c), przy wiadomym założeniu, zachodzi i wywnioskować stąd.

40. *Wskazówka:* Można założyć (dlaczego?), że $f(x) > x, g(x) > x$ dla $x \in (0,1)$. Wybierzmy punkt $x_0 \in (0,1)$ i odcinki $I_f = [x_0, f(x_0)]$, $I_g = [x_0, g(x_0)]$. Przekształćmy I_f na I_g jakimś rosnącym homeomorfizmem h. Jak rozszerzyć h na cały odcinek $[0,1]$, aby otrzymać żądane sprzężenie?

59. *Wskazówka:* Pokazać, że jeśli (a_n) jest takim ciągiem nieujemnych liczb rzeczywistych, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi nierówność $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n + 1$, to istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

61. *Wskazówka:* Użyć kodowania przez rozwinięcia dwójkowe.

68. *Wskazówka:* Rozpatrzyć odpowiedni obrót na okręgu.

85. *Wskazówka:* Rozpatrzyć postać Jordana macierzy A. Następnie tak zmienić bazę, aby niezerowe wyrazy poza przekątną wyniosły δ.

86. *Wskazówka:* Skorzystać z zad. 85.

88. *Wskazówka:* Aby sprawdzić, że Θ jest dobrze określone, założyć że S ma w pewnym lokalnym układzie współrzędnych postać $S = \{(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\}$ i skorzystać z twierdzenia o funkcji uwikłanej.

93. *Szkic rozwiązania:*
Mamy $\varphi_{n_k}(p) \to p$ dla pewnego ciągu $t_k \to \infty$. Zapiszmy $t_k = n_k + v_k$, $n_k \in \mathbb{N}$. Z ciągu v_k można wybrać podciąg zbieżny $v_k \to v$. Mamy

$$\varphi_{n_k+v_k} = \varphi_{v_k-v} \circ \varphi_{n_k+v}.$$

Ponieważ $\varphi_{v_k-v} \rightrightarrows 0$, więc stąd wynika, że

$$\varphi_{n_k+v}(p) \to p.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta_1 > 0$, takie że

$$||\varphi_w - \mathrm{id}|| < \varepsilon \tag{6.1}$$

Istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie że

$$|Nv - [Nv]| < \delta_1 \tag{6.2}$$

(Jeśli v jest liczbą wymierną, to oczywiście taka nierówność jest spełniona nawet z $\delta_1 = 0$). Z faktu, że $\varphi_{n_k+v(p)} \to p$ wynika, że istnieje punkt $\varphi_{n_1+v(p)}$ (dla pewnego n_1), taki że

$$d(\varphi_{n_1+v}(p), p) < \frac{\varepsilon}{N} \tag{6.3}$$

Rozważmy dyfeomorfizm φ_{n+1+v}. Ponieważ jest on jednostajnie ciągły, to istnieje $\delta_2 > 0$, takie że jeśli $d(x, y) < \delta_2$, to $d(\varphi_{n_1+v}(x), \varphi_{n_1+v}(y)) < \frac{\varepsilon}{N}$.

Ponieważ p jest punktem skupienia punktów trajektorii postaci $\varphi_{n_k+v}(p)$, więc istnieje n_2, takie że

$$d(\varphi_{n_2+v}(p), p) < \delta_2.$$

Wówczas

$$d(\varphi_{n_1+v}(\varphi_{n_2+v}(p)), \varphi_{n_1+v}(p)) < \frac{\varepsilon}{N}$$

lub

$$d(\varphi_{n_1+n_2+2v}(p), \varphi_{n_1+v}(p)) < \frac{\varepsilon}{N}. \tag{6.4}$$

Łącząc (6.3) i (6.4) mamy

$$d(\varphi_{n_1+n_2+2v}(p), p) < \frac{2\varepsilon}{N}$$

Dalej trzeba wykonać $N - 2$ takich kroków. Zatem w następnym kroku

- rozważamy dyfeomorfizm $\varphi_{n_1+n_2+2v}$,
- dobieramy δ_3, tak żeby $d(x, y) < \delta_3 \Rightarrow d(\varphi_{n_1+n_2+2v}(x), \varphi_{n_1+n_2+2v}(y)) < \frac{\varepsilon}{N}$,
- wybieramy n_3, takie że $d(p, \varphi_{n_3+v}(p)) < \delta_3$.

