ROZMAITOŚCI ZESPOLONE
Plan wykładu

1 Wstęp

1.1 Teoria lokalna:
– twierdzenia dla jednej zmiennej,
– operator $\partial\bar{z}$
– holomorficznośc funkcji zespolonych wielu zmiennych
– formuła całkowa Cauchy'ego po wpółrzędnych.
– tw. Hartogsa i zaagitowaem jak je uzasadni.

1.2 Definicja rozmaitości zespolone i ich morfizmy. jako rzeczywistte rozmaitości są parzystowymiarowe i zorientowane.

1.3 Przestrzenie rzutowe.

1.4 Hiperpowierzchnie i zupene przecięcia są podrozmaitościami (tw. o funkcji uwikłanej).

1.5 Ilorazy przez całkowicie dyskretne działanie grup, ilorazy.
– $\mathbb{C}^n/\Lambda$, krzywe eliptyczne.

1.6 Autormorfizmy dysku i górnej pópłaszczyzny $\mathbb{H}$. Ilorazy $\mathbb{H}/G$ przez podgrupy $SL_2(R)$ działające w sposób całkowicie dyskretny na górnej półpłaszczyźnie są krzywymi zespolonymi genusu > 1.

1.7 Klasyfikacja krzywych zespolonych:
– Tw Riemanna o uniformizacji, z niego wynika, że każda krzywa zespolona jest izomorficzna z X/Γ, gdzie $X = \mathbb{C}$, $\mathbb{P}^1$ lub dysk $\mathbb{D}$, a $\Gamma \subset Aut(X)$ jest podgrupą automorfizmów działającą wolno.
– obliczenie $Aut(\mathbb{C}) = Aff(\mathbb{C})$, stąd zwarte ilorazy są postaci $\mathbb{C}/ < 1, \tau >$. (Każda zwarta krzywa zespolona genusu 1 jest izomorficzna z $\mathbb{C}/\Lambda$.)
– $Aut(\mathbb{P}^1) = PGL_2(\mathbb{C})$ każdy automorfizm jest zadany formułą liniową, każdy automorfizm ma punkt stały. Nie ma nietrywialnych nakryć $\mathbb{P}^1 \simeq S^2 \to C$.
– $Aut(\mathbb{D}) = Aut(\mathbb{H}_+) = SL_2(\mathbb{R})$ (Z lematu Schwarza: Dany $a \in \mathbb{D}$. Ćw: opisać wzorem wszystkie automorfizmy $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ takie, że $f(a) = 0$.) Iloraz $\mathbb{H}_+$ przez $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ jest krzywą genusu > 1.

2 Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa i pierścień lokalny

(Odsyłacze do §1 Huybrechtsa.)

2.1 Formuła całkowa $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\epsilon} \frac{f'(\xi)}{/f(\xi)}\xi^\ell d\xi = \sum_{|\alpha|<\epsilon,\, f(\alpha)=0} \alpha^\ell$.

2.2 Elementarne funkcje symetryczne można wyrazić przez sumy potęg.

2.3 Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa TPW (Th. 1.1.6)

2.4 Twierdzenia o funkcji uwikłanej jako szczególny przypadek TPW

2.5 Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa w wersji dzieleniowej (Prop 1.1.17)

2.6 Ćw (Prop 1.1.12) Jeśli $f : U \to V$ jest holomorficzną bijekcją, to f^{-1} jest holomorficzna.

2.7 Pierścień lokalny $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ i jego własności.

2.8 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ jest pierścieniem z jednoznacznym rozkładem (Prop 1.1.15)

2.9 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ jest noetherowski

3

3.1 Twierdzenie Hilberta o zerach dla funkcji analitycznych

3.2 GAGA *J-P.Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6: 1-42, (1956)*

– Niech $(X, \mathcal{O}_X)$ będzie rozmaitością algebraiczną nad $\mathbb{C}$. Stowarzyszamy z nią rozmaitość analityczną $(X_{an}, \mathcal{O}_{X_{an}})$.

