Zadania o rozmaitościach zespolonych

Zadania z ♠ są zrobione.

1 Obliczyć $Aut(\mathbb{P}^1)$. Czy są automorfizmy bez punktów stałych?

2 ♠ Dany $a \in \mathbb{D}$. Opisać wzorem wszystkie automorfizmy $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ takie, że $f(a) = 0$.

3 Wykazać, że każda zwarta krzywa zespolona genusu 1 jest izomorficzna z $\mathbb{C}/\Lambda$

4 ♠ Znaleźć wielomian Weierstrassa dla $(z_1, z_2) \mapsto z_1^3 z_2 + z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^2 + z_1 z_2^3$.

5 ♠ Niech $f, g \in O_{\mathbb{C}^n,0}$ i niech f będzie funkcją nierozkładalną. Wykazać, że jeśli $Z(f) \subset Z(g)$, to $f|g$.

6 Udowodnić, że jeśli U jest spójny, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorficzna, to $U \setminus Z(f)$ spójny i gęsty.

7 ♠ Niech $f : U \to V$ będzie funkcją holomorficzną, która jest bijekcją. Udowodnić, że f^{-1} jest homomorficzna.

8 ♠ Opisać równaniem obraz $z \mapsto (z^2 - 1, z^3 - z)$. ([Remmert, 1957] zawsze się da dla odwzorowania właściwego.) Podać przykład odwzorowania (np $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) takiego, że obraz nie da się opisać równaniem.

9 ♠ Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, xy, e^y xy)$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Wykazać, że zbiór $f(A)$ nie może być opisany przez układ równości i nierówności funkcji analitycznych.

10 ♠ Powierzchnia Hopfa: ustalamy $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| > 1$, $G = \{q^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^*$. Grupa $\mathbb{C}^*$ działa na $\mathbb{C}^2$ przez mnożenie skalarne. Niech $H_q = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/G$. Wykazać, że H_q jest homeomorficzna z $S^3 \times S^1$. Wskazać odwzorowanie holomorficzne do $\mathbb{P}^1$. Czy H_q jest rozmaitością algebraiczną?

11 (*) Niech H_q będzie powierzchnią Hopfa. Wykazać, że funkcje meromorficzne na X (tzn określone poza hiperpowierzchnią i holomorficzne na dziedzinie) faktoryzują się przez $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus 0)/\mathbb{C}^*$.

12 ♠ Wykazać, że $Aut^0(\mathbb{D} \times \mathbb{D}, 0)$ (składowa identyczności grupy automorfizmów produktu dysków jednostkowych $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^2$) zachoujących 0 jest abelowa. Wywnioskować, że $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ nie jest holomorficznie równoważny z kulą w $\mathbb{C}^2$.

13 ♠ (patrz Kirwan, Complex Algebraic Curves, roz 5) Niech Λ będzie kratą w $\mathbb{C}$. Niech

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left((z - w)^{-2} - w^{-2} \right)$$

będzie funkcją Weierstrassa. Sprawdzić, że

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2 \wp(z) - g_3\,,$$

gdzie

$$g_2 = 60 \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} w^{-4}\,,$$

$$g_3 = 140 \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} w^{-6}\,.$$

Udowodnić, że

$$z \mapsto [1 : \wp(z) : \wp'(z)]$$

zadaje ciągłe odwzorowanie $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^2$, zanurzenie, którego obrazem jest krzywa zadana formą

$$4z_1^3 - g_2\, z_0^2 z_1 - g_3\, z_0^3 - z_0 z_2^2 = 0\,.$$

14 ♠ Opisać równaniem obraz zanurzenia Plückera $Gras_2(\mathbb{C}^4) \to \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^4)$.

15 (tbc) Podać efektywną metodę (wzór kombinatoryczny) na wymiar kohomologii grassmannianu $Gr_k(\mathbb{C}^n)$.

16 Niech X będzie gładką krzywą stopnia d w $\mathbb{P}^2$. Obliczyć jej charakterystykę Eulera. *Wsk: Zbadać rzutowanie $C \subset \mathbb{P}^2 - \{pt\} \to \mathbb{P}^1$ i skorzystać ze wzoru Riemanna-Hurwitza.*

17 ♠ Niech M będzie zwartą rozmaitością zespoloną, a X podrozmaitością. Pokazać, że

$$\chi(M) = \chi(X) + \chi(M - X)\,.$$

Dla rozmaitości rzeczywistych ta formuła jest prawdziwa mod 2.

18 Dane $g \in \mathbb{N}$. Wykazać, że w $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ zanurza się pewna krzywa genusu g.

19 Wykazać $\frac{\partial}{\partial z}(fg) = \frac{\partial}{\partial w}f \cdot \frac{\partial}{\partial z}g + \frac{\partial}{\partial \bar{w}}f \cdot \frac{\partial}{\partial z}\bar{g}$

20 Sprawdzić, że gdy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna, to $df = f'dz$, gdzie f' jest pochodną funkcji f w sensie zespolonym.

