Egzamin z Analizy Matematycznej I

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Rok akad. 2014/15, semestr zimowy

6 marca 2015 r.

UWAGA: Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej kartce. Każda kartka powinna być czytelnie podpisana (imię, nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia). Czas egzaminu: 3 godz. Nie wolno używać kalkulatorów i innych elektronicznych urządzeń liczących! Każdą odpowiedź należy starannie uzasadnić!

1. Wykazać, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}.$$

2. Znaleźć zbiór wszystkich liczb $x > 0$ takich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

jest zbieżny.

3. Znaleźć granicę

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x \sin x)}{\ln(\cos x)}.$$

4. Rozstrzygnąć, ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie

$$12x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 5 = 0.$$

5. Znaleźć maksymalną objętość walca o danym polu powierzchni całkowitej równym S.

6. Niech

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Niech l będzie prostą styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dla pewnego $x_0 > 0$ i niech J będzie odcinkiem tej prostej o końcach w punktach przecięcia prostej l z osiami układu współrzędnych. Udowodnić, że punkt $(x_0, f(x_0))$ jest środkiem odcinka J.