– Mamy morfizm przestrzeni upierścienionych $\iota : X_{an} \to X$. $\iota^*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X_{an}}$. To daje funktor kategorii snopów

$$(-)^{an} : Sh(X) \to Sh(X_{an})$$

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an} = \mathcal{O}_{X_{an}} \otimes_{\iota^*\mathcal{O}_X} \mathcal{F}\,.$$

– Niech $(Y, \mathcal{O}_Y)$ będzie przestrzenią upierścienioną. Mówimy, że snop $\mathcal{O}_Y$ modułów $\mathcal{F}$ jest koherentny jeśli

1) Istnieje suriektywne odwzorowanie $\mathcal{O}_Y^N \to \mathcal{F}$ dla pewnego N (tzn $\mathcal{F}$ jest skończenie generowany,
2) Dla każdego odwzorowanie $\mathcal{O}_Y^M \to \mathcal{F}$ jądro jest skończenie generowane.

– Twierdzenie Oki mówi, że $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{X_{an}}$ jest koherentny.

– Twierdzenie [GAGA]: Jeśli X jest rozmaitością rzutową, to $(-)^{an}$ ograniczone do podkategorii snopów koherentnych jest równoważnością kategorii.

– Wniosek: Każda podrozmaitość analityczna $\mathbb{P}^n$ jest opisana równaniami wielomianowymi.

3.3 Struktura zespolona $I^2 = -id$. Przestrzenie własne struktury zespolonej

$$V_{\mathbb{C}} = V_i + V_{-i}\,.$$

3.4 Rozkład przestrzeni sprzężonej: Formy liniowe typu (1,0) i (0,1) (tzn $\mathbb{C}$ liniowe i antyliniowe).

$$V^*_{10} := (V^*)_i = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})\,,$$

$$V^*_{01} := (V^*)_{-i} = Hom_{\mathbb{C}}(V, \overline{\mathbb{C}})\,.$$

We współrzędnych $e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_n$ takich, że $I(e_k) = f_k$: bazę dualną oznaczamy:

$$dx_k := e_k^*\,, \quad dy_k := f_k^*\,.$$

Definiujemy

$$dz_k := dx_k + idy_k\,, \quad d\overline{z}_k := dx_k - idy_k\,.$$

Formy dz_k są bazą V^*_{10}, a $d\overline{z}_k$ są bazą V^*_{01}.

3.5 Formy antysymetryczne typu (p, q):

$$\Lambda^k V^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{pq}\,.$$

– $\overline{\Lambda^{pq}} = \Lambda^{qp}$.
– Operator I działa $\Lambda^{p,q}V^*$ poprzez mnożenie przez $i^{(p-q)}$

Hermitowska algebra liniowa

3.6 Iloczyn hermitowski $\langle\!\langle -, - \rangle\!\rangle = \langle -, - \rangle - i\omega(-, -)$ zadje:
– I-niezmienniczy iloczyn skalarny $\langle -, - \rangle$,
– formę symplektyczną $\omega(-, -) = \langle I(-), - \rangle = -\langle -, I(-) \rangle$.

3.7 Forma objętości: we wspórzędnych ortonormalnych:
– gdy $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k = \tfrac{i}{2} \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k \, .$$

$$\omega^n = n! vol \, .$$

gdzie

$$vol = (\tfrac{i}{2})^n (dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \cdots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n) = (dx_1 \wedge dy_1) \wedge \cdots \wedge (dx_n \wedge dy_n)$$

(Uwaga: forma ω nalży do $\Lambda^2 V^* \cap \Lambda^{11} V^* \subset \Lambda^2 V^*_{\mathbb{C}}$.)

3.8 Ćw: sprawdzić, że $\Lambda^{10} \perp \Lambda^{01}$

3.9 Ćw: $(V^*, I) \simeq (\Lambda^{10}, i)$, ale iloczyny skalarne się różnia o czynnik 2.

3.10 Operator Lefschetza $L = \omega \wedge -$ i izomorfizm („trudne Lefschetza w wersji liniowej") $L^k : \Lambda^{n-k} V \to \Lambda^{n+k} V$.