21 Niech M będzie rozmaitością zespoloną, H hiperpowierzchnią zespoloną lokalnie zadaną równaniem $f = 0$. Niech ω będzie formą różniczkową oktreśloną na $M \setminus A$, taką, że $f\omega$ przedłuża się do formy gładkiej na M. Wykazać, że ω można zapisać w postaći $\omega = \frac{df}{f}\eta + \xi$, przy czym η i ξ są formami na M. Wykazać, że $\eta_{|A}$ nie zależy od dokonanych wyborów.

22 Sprawdzić, że $\Lambda^{10} \perp \Lambda^{01}$

23 Wskazać naturalne przekształcenie przestrzeni ze strukturą zespoloną $(V^*, I) \simeq (\Lambda^{10}, i)$, ale iloczyny skalarne się różnia o czynnik 2.

24 Dana jest parazwarta rozmaitość różniczkowa ze strukturą symplektyczną (tzn dana jest zamknięta niezdegenerowana 2-forma różniczkowa ω. Wykazać, że istnieje struktura zespolona I na wiązce stycznej oraz iloczyn hermitowski taki, że ω jest jego częścią urojoną. Czy warunek zamkniętości jest konieczny?

25 ♠ Wykazać
(i) $*^2 = (-1)^{k(d-k)}$ na k-formach.
(ii) $\langle \alpha, *\beta \rangle = (-1)^{k(d-k)}\langle *\alpha, \beta \rangle$,

26 Sprawdzić, że rozkład k-form na (p, q)-formy jest ortogonalny i * zachowuje ten rozkład.

27 ♠ Definiujemy operator działający na funkcjach określonych na otoczeniu jednostkowego dysku w $\mathbb{C}$

$$If(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Sprawdzić, że

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(If) = f.$$

28 Sprawdzić z definicji, że kohomologie Dolbeault $H^k_{Dol}(\mathbb{C} \setminus \{0\}; \mathcal{O}_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}) = 0$ dla $k > 0$.

29 Obliczyć $H^*(\mathbb{P}^1; \Omega^p)$ dla $p \geq 0$.

30 Obliczyć $H^*(\mathbb{P}^n; \Omega^p)$ dla $p \geq 0$, $n > 1$.

31 Zadanie o reprezentacjach sl_2. Niech (V, I) będzie przestrzenią ze strukturą zespoloną i iloczynem skalarnym I-niezmienniczym. Rozłożyć Λ^*V^* na reprezentacje nierozkładalne. (Lub poweiedzieć jaka jest krotnoś:c S_k.)

32 Jakie jest spektrum laplasjanu na S^n ($n = 2, 3, \dots$)? (To jest raczej temat na referat: patrz funkcje sferyczne, spherical harmonics.)

33 Opisać formy harmoniczne na torusie $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ z płaską metryką.

34 ♠ Rozwiązac równanie ciepła na $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ z warunkiem początkowym $\alpha = \delta_0^{(n)}dx$, gdzie $\delta_0^{(n)}$ jest n-tą pochodną delty Diracka. Czy $\alpha(t)$ jest formą gładką dla $t > 0$?

35 Niech $\alpha(t)$, $\alpha(0) = \alpha$ będzie rozwiązaniem równania ciepła. Wykazać, że $|\alpha(t)|$ jako funkcja od t jest nierosnąca. Pokazać, że jeśli $d\alpha = 0$, do dla każdego t forma $\alpha(t)$ jest zamknięta i reprezentuje tę samą klasę kohomologii.

36 Przyjmijmy, że $\mathbb{P}^n$ ma metrykę riemannowską $U(n+1)$-niezmienniczą. Niech $X \subset \mathbb{P}^n$ będzie zespoloną hiperpowierzchnią stopnia d. Obliczyć $vol(X)$ w zależności od $vol(\mathbb{P}^n)$.

37 Niech $X_t \subset \mathbb{P}^n$ będzie ciągłą rodziną zespolonych podrozmaitości (np $\mathcal{X} = \bigcup_{t\in Dysk} X_t \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ jest zespoloną podrozmaitością). Wykazać, że objętość $vol(X_t)$ jest stałą.

38 Pokazać, że każda rozmaitość zespolona dopuszcza metrykę hermitowską, ale są rozmaitości, które nie dopuszczają metryki kählerowskiej tzn t.ż. $d\omega = 0$.
(Wsk: powierzchnia Hopfa $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/q^{\mathbb{Z}}$).

39 Metryka Fubini-Study: iloczyn hermitowski w $T_{[w]}\mathbb{P}^n$ jest zdefiniowana jako

$$< \alpha, \beta >= \frac{1}{\pi}\frac{< w, w >< \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > - < \tilde{\alpha}, w >< w, \tilde{\beta} >}{< w, w >^2},$$

gdzie $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in T_w\mathbb{C}^{n+1}$ są podniesieniami wektorów $\alpha, \beta \in T_{[w]}\mathbb{P}^n$. Sprawdzić, że wzór nie zależy ow wyboru poniesień i reprezentanta w.

