1 Rozmaitości 1-wymiarowe

Zadanie 1.1 Podać klasyfikację topologiczną spójnych podzbiorów prostej i okręgu.

Zadanie 1.2 Niech M będzie spójną rozmaitością jednowymiarową oraz $M = U_1 \cup U_2$, gdzie oba właściwe podzbiory otwarte $U_i \subset M$ są homeomorficzne z $\mathbb{R}$. Pokazać, że:
a) jeżeli $U_1 \cap U_2$ jest zbiorem spójnym, to M jest homeomorficzna z $\mathbb{R}$;
b) jeżeli $U_1 \cap U_2$ ma dwie składowe, to M jest homeomorficzna z okręgiem S^1;
c) jeżeli M jest spójną rozmaitością jednowymiarową, to $U_1 \cap U_2$ ma jedną lub dwie składowe.

Zadanie 1.3 Pokazać, że jeżeli $M = \bigcup U_i$, gdzie $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ oraz wszystkie zbiory są homeomorficzne z $\mathbb{R}$, to M jest homeomorficzna z $\mathbb{R}$.

2 Powierzchnie

Zadanie 2.1 W $4n$-kącie utożsamiamy krawędzie według wzoru

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

Wykazać, że otrzymamy w ten sposób sumę spójną n torusów t.j. sferę z n uszami.

Zadanie 2.2 W $2n$-kącie utożsamiamy krawędzie według wzoru

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_n a_n$$

Wykazać, że otrzymamy w ten sposób sumę spójną n płaszczyzn rzutowych t.j. sferę z n wklejonymi wtęgami Möbusa.

Zadanie 2.3 Zaleźć warunek na to by robiąc utożsamienia w wielokącie według wzoru $a_{i(1)}^{\pm 1} a_{i(2)}^{\pm 1} a_{i(3)}^{\pm 1} \ldots$ otrzymać powierzchnię? Co otrzymamy ze słów:
a) $ab^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}$,
b) $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$
c) $a_1 a_2 \ldots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} a_n$
d) $a_1 a_2 \ldots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}$

Zadanie 2.4 Niech K będzie butelką Kleina K. Wykazać, że $K = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$

Zadanie 2.5 Niech $T^2 = S^1 \times S^1$ będzie torusem. Wykazać, że $K \# \mathbb{RP}^2 = T^2 \# \mathbb{RP}^2$.

Zadanie 2.6 Niech $P = P(g, m, d)$ będzie sferą z g uszami, m wklejonymi wstęgami Möbusa i usunietymi d otwartymi dyskami. Modyfikujemy P w następujący sposób: znajdujemy włożenie

$$f : \{0,1\} \times [0,1] \to \partial P$$

i definiujemy

$$P' = P \cup_f [0,1] \times [0,1]\,,$$

t.j przyklejamy *rączkę*. Pokazać, że w ten sposób otrzymamy powierzchnie homeomorficzną z $P(g', m', d')$ dla pewnych g', m', d'.

Zadanie 2.7 Wykazać, że każda triangulowalna powierzchnia zamknięta jest homeomorficzna z sumą spójną torusów lub sumą spójną płaszczyzn rzutowych.

Uwaga: Każda powierzchnia jest triangulowalna.

Zadanie 2.8 Niech $P_1 \to P_2$ będzie nakryciem powierzchni. Znając P_2 powiedzieć jaka może być P_1

Zadanie 2.9 Które powierzchnie zanurzają się w $\mathbb{R}^3$. Które dopuszczją immersję w $\mathbb{R}^3$.

3 Sklejanie rozmaitości

Zadanie 3.1 Sklejamy dwa pełne torusy wzdłuż brzegu za pomocą homeomorfizmu

$$\phi : T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$$

zadanego przez macierz z $SL(2, \mathbb{Z})$. Obliczyć grupę podstawową otrzymanej rozmaitośi.

Zadanie 3.2 Pokazać, że sfera S^{n-1} jest homeomorficzna ze sklejeniem $(S^r \times D^{n-r}) \cup_h (D^{r+1} \times S^{n-r-1})$ wzdłuż wspólnego brzegu $S^r \times S^{n-r-1}$.