3.11 Formy prymitywne: dla $0 \leq k \leq n$ definiujemy

$$P^{n-k} = \{\alpha \in \Lambda^{n-k} V^* \mid L^{k+1} \alpha = 0\}$$

$$P^{p,q} = \Lambda^{p,q} \cap P^{p+q}_{\mathbb{C}} \, .$$

Mamy

$$P^{n-k}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n-k} P^{p,q} \, .$$

3.12 Rozkład Lefschetza:

$$\Lambda^{n-k} V^* = P^{n-k} \oplus L(P^{n-k-2}) \oplus \cdots \oplus L^j (P^{n-k-2j}) \oplus \ldots \, .$$

3.13 Relacje Hodge'a-Riemanna: Formę $B(\alpha, \beta)$ na P^k określamy poprzez zależność

$$\alpha \wedge \bar{\beta} \wedge \omega^{n-k} = B(\alpha, \beta) dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n \, .$$

Twierdzenie: Forma

$$i^{p-q} \cdot (-1)^{(k)(k-1)/2} B(\alpha, \beta)$$

jest dodatnio określona na $\alpha, \beta \in P^{p,q}(M)$, $k = p + q$.

4

4.1 Dana forma maksymalnego stopnia $vol \in \Lambda^{\dim V} V$. Definiujemy gwiazdkę Hodge'a $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, vol$.

4.2 Ćw:
(i) $\langle \alpha, *\beta \rangle = (-1)^{k(d-k)} \langle *\alpha, \beta \rangle$,
(ii) $*^2 = (-1)^{k(d-k)}$ na k-formach.

4.3 Dla przestrzeni hermitowskich $vol = \frac{1}{n!} \omega^n$

4.4 Ćw: rozkład k-form na (p, q)-formy jest ortogonalny i $*$ zachowuje ten rozkład.

4.5 Operator sprzężony $\Lambda = L^* = \pm *^{-1} L *$.

Działanie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ na formach.

4.6 Operator $H := [L, \Lambda]$ jest mnożeniem przez $(k-n)$ na Λ^k. Mamy relacje

$$[H, L] = 2L, \quad [H, \Lambda] = -2\Lambda, \quad [L, \Lambda] = H\,.$$

4.7 Przestrzeń $\Lambda V_{\mathbb{C}}^*$ jest reprezentacją $sl_2(\mathbb{Z})$.

4.8 Przypomnienie z teorii reprezentacji:
– Reprezentacje proste (nie zawierające właściwych podreprezentacji) są postaci $S_k = Sym^k(\mathbb{R}^2)$.
– Każdą reprezentację $sl_2(\mathbb{Z})$ można rozłożyć na sumę reprezentacji prostych.

Algebra liniowa $\to$ rozmaitoci różniczkowe

4.9 Rozmaitość niemal zespolona to para$(X, I \in End(TX))$, gdzie X jest rozmaitośćią (rzeczywistą) oraz $I^2 = -id$.

4.10 Formy różniczkowe rozkładają się na sumę prostą $\mathcal{A}^k(X)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}_(X)$. W ogólności różniczka d ograniczona do form typu (1,0) może mieć składową typu (0,2). Gdy struktura niemal zespolona pochodzi od holomorficznego układu współrzędnych, to nie ma skądowej typu (0,2).

4.11 [Huybrechts 2.6.17] Warunek $(d\alpha)_{02} = 0$ dla $\alpha \in \mathcal{A}^{10}(X)$ jest równoważny iwolutywności dystrybucji $TX_{0,1} \subset TX_{\mathbb{C}}$:

$$\forall u, v \in \Gamma(TX_{01}) \quad [u, v] \in \Gamma(TX_{01}).$$

Dowód z formuły Cartana $d\alpha(u, v) = u\alpha(v) - v\alpha(u) - \alpha([u, v])$.

4.12 Niech $P = \frac{1}{2}(iI + id)$ będzie rzutowaniem na formy typu (0,1). Warunek iwolutywności jest równoważny:

$$\forall u, v \in \Gamma(TX) \quad P[Pu, Pv] = [Pu, Pv].$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy tensor Nijenhuisa:

4.13 Dla $A \in End(TX)$ definiujemy tensor Nijenhuisa

$$N_A(X, Y) = -A^2[X, Y] + A([AX, Y] + [X, AY]) - [AX, AY]\,.$$

4.14 Warunek całkowalności (twierdzenie NewlanderaNirenberga): Struktura niemal zespolona I na $\mathbb{R}^{2n}$ pochodzi od współrzędnych zespolonych wtedy i tylko wtedy gdy $N_I = 0$.