Sprawdzić, że w lokalnych współrzędnych na U_0 formę symplektyczną można zapisać jako

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}log(1 + \sum_{k=1}^{n}|w_k|^2)$$

Spełniony jest warunek Kählera $d\omega = 0$.

40 Dana algebra łączna z gradacją. Super-komutator elementów jednorodnych definiujemy jako $[a, b]_s = ab - (-1)^{|a|\,|b|}ba$. Sprawdzić, że operator $[a, -]_s$ (dla a jednorodnego) spełnia formułę Leibniza z odpowiednimi znakami.

41 Dla formy kählerowskiej ω na rozmaitości zwartej i dla każdej formy harmonicznej α iloczyn $\omega \wedge \alpha$ jest formą harmoniczną. Czy iloczyn dowolnych form harmonicznych jest formą harmoniczną?

42 Niech $\mathcal{K}_X \subset H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \omega)$ będzie zbiorem klas $[\omega]$ takich, że ω jest (minus) częścią uroljoną metrykę kählerowskiej. Udowodnić, że $\mathcal{K}_X$ jest zbiorem otwartym, stożkowym, oraz żadna prosta postaci $\{\alpha + t\beta \mid t \in \mathbb{R}\}$ nie jest w nim zawarta.

43 Wykazać, że suma spójna $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$ nie może mieć struktury kählerowskiej.

44 Niech $N \subset M$ będzie podrozmaitością zespoloną kowymiaru c w rozmaitości Kählera. Wykazać, że klasa dualna do klasy fundamentalnej $PD^{-1}([N]) \in H^{2c}(M; \mathbb{C})$ jest typu (c, c) i jest niezerowa, gdy $N \neq \emptyset$.

45 Znaleźć sygnaturę kwadryki (hiperpowierzchni zadanej formą kwadratową) w $\mathbb{P}^{2n+1}$.
(Wsk. Najpierw zbadać przypadek $n = 1$. Następnie można przyjąć, że kwadryka jest zadana wielomianem $\sum_{i=0}^{2n-1} z_i^2 + z_{2n}z_{2n+1} = 0$ i rozważyć działanie $\mathbb{C}^*$ na X zadane wzorem $t \cdot [z_0 : z_1 : \dots z_{2n} : z_{2n+1}] = [z_0 : z_1 : \dots tz_{2n} : t^{-1}z_{2n+1}]$. Uzasadnić, że X można rozłożyć na $X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2$, gdzie $X_0 = pt$, X_1 jest izomorficzne z wiązką liniową nad kwadryką w $\mathbb{P}^{2n-1}$, a $X^2 \simeq \mathbb{C}^{2n}$. Wykazać, że $H^n(X; \mathbb{C}) = \mathbb{C}^2$.)

46 Znaleźć sygnaturę grassmanianu $Grass_2(\mathbb{C}^n)$ (przestrzenie 2-wymiarowe w $\mathbb{C}^n$).

47 Niech $X \to \mathbb{P}^1$ będzie rozwłóknieniem rozmaitości Kählerowskiej nad prostą rzutową z włóknem F. Wykazać, że $H^*(X) \simeq H^*(F \times \mathbb{P}^1)$.

(To też jest prawda dla $X \to B$, gdy B jest jednospójne.)

48 Rozkład BB i kohomologie. Niech X będzie zwartą zespoloną rozmaitością algebraiczną. Przypuśćmy, że mamy filtrację podzbiorami algebraicznymi

$$X_0 = \emptyset \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_m = X$$

oraz rozwłóknienia $p_i : X_i \setminus X_{i-1} \to F_i$ z włóknem izomorficznym z $\mathbb{C}^{n_i}$ nad gładką i zwartą bazą F_i. Udowodnić, że

$$H_k(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} H_{k-2n_i}(F_i)\,.$$

Wskazówka: wykazać, że długie ciągi dokładne par (X_i, X_{i-1}):

$$\to H_k(X_{i-1}) \to H_k(X_i) \to H_k(X_i, X_{i-1}) \to$$

rozszczepiają się na krótkie ciągi dokładne. (Trzeba skonstruować rozszczepienie $H_k(x_i, X_{i-1}) \to H_k(X_i)$. Używając rozwiązania osobliwości można założyć, że X_i jest gładkie. Rozwarzyć korespondencję zadaną przez domknięcie wykresu $X_i \setminus X_{i-1} \to F_i$ w $X_i \times F_i$.)

49 Niech $X = Bl_x\mathbb{P}^2$. Grupa $Pic(X)$ jest rozpięta przez klasy H i E. Mamy $H^2 = 1$, $HE = 0$, $E^2 = -1$. Dywizor kanoniczny jest równy $K_X = -3H + E$. Niech $L = 2H - E$. Znaleźć $H^0(X, L)$. Opisać przekształcenie $\phi_L : X \to \mathbb{P}(H^0(X, L))$. Czy jest zanurzeniem?