Mamy więc
$$d(\varphi_{n_1+n_2+n_3+3v}(p), \varphi_{n_1+n_2+2v}(p)) < \frac{\varepsilon}{N} \tag{6.5}$$
Łącząc (6.4) i (6.5), otrzymujemy
$$d(\varphi_{n_1+n_2+n_3+3v}(p), p) < \frac{3\varepsilon}{N},$$
i po N krokach mamy
$$d(\varphi_{n_1+n_2+\dots+n_N}(p), p) < \frac{N\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$
Teraz wystarczy skorzystać z własności (6.1) i (6.2). Otrzymujemy
$$d(\varphi_n(p), p) < 2\varepsilon$$
dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

94. *Wskazówka:* Rozpatrzyć cięcie Poincarégo.

95. *Szkic rozwiązania:*
Potok pola V jest dany wzorem $\phi_t(x, y) = e^t(x, y)$ zaś potok pola W
$$\psi_t(x, y) = e^t(x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t)$$
Zdefiniujmy homeomorfizm h następująco:

(1) $h|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{id}$

(2) Każda trajektoria pola V (poza zerową) przecina $\mathbb{S}^1$ w dokładnie jednym punkcie. Dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$ niech $t(x, y)$ będzie określone jako „czas dojścia" do okręgu S^1, tzn. $t(x, y)$ jest jedyną taką liczbą, że $\phi_t(x, y) \in \mathbb{S}^1$

Określamy
$$h(x, y) = \psi^{-1}_{t(x,y)} \circ \phi_{t(x,y)}(x, y)$$
dla $(x, y) \neq (0, 0)$. Wówczas h jest ciągłe w $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ i przedłuża się do ciągłej w $\mathbb{R}^2$ przez położenie $h(0, 0) = (0, 0)$. Należy też uzasadnić, że h jest homeomorfizmem.

Ponadto h jest szukanym sprzężeniem, tzn.
$$\psi_t \circ h = h \circ \phi_t.$$
Istotnie, mamy $t(\phi_t(x, y)) = t(x, y) - t$, zatem $h(\phi_t(x, y)) = \psi^{-1}_{t(x,y)-t} \circ \phi_{t(x,y)}(x, y)$. Natomiast
$$\psi_t(h(x, t)) = \psi_y(\psi^{-1}_{t(x,y)} \circ \phi_{t(x,y)}(x, y)) = \psi^{-1}_{t(x,y)-t} \circ \phi_{t(x,y)}(x, y).$$

100. *Wskazówka:* Można rozważyć funkcję $f\colon M \to \mathbb{R}$, której wszystkie punkty krytyczne są niezdegenerowane. Jej gradient generuje jednoparametrową grupę (φ_t) dyfeomorfizmów M. Interesującym obiektem może okazać się φ_1 zwłaszcza, jeśli hesjan, czyli $D^2 f$ w punktach krytycznych funkcji f ma wyznacznik różny od 0.

101. *Wskazówka:* Zbudować oddzielnie sprzężenia pomiędzy podprzestrzeniami stabilnymi i niestabilnymi, jak w zadaniu 95.

102. *Wskazówka:* Jeśli V nie jest hiperboliczne, to dodając do V pole liniowe $W(x) = \lambda x$, $\lambda \approx 0$ dostajemy pole hiperboliczne.

105. *Szkic rozwiązania:*
Rozważmy otoczenie zera U w $\mathbb{R}^n$ (gdzie $n = \dim M$) i homeomorfizm $h : U \to h(U) \subset M$, taki że $f \circ h = h \circ A$, gdzie A jest macierzą różniczki przekształcenia $Df(p)$. Wówczas mamy rozkład $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Możemy wybrać w E^s, E^u normy $||\cdot||_s$, $||\cdot||_u$, takie że w tych normach $||A||_{E^s} < \lambda_s < 1$, $||A^{-1}||_{E^u} < \frac{1}{\lambda_u} < 1$.

Można również założyć, że U ma postać

$$U = B_{E^s}(0, \delta) \times B_{E^u}(0, \delta).$$

Rozpatrzmy pierścień $P \subset E^u$, gdzie

$$P = \overline{B}_{E^u}(0, \delta) \setminus B(0, \frac{\delta}{\lambda_u}).$$

Niech p_n będzie ciągiem punktów okresowych z warunków zadania. Po zamianie zmiennych (czyli po zastosowaniu h^{-1}) otrzymujemy ciąg $v_n \to 0$, $v_n = h^{-1}(p_n)$. Zapiszmy $v_n = (v_n^s, v_n^u)$, korzystając z rozkładu $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Istnieje $k = k(n)$, takie że $A^k(n)(v_n^u) \in P$. Oczywiście, jeśli $n \to \infty$ to $k(n) \to \infty$. Zatem,

$$A^{k(n)}(v_n^s) \to 0$$

gdy $n \to \infty$.