4.15 Związek z twierdzeniem Frobeniusa: cakowalność $\Leftrightarrow$ inwolutywność dystrybucji.

4.16 Jeśli X jest rozmaitością zepoloną, to

$$d(\mathcal{A}^{p,q}(X)) \subset \mathcal{A}^{p+1,q}(X) \oplus \mathcal{A}^{p,q+1}(X)$$

$$d = \partial + \overline{\partial}, \quad \partial^2 = 0 = \overline{\partial}^2, \quad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0\,.$$

4.17 Kompleks Dolbeault: dla każdego $0 \le p \le \dim_{\mathbb{C}} X$ mamy kompleks

$$0 \to \mathcal{A}^{p,0}(X) \overset{\overline{\partial}}{\to} \mathcal{A}^{p,1}(X) \overset{\overline{\partial}}{\to} \cdots \overset{\overline{\partial}}{\to} \mathcal{A}^{p,\dim X}(X) \to 0,,$$

$$ker(\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,0}(X) \to \mathcal{A}^{p,1}(X)) = \Omega^p(X)\,.$$

gdzie $\Omega^p(X)$. oznacza formy typu $(p, 0)$ z holomorficznymi współczynnikami.

4.18 Definiujemy kohomologie Dolbeault jako kohomologie tego kompleksu:

$$H^q_{Dol}(X; \Omega^p) := ker(\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(X) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(X))/im(\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,q-1}(X) \to \mathcal{A}^{p,q}(X))\,.$$

5

5.1 Holomorficzny Lemat Poincaré: ciąg snopów

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}^{0,0} \to \mathcal{A}^{0,1} \to \mathcal{A}^{0,2} \to \dots$$

jest dokładny. Ozacza to, że jeśli $\bar\partial\alpha = 0$, to loklnie istnieje forma β taka, że $\bar\partial\beta = \alpha$. Jeśli X jest polidyskiem, forma α określona na otoczeniu jego domknięciu, to można znaleźć formą β określoną na polidysku.

Dowód: Definiujemy operator $\int_1$ działający na funkcjach $C^\infty(D^n)$

$$\left(\int_1 f\right)(z_1, z_2, \dots z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{f(\xi,z_2,\dots z_n)}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar\xi.$$

Ćwiczenie:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\int_1 f\right) = f.$$

Stąd $\int_1(\frac{\partial}{\partial \bar z_1} f) - f$ jest funkcją holomorficzną ze względu na z_1.

Dla formy $\alpha = dz_1 \wedge \alpha_1 + \alpha_2 \in \mathcal{A}^{0,q}(D^n)$ (gdzie α_1 i α_2 nie zawierają $d\bar z_1$) definiujemy

$$I_1(\alpha) = \int_1 \alpha_1$$

(całkujemy współczynniki form). Sprawdzamy, że

$$(\bar\partial \circ I_1 + I_1 \circ \bar\partial)(\alpha) = \alpha - \beta_1\,,$$

gdzie β_1 jest holomorficzna za względu na z_1 i nie zawiera $d\bar z_1$. Jeśli $\bar\partial\alpha = 0$ to $\alpha = dI_1\alpha + \beta_1$. Stosując operatot I do kolejnych zmiennych otrzymujemy, że $\alpha = \bar\partial\beta_n + \gamma$, gdzie γ jest holomorficzna ze wzglądu na wszystkie zmienne i nie zawiera żadnego $d\bar z_i$ (zatem jeśli $q > 0$, to $\gamma = 0$).

5.2 Kohomologie o współczynnikach w snopie (patrz podręcznik z algebry homologicznej)

$$H^k(X;\mathcal{F}) = H^k(\Gamma(A^\bullet))\,,$$

gdzie

$$\mathcal{F} \leftarrow A^0 \to A^1 \leftarrow A^2 \leftarrow \dots$$

jest dostatecznie „dobrą” rezolwentą $\mathcal{F}$. Można zakładać warunek miękkości: dla każdego przekroju $\mathcal{F}$ na zbiorze domkniętym można przedłużyć do przekroju globalnego. (Zakładamy, że X jest przestrzenią parazwartą.)

5.3 Snop $\mathcal{A}^0_X$ funkcji $\mathbb{C}^\infty$ na rozmaitości różniczkowej jest miękki.

5.4 Każdy snop $\mathcal{A}^0_X$–modułów jest miękki.

5.5 Rezolwenta

$$\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}^{0,\bullet}$$

jest miękka, zatem

$$H^k(X;\mathcal{O}_X) = H^k(\mathcal{A}^{0,\bullet}(X))$$

tzn kohomologie Dolbealt są kohomologiami snopowymi w sensie algebry homologicznej.