Chirurgie rozmaitości (modyfikacje sferyczne)

Definicja Niech $f\colon S^r \longrightarrow M$ będzie zanurzeniem homeomorficznym sfery rozszerzającym się do zanurzenia $f\colon S^r \times D_\epsilon^{n-r} \longrightarrow M$, gdzie D_ϵ^k jest k-wymiarową kulą domkniętą w $\mathbb{R}^k$ o promieniu $1+\epsilon, \epsilon > 0$. Zbudujemy rozmaitość M_f w następujący sposób:

1. Usuńmy z rozmaitości M podzbiór otwarty $f(S^r \times D^{n-r})$,
2. Brzeg rozmaitości $M' := M \setminus f(S^r \times D^{n-r})$ jest homeomorficzny (poprzez f) z $\partial(S^r \times D^{n-r}) = S^r \times S^{n-r-1} = \partial(D^{r+1} \times S^{n-r-1})$,
3. $M_f := (D^{r+1} \times S^{n-r-1}) \cup_f M'$. Mówimy, że M_f powstała w wyniku chirurgii (modyfikacji sferycznej) rozmaitości M wzdłuż f.

Uwaga. Chirurgii można dokonywać również na rozmaitości z brzegiem zakładając, że obraz f jest zawarty we wnętrzu rozmaitości M.

Zadanie 3.3 Sprawdzić, że M_f istotnie jest rozmaitością. Zakładając, że M jest orientowalna zbadać orientowalność M_f.

Zadanie 3.4 Skonstruować kanoniczny bordyzm W_f między M_f a M (zwany śladem modyfikacji wzdłuż f), który jest homotopijnie równoważny z $M \cup_f D^{r+1}$. Zbadać orientowalność śladu.

Zadanie 3.5 Jak zachowuje się grupa podstawowa przy modyfikacjach wzdłuż sfery 0-wymiarowej i 1-wymiarowej gdy wymiar rozmaitości jest większy niż 3?

Zadanie 3.6 Dla dowolnej grupy skończenie prezentowalnej G skonstruować zamkniętą orientowalną rozmaitość 4-wymiarową M taką, że $\pi_1(M) \simeq G$.

Wsk: Skonstruować rozmaitość M^4, której grupa podstawowa jest grupą wolną. Następnie skorzystać z zad. i faktu, że dowolne przekształcenie $f\colon S^1 \longrightarrow M^4$ jest homotopijne z gładkim zanurzeniem. Jeśli rozmaitość M^4 jest orientowalna, to wiązka normalna do tego zanurzenia jest trywialna.

4 Orientacja rozmaitości

Zadanie 4.1 Niech M będzie rozmaitością wymiaru n, a TM jej wiązką styczną. Wykazać, że wiązka sfer wiązki liniowej $\Lambda^n TM$ jest rozmaitością orientowalną.

Zadanie 4.2 Rozmaitość M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy gdy jest orientowalna po wyjęciu z niej dowolnej domkniętej podrozmaitości kowymiaru ≥ 2

5 Rozmaitości 3-wymiarowe

Zadanie 5.1 Niech M_i dla $i = 1, 2$ będą pełnymi torusami (t.j. $D^2 \times S^1$). Znaleźć homeomorfizmy ich brzegów takich, żeby w wyniku sklejenia otrzymać sferę S^3, $S^2 \times S^1$, przestrzenie soczewkowe. Znaleźć odwzorowania indukowane na $\pi_1(\partial M_1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Zadanie 5.2 Wkazać, że każda orientowalna 3-wymiarowa rozmaitość lest sumą dwu pełnych precli sklejonych wzdłuż brzegu (rozkład Heegaarda).

Zadanie 5.3 Jeśli M^3 jest rozmaitością zamkniętą 3-wymiarową o skończonej grupie podstawowej to M^3 jest orientowalna.

Zadanie 5.4 Grupa podstawowa 3-wymiarowej rozmaitości zamkniętej nie zawiera podgrupy postaci $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

Uwaga. Jeżeli każda podgrupa rzędu p^2 skończonej p-grupy G jest cykliczna to G jest cykliczna lub (dla $p = 2$) uogólniona kwaternionowa).

Twierdzenie (J.Milnor) Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowolna podgrupa rzędu $2p$ grupy podstawowej 3-wymiarowej rozmaitości zamkniętej jest cykliczna.

6 Inne zadania

Zadanie 6.1 Niech $L = \{z \in S^{2n-1}, | \, f(z) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$, gdzie f jest jednorodnym wielomianem, a S^{2n-1} sferą o środku w 0. Załóżmy, że f ma punkt krytyczny tylko w 0. Wykazać, że L jest brzegiem.

(Uwaga: Założenie o jednorodności f można odrzucić.)

Zadanie 6.2 Oznaczmy $\chi_2(X) := \chi(X) \, mod\, 2 \in \mathbb{Z}_2$, gdzie $\chi(X)$ oznacza charakterystykę Eulera. Jeśli rozmaitość zamknięta M ogranicza to $\chi_2(M) = 0$. Uwaga: Przystawania $mod\, 2$ nie można zastąpić równością nawet dla rozmaitości zorientowanych.