Z ciągu punktów

$$\tilde{v}_n^u = A^{k(n)}(v_n^u) \in P$$

można wybrać podciąg zbieżny do pewnego $\tilde{v}^u \in E^u \cap P$. Mamy wówczas

$$\tilde{v}_n = A^{k(n)}(v_n) = (A^{k(n)}(v_n^u), A^{k(n)}(v_n^s)) \to (\tilde{v}^u, 0).$$

Po ponownej zamianie zmiennych (czyli po zastosowaniu h) otrzymujemy ciąg punktów $q_n' = h(\tilde{v}_n)$ zbieżny do $p' = h(\tilde{v}^u, 0) \in W^u(p)$. Jeśli punkty p_n były okresowe, to punkty q_n' też są okresowe.

106. *Szkic rozwiązania:*
Niech W będzie otoczeniem punktu p, w którym dyfeomorfizm f jest sprzężony topologicznie z operatorem liniowym $A = D_p f$ (twierdzenie Grobmana–Hartmana). Wówczas $V = W \cap f^{-1}(W) \cap \dots \cap f^{-n}(W)$ jest otoczeniem p. Twierdzimy że jeśli $x \in V$, $x \neq p$ jest punktem okresowym, to okres x jest większy od n.

Istotnie, cala trajektoria $x, f(x), \dots, f^n(x)$ leży w W. Niech h będzie sprzężeniem z częścią liniową:

$$h \circ f^i(x) = A^i \circ h(x), \quad i = 0, \dots, n.$$

Oczywiście punkty $h(x), A(h(x)), \dots A^n(h(x))$ są różne, a zatem także punkty $x, f(x), \dots f^n(x)$ są różne.

107. *Szkic rozwiązania:*
Zauważmy, że łatwo jest wskazać rozmaitość stabilną i niestabilną:

$$W^s(0,0,0) = E^s = \mathrm{lin}(\{(0,0,1)\})$$

(oś z) oraz

$$W^u(0,0,0) = E^u = \mathrm{lin}(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$$

(płaszczyzna (x,y)).

W płaszczyźnie (x,y) możemy jeszcze wyróżnić zbiór silnie niestabilny:

$$W^{u,u} = \{p : ||\phi^{-n}(p)|| \leqslant Ca^{-n}\}.$$

Jeśli h jest gładkie (lipschitzowskie), to ten zbiór jest obrazem przy h odpowiedniego zbioru $E^{u.u} = \{p : ||A^{-n}(p)|| < Ca^{-n}\}$.

Zatem, jeśli h jest lipschitzowskie, to

$$h(\mathrm{lin}(\{(1,0,0)\}) = \mathrm{lin}(\{(1,0,0)\})$$

(h zachowuje oś x). Rozpatrzmy punkt $p = (a^{-n}, a^{-n}, 1)$ i niech $\tilde{p} = h(p) = (\delta_1, \delta_2, D)$. Skoro odległość punktu p od osi z jest proporcjonalna do a^{-n}, oś z jest zachowywana, i homeomorfizm h jest lipschitzowski,to istnieje A niezależne od n, takie że $|\delta_1| \leqslant Aa^{-n}$, $|\delta_2| \leqslant Aa^{-n}$. Ponieważ punkt p leży w odległości 1 od niezmienniczej dla f i dla A płaszczyzny $P = (x,y)$, więc $D = \mathrm{dist}(\tilde{p}, P) \asymp 1$ (niezależnie od n). Mamy

$$f^n(t,t,1) = (a^n t, a^n c^n (1+n\varepsilon)t, c^n),$$

zatem

$$f^n(a^{-n}, a^{-n}, 1) = (1, c^n(1+n\varepsilon), c^n).$$

Tymczasem $Df^n(\tilde{p}) = Df^n(\delta_1, \delta_2, D) = (a^n\delta_1, a^n c^n \delta_2, c^n D)$. Mamy zatem