5.6 W kategoryjnej definicji kohomologii jako funktora pochodnego funktora przekrojów globalnych istotny jest pierścień bazowy. Jednak, skoro kohomologie można liczyć z rezolwent miękkich, kohomologie nie zależą od tego pierścienia.

5.7 Jeśli E jest lokalnie wolnym $\mathcal{O}_X$ snopem (aka wiązką wektorową) to

$$E \leftarrow E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^{0,\bullet}$$

jest rezolwentą miękką, zatem

$$H^k(X;E) = H^k(\Gamma(E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^{0,\bullet}))\,,$$

w szczególności

$$H^k(X;\Omega^p) = H^k(\mathcal{A}^{p,\bullet}(X))$$

5.8 Kompleks $\mathcal{A}^\bullet = \{\mathbb{R} \to \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1 \to \dots\}$ jest miękką rezolwentą snopa funkcji lokalnie stałych na rozmaitości różniczkowej. Stąd

$$H^k(X;\mathbb{R}) = H^k(\mathcal{A}^\bullet(X))\,.$$

$$H^k(X;\mathbb{C}) = H^k(\mathcal{A}^\bullet(X)_{\mathbb{C}})\,.$$

5.9 Gdy X jest rozmaitością zespoloną, to $\mathcal{A}^k_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}$. Dla $p \geq 0$ definiujemy pdkompleks

$$F^p\mathcal{A}^k = \bigoplus_{p'+q=k,\; p'\geq p} \mathcal{A}^{p',q}\,.$$

Definiujemy filtrację Hodge'a w kohomologiach

$$F^pH^k(X) = im(H^k(F^p\mathcal{A}^\bullet(X)) \to H^k(\mathcal{A}^\bullet(X)_{\mathbb{C}}))\,.$$

5.10 Mamy

$$F^p\mathcal{A}^k/F^{p+1}\mathcal{A}^k \simeq \mathcal{A}^{p,k-p}\,.$$

$$H^{p+q}((F^p\mathcal{A}^k/F^{p+1}\mathcal{A}^k)(X)) = H^q(X;\Omega^p)\,.$$

5.11 W ogólności kohomologie $H^q(X;\Omega^p)$ są związane z $H^k(X;\mathbb{C})$ ciągiem spektralnym. W dalszej części wykładu wykarzemy, że gdy X jestr rozmaitoćią rzutową (ogólniej — Kählera) to

$$H^k(X;\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)\,.$$

$$H^{p,q}(X) = F^pH^k(X) \cap \overline{F^qH^k(X)} \simeq H^q(X;\Omega^p)\,.$$

5.12 Addytywny Proplem Cousina: Dane pokrycie X zbiorami otwartymi $X = \bigcup U_i$. Na kzżdym U_i dana funkcja meromorficzna f_i taka, że różnice $g_{ij} = (f_i)_{|U_i\cap U_j} - (f_j)_{|U_i\cap U_j}$ są funkcjami holomorficznymi. Czy istnieje globalna funkcja meromorficzna f taka, że $f_{|U_i} = f_i$?

Odpowiedź w języku kohomologii: układ funkcji $\{g_{ij}\}$ spełnia warunek kocyklu: $g_{ij} - g_{ik} + g_{jk} = 0$, zatem zadaje element kohomologii Čecha pokrycia $\{U_i\}$, tzn w $H^k(\{U_i\};\mathcal{O}_X)$. Jeśli ten element jest zerowy (tzn kocykl jest kobrzegiem) to problem Cousina ma rozwiązanie. Dokładniej: jeśli istnieją takie funkcje holomorficzne h_i na U_i, że $g_{ij} = h_i - h_j$, to funkcje meromorficzne $\tilde{f}_i = f_i - h_i$ są zgodne na przecięciach i zadają funkcję globalną. Dla rozwiązania problemu Cousina można założyć, że pokrycie jest dowolnie drobne.

5.13 Jeśli pokrycie jest acykliczne, tzn $H^k(U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_\ell};\mathcal{F}) = 0$ dla każdego $k,\ell > 0$, to

$$H^k(\{U_i\};\mathcal{F}) \simeq H^k(X;\mathcal{F}).$$

O kohomologiach Čecha można przeczytać też w [Szabat, Wstęp do analizy zespolonej, jest też wydanie angielskie: B. V. Shabath, Introduction to complex analysis].