Zadanie 6.3 Niech $(M, \partial M)$ będzie rozmaitością z brzegiem taką, że włożenie $\partial M \subset M$ jest ściągalne. Wtedy

a) rozmaitość M jest ściągalna,

b) jeśli ∂M jest jednospójna, to M jest homeomorficzna z dyskiem,

c) Skonstruować przykład $(M, \partial M)$ taki, że $\partial M \subset M$ jest ściągalna, a M nie jest homeomorficzna z dyskiem.

7 Zadania geometryczne

Zadanie 7.1 W zespolonej płaszczyźnie rzutowej równanie stopnia d opisuje krzywą algebraiczną C. Przy założeniu że C jest nieosobliwa obliczyć jej genus.

Zadanie 7.2 Pokazać, że każda rzeczywista orientowalna powierzchnia jest dyfeomorficzna z pewną krzywą algebraiczną w $\mathbb{CP}^3$.

Wsk: Powierzchnię zanurzyć w $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Zadanie 7.3 Pokazać, że nie każda rzeczywista orientowalna powierzchnia zamknięta jest zupełnym przecięciem w $\mathbb{CP}^3$ (tzn. nie jest przecięciem dwu zespolonych hiperpowierzchni).

Wsk: $\chi(C) = \langle c_1(TC), [C] \rangle = -deg\, K_C$.

Rozdmuchaniem dysku $\mathbb{D}^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ w punkcie 0 nazywa się podzbiór $X \subset D^{2n} \times \mathbb{C}P(n-1)$ opisany układem równan: $\{x_i y_j = x_i y_i | i, j = 1, ..., n\}$. Zauważyć, że: projekcja $\pi_1 : X \to D^{2n}$ jest lokalnym dyfeomorfizmem poza $\pi^{-1}(0)$, natomiast $\pi^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$.

ZADANIE 7.4 Wykazać, że X jest homeomorficzna z $D^{2n}\# - \mathbb{CP}(n)$.

ZADANIE 7.5 Korzystając z twierdzenia o otoczeniu normalnym podrozmaitości zdefiniować rozdmuchanie rozmaitości wzdłuż podrozmaitości zamkniętej $N \subset M$. (Dla znawców: obliczyć homologie.)

8 Wiązki wektorowe i pokrewne

ZADANIE 8.1 Wykazać, że wiązka styczna do grupy Lie jest trywialna (np. S^1, S^3 a nawet S^7, choć działanie nie jest łączne.)

ZADANIE 8.2 Znaleźć funkcję sklejającą dla wiązki Hopfa (tautologicznej) nad $\mathbb{CP}^1$, nazywanej też $\mathcal{O}(-1)$.

ZADANIE 8.3 Znaleźć funkcję sklejającą dla wiązki stycznej do sfery (przynajmniej dla $n = 2$).

ZADANIE 8.4 Zidentyfikować przestrzeń Thoma wiązki $H^* = \mathcal{O}(1)$ – sprężonej do tautologicznej nad przestrzenią rzutową.

ZADANIE 8.5 Niech $E_i \longrightarrow B_i$ dla $i = 1,2$ będą wiązkami wektorowymi. Wykazać, że przestrzeń Thoma wiązki $p_1 \times p_2 \colon E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ jest homeomorficzna z $T(E_1) \wedge T(E_2)$. Wywnioskować stąd, że $T(E \oplus \theta^k) = \Sigma^k T(E)$.

ZADANIE 8.6 Wykazać, że wiązka sfer jedynej nietrywialnej rzeczywistej wiązki wektorowej wymiaru 3 nad S^2 jest homemorficzna z $\mathbb{C}P(2)\# - \mathbb{C}P(2)$ (a więc $\mathbb{C}P(2)\# - \mathbb{C}P(2)$ jest brzegiem wiązki dysków.)

9 Przestrzenie jednorodne grup liniowych.

ZADANIE 9.1 Wykazać, że każda spójna grupa Liego jest brzegiem. Czego brzegiem jest $\mathbb{RP}^3 = SO(3)$?

Wsk: Zwarta grupa Liego zawiera podgrupę izomorficzną z S^1.

ZADANIE 9.2 Znaleźć zanurzenie rozmaitości Grassmanna w przestrzeń afiniczną oraz w przestrzeń rzutową (niższego wymiaru).