$$\mathrm{dist}(f^n(p), W^{u,u}) \geqslant c^n(1+n\varepsilon),$$

podczas gdy

$$\mathrm{dist}(Df^n(\tilde{p}), E^{u,u}) \leqslant Ac^n.$$

Ale $h(f^n(p)) = Df^n(\tilde{p})$. Korzystamy teraz z łatwego do sprawdzenia faktu: Jeśli h jest gładkim dyfeomorfizmem określonym w otoczeniu zera (wystarczy założyć że h i h^{-1} jest lipschitzowskie w otoczeniu zera) i h zachowuje prostą L-oś x to

$$\mathrm{dist}(q, L) \asymp \mathrm{dist}(h(q), L).$$

Oczywiście dla $q = f^n(p)$ ten warunek nie jest spełniony.

108. *Wskazówka:* Zastosować twierdzenie Kupki–Smale'a.

109. *Wskazówka:* Z twierdzenia Kupki–Smale'a wynika, że V ma skończenie wiele punktów krytycznych. W otoczeniu każdego punktu krytycznego można powtórzyć rozumowanie zasugerowane w zadaniu 102.

111. *Wskazówka:* Skorzystać z zadania 110.

112. *Wskazówka:* Pokazać, że $\frac{d}{dt}g(\varphi_t(x)) \geqslant 0$, gdzie φ_t potok pola V.

119. *Wskazówka:* Implikacja w jedną stronę jest oczywista. Jeśli A spełnia $\mu(T^{-1}(A) \div A) = 0$, to należy rozważyć zbiór $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} T^{-m}(A)$.

124. *Wskazówka:* To zadanie jest łatwiejsze, jeśli dodatkowo założymy, że T jest automorfizmem, tzn. T jest odwracalne i T^{-1} jest mierzalne. Można na początek ograniczyć się do tego przypadku. Należy zwrócić uwagę, że dla automorfizmów mamy $\mu(A) = \mu(T(A)) = \mu(T^{-1}(A))$.

125. *Wskazówka:* Jeśli ψ nie spełnia tego warunku, to istnieje a takie, że zbiór $D_A = \{x : \psi(x) < a, \psi(T(x)) > a\}$ (lub zbiór zdefiniowany tak samo, ale przez przeciwne nierówności) ma dodatnią miarę (dlaczego?). Popatrzyć na przecięcie $D_A \cap T^{-1}(D_a)$.

130. *Wskazówka:* Dla ustalonej miary $\mu \in \mathrm{Prob}(X)$ rozważyć ciąg $\mu_N = \frac{1}{N} T_*^n \mu$ i skorzystać z *-słabej zwartości kuli jednostkowej w przestrzeni miar.

136. *Wskazówka:* Skorzystać z zadania 122 i sprawdzić jedną z wymienionych tam własności.

137. *Szkic rozwiązania:*
Określamy $h : S^1 \to [-1, 1]$ wzorem $h(z) = \mathrm{Re}(z)$. Należy sprawdzić że

$$h(z^2) = T(h(z)).$$

Określamy miarę μ jako obraz miary Lebesgue'a przy rzutowaniu h, tzn.

$$\mu(A) = \lambda(h^{-1})(A)$$

146. *Wskazówka:* Skorzystać z podpunktu (c) w zad. 18

153. *Szkic rozwiązania:*
Najpierw zauważmy, że jeśli sprzężenie jest lipschitzowskie, to miara niezmiennicza dla T jest bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a i jej gęstość jest ograniczona z góry i z dołu przez dodatnie stałe. Wynika stąd, że pochodne iteracji $|(T^n)'(x)|$ są jednostajnie ograniczone (ze względu na $x \in \mathbb{S}^1$ i $n \in \mathbb{Z}$). Niech

$$\varphi(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{-\log |(T^n)'(x)|\}.$$

Funkcja φ jest ciągła (co należy sprawdzić!) i

$$\varphi \circ T - \varphi = \log |T'|.$$

Mając φ łatwo można zbudować homeomorfizm h klasy C^1, taki że $\log h' = -\varphi + \mathrm{const}$. Jest to szukane sprzężenie z obrotem.

156. *Wskazówka:* Rozpatrzeć przekształcenie $\phi^{-1} \circ P \circ \phi$, gdzie ϕ przekształcenie Riemanna z $\mathbb{D}$ na $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.

164. *Szkic rozwiązania:*
Dwie propozycje rozwiązania tego zadania.