5.14 Wniosek: skoro $H^1(\mathbb{P}^n;\mathcal{O}_X) = 0$, więc na $\mathbb{P}^n$ problem Cousina ma zawsze pozytywne rozwiązanie. Dla krzywych rodzaju > 0 problem Cousina nie zawsze ma rozwiaązanie pozytywne.

5.15 Multiplikatywny Problem Cousina — zakładamy, że f_i/f_j jest funkcją holomorficzną na $U_i \cap U_j$ i szukamy globalnej f takiej, że f/f_i jest holomorficzna na U_i. Odpowiedź zależy od klasy kocyklu w $H^1(X;\mathcal{O}_X^*)$.

6 Teoria Hodge'a

6.1 Operator formalnie sprzężony $d^* = -(-1)^{d(k+1)} * d* : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$.

6.2 Laplasjan $\Delta = dd^* + d^*d$, formy harmoniczne $\mathcal{H} = ker\Delta$.

6.3 Dla zwartych C^∞-rozmaitościach mamy:
– $\mathcal{H} = ker(d) \cap ker(d^*) = ker(d) \cap im(d)^\perp$
– podprzestrzenie $\mathcal{H}$, $im(d)$ i $im(d^*)$ są prostopadłe.

6.4 Rozkład Hodge'a $\mathcal{A}^*(M) = im(d) \oplus \mathcal{H} \oplus im(d^*)$.

Rozkład Hodge'a wynika z ogólnej własności samosprzężonych operatorów eliptycznych, której nie będziemy dowodzić:

$$\mathcal{A}^*(M) = ker(\Delta) \oplus im(\Delta)\,.$$

Ponadto $\dim(ker(\Delta)) < \infty$.

6.5 Wniosek 1: $\mathcal{H} \to H^*(M)$ jest izomorfizmem.

6.6 Wniosek 2: Dualność Poincaré: dla każdej klasy kohomologii $[\alpha] \neq 0$ istnieje klasa $[\beta]$ w dopełniającym wymiarze taka, że $\int_M \alpha \wedge \beta \neq 0$.

Zakładamy, że α jest harmoniczna i przyjmujemy $\beta = \alpha^*$.

6.7 Forma harmoniczna jest formą o najmniejszej normie w swojej klasie kohomologii.

6.8 Równanie ciepła $\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\Delta\alpha(t)$, $\alpha(0) = \alpha$ (bez dowodów, patrz Arapura §7)
– równanie ciepła ma rozwiązanie dla $t \geq 0$
– $lim_{t\to\infty}\alpha(t)$ istnieje i jest formą harmoniczną, oznaczamy α_H,
– $\alpha = \alpha_H + \Delta G(\alpha)$, gdzie $G(\alpha) = \int_0^\infty (\alpha(t) - \alpha_H)dt$ jest operatorem Greena.

6.9 Ćw: Rozwiązać równanie ciepła gdy $M = S^1$

Teoria Hodge'a na rozmaitościach käklerowskich

6.10 Dla rozmaitości zespolonej z iloczynem hermitowskim $\partial^* = - * \bar{\partial} *$, $\bar{\partial}^* = - * \partial *$

6.11 Rozmaitości kählerowskie: warunek $d\omega = 0$

6.12 Inna charakteryzacja rozmaitości kählerowskiej: w każdym punkcie istnieje układ współrzędnych taki, że metryka hermitowska jest standardowa z dokładnością do wyrazów rzędu $\mathcal{O}(||x||^2)$. [Voisin 1, Prop 3.14]

6.13 Metryka Fubini-Study na $\mathbb{P}^n$

$$< \alpha, \beta >= \frac{1}{\pi}\frac{< w, w >< \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > - < \tilde{\alpha}, w >< w, \tilde{\beta} >}{< w, w >^2},$$

gdzie $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in T_w\mathbb{C}^{n+1}$ są podniesieniami wektorów $\alpha, \beta \in T_{[w]}\mathbb{P}^n$. W lokalnych współrzędnych na U_0 formę symplektyczną można zapisać jako

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}log(1 + \sum_{k=1}^n |w_k|^2)$$

Spełniony jest warunek Kählera $d\omega = 0$.