ZADANIE 9.3 Niech V będzie n-wymiarową przestrzenia wektorową nad $\mathbb{R}$ lub nad $\mathbb{C}$. Przestrzenią flag nazywamy przestrzeń, której punktami są ciągi podprzestrzeni $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n$, takie, że $dim(V_i) = 1$. Wykazać, że przestrzeń flag jest zwartą i spójną rozmaitością. Znaleźć jej wymiar.

10 Wiązki II

ZADANIE 10.1 Definiujemy podzbiór w grassmanianie $G(n, N)$ podprzestrzeni n-wymiarowych w $\mathbb{K}^N$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$):

$$A_k = \{V \subset \mathbb{K}^N : \dim V = n\,,\ \dim(V \cap \mathbb{K}^{N-k} < n-k)\}\,.$$

($\mathbb{K}^{N-k}$ traktujemy jako podzbiór $\mathbb{K}^N$ opisany równaniami $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.) Wykazać, że wiązka tautologiczna nad $G(n, N)\backslash A_k$ ma k przekrojów liniowo niezależnych. Obliczyć kowymiar A_k.

ZADANIE 10.2 Jeśli $p : E \longrightarrow X$ jest k-wymiarowa wiązką rzeczywistą nad n-wymiarowym CW-kompleksem, to p posiada $k - n$ przekrojów liniowo niezależnych w każdym punkcie.

ZADANIE 10.3 Jeśli L jest wiązką rzeczywistą jednowymiarową, to $L \otimes L \simeq 1$. Jeśli L jest wiązką zespoloną jednowymiarową, to $L \otimes L^* \simeq 1$, gdzie L^* oznacza wiązkę sprzężoną do L. Zbiór klas izomorfizmu wiązek liniowych $Vect_1(X)$ jest grupą ze względu na iloczyn tensorowy.

ZADANIE 10.4 Zdefiniować odwzorowanie $\mu : \mathbb{CP}(\infty) \times \mathbb{CP}(\infty) \longrightarrow \mathbb{CP}(\infty)$ takie, aby $\mu^* H \simeq H \boxtimes H = p_1^* H \otimes p_2^* H$, gdzie $H = \mathcal{O}(-1)$ oznacza wiązkę tautologiczną, a p_i są rzutami.

ZADANIE 10.5 Niech M będzie gładka rozmaitością. Wykazać, że przekątna w $M \times M$ ma otoczenie homeomorficzne z otoczeniem przekroju zerowego w wiązce stycznej do M.

ZADANIE 10.6 Wiazka tautologiczna H nad $\mathbb{CP}^n$ jest podwiązką $n+1$-wymiarowej wiązki trywialnej. Jaka jest wiązka ilorazowa? (Wsk: $T\mathbb{CP}^n \otimes H$.)

ZADANIE 10.7 Zauważyć izomorfizm wiązek rzeczywistych: $TS^n \oplus \theta^1 \simeq \theta^{n+1}$. Czy zachodzi on także dla $n = 2$, gdy rozpatrujemy wiązki zespolone?

ZADANIE 10.8 Opisać półpierścień wiązek rzeczywistych nad S^1 i wiązek zespolonych nad S^2.

ZADANIE 10.9 Niech $E \longrightarrow X$ będzie n-wymiarową rzeczywista wiązką wektorową. Wykazać, że następujące konstrukcje przestrzeni Thoma, oznaczanej $Th(E)$, są naturalnie homeomorficzne:

- $\mathbb{P}(E \oplus 1)/\mathbb{P}(E)$, gdzie $\mathbb{P}(-)$ oznacza funktor projektywizacji;
- $D(E)/S(E)$, gdzie $S(E) \subset D(E) \subset E$ oznacza odpowiednio wiązkę sfer i wiązkę dysków w pewnej metryce na E;

- Jeśli X jest przestrzenią zwartą, $E^+ := E \cup \{\infty\}$, jednopunktowe uzwarcenie przestrzeni E.

Uwaga Dla wiązki zerowymiarowej nad X definiujemy przestrzeń Thoma jako $X \coprod \{\infty\}$, która także będziemy oznaczać X^+.

11 Zadania nowe dla seminarium o tw. Botta

Zadanie 11.1 Niech X i Y będą zwartymi przestrzeniami topologicznymi. Udowodnić, że join (tj. złącze) ma topologię ilorazową

$$X \times Y \times [0,1] \to X * Y .$$

Zadanie 11.2 Niech X będzie CW-kompleksem wymiaru n. Wykazać, że każdą rzeczywistą wiązkę wektorową E nad X wymiaru $k > n$ można przedstawić jako $E = F \oplus \theta^{k-n}$, gdzie θ jest wiązką trywialną.