Propozycja pierwsza

Zauważyć, że istnieje otoczenie V zera na którym f jest odwracalne. Oznaczmy $U = f(V)$ i niech $f^{-1} : U \to V$ będzie przekształceniem odwrotnym; można ponadto założyć, że $|(f^{-1})'| < \frac{3}{4}$ na zbiorze U, i że $f^{-1}(U) \subset U$. Przez f^{-n} oznaczamy dalej n-te złożenie tej funkcji. Rozważmy ciąg przekształceń

$$h_n : U \to \mathbb{C}, \qquad h_n(z) = 2^n \cdot f^{-n}(z).$$

Wówczas h_n jest holomorficznym dyfeomorfizmem U na obraz, przy czym $h_n(0) = 0$, $(h_n)'(0) = 1$. Można policzyć i oszacować różnicę:

$$\begin{aligned} h_{n+1}(z) - h_n(z) &= 2^{n+1} f^{-(n+1)}(z) - 2^n f^{-n}(z) \\ &= 2^{n+1}\left(\frac{1}{2} f^{-(n)}(z) + O(|f^{-n}(z)|^2)\right) - 2^n f^{-n}(z). \end{aligned}$$

Stąd wynika, że h_n jest zbieżny jednostajnie w U, do funkcji holomorficznej, i (co też warto by uzasadnić, zamiast ograniczać się do mniejszego otoczenia) – różnowartościowej.Ponieważ $h_n(f(z)) = 2h_{n-1}(z)$ więc graniczna funkcja h spełnia $h(f(z)) = 2h(z)$.

Propozycja druga

Posłużyć się metodą dowodzenia pochodzącą od Cauchy'ego. Jej opis można znaleźć np. w drugim tomie *Rachunku różniczkowego i całkowego* G. M. Fichtenholza. Metoda użyta jest tam do dowodu analityczności funkcji odwrotnej do danej rzeczywistej funkcji analitycznej (działa też w przypadku zespolonym). Dowód ten znajduje się też tu:

`http://www.mimuw.edu.pl/~krych/matematyka/AM1skrypt/am1_0708_cz_13-funkanal.pdf`

na stronach 5–7. Poszukać formalnego rozwiązania h równania funkcyjnego $h(2z) = f(h(z))$, czyli szeregu potęgowego $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ odkładając kwestię jego zbieżności na później. Powinno okazać się, że współczynnik b_n jest rozwiązaniem równania postaci

$$2^n b_n = 2b_n + \alpha_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_2, \dots, b_{n-1}).$$

Zauważyć, że jeśli $|a_n| \leqslant \widehat{a}_n$ dla $n = 2, 3, \dots$, to

$$|\alpha_n(a_2, \dots, a_{n-1}, b_2, \dots, b_{n-1})| \leqslant |\alpha_n(\widehat{a}_2, \dots, \widehat{a}_{n-1}, \widehat{b}_2, \dots, \widehat{b}_{n-1})|,$$

gdzie $\widehat{b}_n$ jest zdefiniowane dla funkcji $2z + \sum \widehat{a}_n z^n$ w taki sam sposób jak b_n dla funkcji $2z + \sum a_n z^n$.

Należy wykazać istnienie takich dodatnich liczb rzeczywistych M, r, że dla każdego n zachodzi nierówność $|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$. Potem zająć się funkcją $\varphi(z) = 2z + M \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{r^n}$ dla $z \in \mathbb{D}(0, r)$, gdzie $\mathbb{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < r\}$. Udowodnić, że istnieją: taka liczba $\varrho > 0$ i takie różnowartościowe przekształcenie analityczne $H\colon \mathbb{D}(0, \varrho) \to \mathbb{C}$, że $H(2z) = \varphi_a(H(z))$ dla każdego $z \in \mathbb{D}(0, \varrho)$, $\mathbb{D}(0, \varrho) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < \varrho\}$. Z istnienia takiego przekształcenia H wynika istnienie h, bo współczynniki szeregu Maclaurina funkcji H są większe od współczynników szeregu Maclaurina funkcji h. Wykazać istnienie H można dosyć łatwo. Wystarczy zauważyć, że dosyć podobne wzory służą do wyrażenia współczynników szeregu Maclaurina funkcji φ^{-1}.

183. *Wskazówka:* Rozważyć całkę

$$\int_\Omega Du \cdot Dv$$

i całkować przez części.