6.14 Dla $n = 1$

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\frac{1}{(1 + w\bar{w})^2}dw \wedge d\bar{w} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy$$

oraz $\int_{\mathbb{P}^1} \omega = 1$.

6.15 Zespolona podrozmaitość $\mathbb{P}^n$ jest kählerowska.

6.16 Tożsamości Hodge'a:
i) $[\bar\partial, L] = [\partial, L] = 0$ (bezpośrednio z warunku $d\omega = 0$)
i') równoważnie komutowanie Λ z ∂^* i $\bar\partial^*$]
ii) $[\bar\partial^*, L] = i\partial$, $[\partial^*, L] = -i\bar\partial$
ii') równowżnie $[\Lambda, \bar\partial] = -i\partial^*$, $[\Lambda, \partial] = i\bar\partial^*$ (to istota dowodu wszystkich tożsamości)
iii) $[\partial, \bar\partial^*]_s = [\partial^*, \bar\partial]_s = 0$ (to już formalne konsekwencje ii))
iv) $\Delta_\partial = \Delta_{\bar\partial} = \frac{1}{2}\Delta$ i jest przemienny z ∂, $\bar\partial$, ∂^*, $\bar\partial^*$, L i Λ (dowód formalny)

7

7.1 Dowód tożsamości Hodge'a: jeśli $d\omega = 0$ to w każdym punkcie istnieje układ wspólrzędnych, w którym ω jest standardową formą z dokładnością do wyrazów rzędu conajmniej 2, tzn $< e_i, e_j >_z = \delta_{i,j} + \mathcal{O}(||z||^2)$.

Dowodzimy $[\bar\partial^*, L] = i\partial$, gdzie $\partial^* = - * \circ\bar\partial \circ *$. Należy rozł ożyć $\bar\partial = \sum \bar\partial_k$, $\omega = \sum \omega_k$, gdzie $\omega_k = \frac{k}{2} dz_k d\bar z_k$. Operatory ω_k i ∂^*_ℓ są przemienne dla $k \neq \ell$. Pozostaje zbadać działanie $[\omega_k, \partial^*_k]$ na $\alpha = f dz_I \wedge d\bar z_J$, i rozważając cztery przypadki $k \in$ lub $\notin I$ lub J.

Kohomologie rozmaitości Kählera

7.2 Wniosek: $H^*(M) \simeq \mathcal{H}$ jest reprezentacją $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$.

7.3 Reprezentacje $\mathfrak{sl}(2)$ są opisane przez (4.8). Stąd

$$L^k : H^{n-k}(M) \to H^{n+k}(M)$$

jest izomorfizmem (**Trudne twierdzenie Lefschetza**).

Sygnatura

7.4 Dla $\Lambda\mathbb{C}$ mamy $*dz = *(dx + idy) = dy - idx) = -i(dx + idy)$. Stąd $*\Lambda^{1,0} = \Lambda^{1,0}$ i

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}^{p,q} & \overset{\text{sprzężenie}}{\longleftrightarrow} & \mathcal{H}^{q,p} \\
*\updownarrow & & \updownarrow * \\
\mathcal{H}^{n-q,n-p} & \overset{\text{sprzężenie}}{\longleftrightarrow} & \mathcal{H}^{n-p,n-q}
\end{array}$$

7.5 Relacje Hodge'a-Riemanna, wzór na sygnaturę: Forma

$$B(\alpha, \beta) = i^{p-q} \cdot (-1)^{(k)(k-1)/2} \int_M \alpha \wedge \bar\beta \wedge \omega^{n-k}$$

jest dodatnio określona dla prymitywnych klas kohomologii $\alpha, \beta \in P^{p,q}(M)$, $k = p + q$.
Wszystko wynika z analogicznego stwierdzenia dla potęgi zewnętrznej przestrzeni liniowej (3.13) i następującej równości dla $\alpha \in P^k$:

$$L^{n-k}\alpha = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} (n-k)! * I(\alpha)$$

dowodzonej indukcyjnie

$$L^j\alpha = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{j!}{(n-k-j)!} * L^{n-k-j} I(\alpha).$$

Wtedy:

$$\alpha \wedge \bar\alpha \wedge \omega^{n-k} = \alpha \wedge L^{n-k}(\bar\alpha) = \alpha \wedge (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} (n-k)! * I(\alpha) =$$
$$= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \alpha \wedge *(n-k)! I(\alpha) = i^{q-p} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} (n-k)! < \alpha, \alpha > vol$$

7.6 Mamy równości $\dim P^{p,q}(M) = h^{p,q} - h^{p-1,q-1}$ i z równości $h^{p,q} = h^{q,p} = h^{n-p,n-q}$. Punktowo iloczyn zewnętrzny

$$(\alpha,\beta) \mapsto \alpha \wedge \bar{\beta} \wedge \omega^{n-p-q} = \phi(\alpha,\beta)\omega^n$$

można wyrazić przez formę, która jest określoną ϕ na każdej przestrzeni $P^{p,q}$ dla $p+q$ parzystego. Wynika stąd wzór na sygnaturę

$$sgn(M) = \sum_{p+q=\dim(M)} \sum_{j\geq 0} i^{p-q} \cdot (-1)^{\frac{\dim(M)}{2}-j} \dim(P^{p-j,q-j}) = \sum_{p,q=0}^{\dim(M)} (-1)^p h^{p,q} .$$

Wystarczy sumować składniki dla których $p-q$ jest parzyste. Dla rozmaitości wymiaru 4:

$$sgn(M) = \begin{matrix} +p^{4,0} & -p^{3,1} & +p^{2,2} & -p^{1,3} & +p^{0,4} \\ & +p^{2,0} & -p^{1,1} & +p^{0,2} & \\ & & +p^{0,0} & & \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} +h^{4,0} & -h^{3,1}+h^{2,0} & +h^{2,2}-h^{1,1} & -h^{1,3}+h^{0,2} & +h^{0,4} \\ & +h^{2,0} & -h^{1,1}+h^{0,0} & +h^{0,2} & \\ & & +h^{0,0} & & \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & & +h^{4,4} & & \\ & +h^{4,2} & -h^{3,3} & +h^{2,4} & \\ +h^{4,0} & -h^{3,1} & +h^{2,2} & -h^{1,3} & +h^{0,4} \\ & +h^{2,0} & -h^{1,1} & +h^{0,2} & \\ & & +h^{0,0} & & \end{matrix}$$

7.7 Dla spójnych powierzchni: forma przecięć jest typu $(2h^{2,0}+1, h^{1,1}-1)$.

8

8.1 Kohomologie rozmaitści Kählera - podsumowanie

– $H^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)$, gdzie $H^{p,q}(M) \simeq \mathcal{H}^{p,q} \simeq H^q(X;\Omega^p)$

– $\overline{\mathcal{H}^{p,q}} = \mathcal{H}^{q,p}$ (sprzężenie zespolone)

– $*\mathcal{H}^{p,q} = \mathcal{H}^{n-q,n-p}$, gdzie $n = \dim X$ (Dualność Serre'a)

– Jeśli $k = n-(p+q) \geq 0$ to $L^k : H^{p,q}(X) \to H^{p+k,q+k}(X)$ jest izomorfizmem

– rozkład Lefschetza jeśli $p+q \leq n$

$$H^{p,q}(M) = P^{p,q}(M) \oplus L(P^{p-1,q-1}(M) \oplus L^2(P^{p-2,q-2}(M) \oplus \ldots$$

8.2 Diament Hodge'a $h^{p,q} = h^{n-p,n-q} = h^{q,p}$. Np dla $n=3$

$$\begin{matrix} & & & h^{33} & & & \\ & & h^{32} & & h^{23} & & \\ & h^{31} & & h^{22} & & h^{13} & \\ h^{30} & & h^{21} & & h^{12} & & h^{03} \\ & h^{20} & & h^{11} & & h^{02} & \\ & & h^{10} & & h^{01} & & \\ & & & h^{00} & & & \end{matrix} = \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & \spadesuit & & \spadesuit & & \\ & \diamondsuit & & \clubsuit & & \diamondsuit & \\ \square & & \heartsuit & & \heartsuit & & \square \\ & \diamondsuit & & \clubsuit & & \diamondsuit & \\ & & \spadesuit & & \spadesuit & & \\ & & & 1 & & & \end{matrix}$$

$$h^{00} \leq h^{11}, \quad h^{10} \leq h^{21}$$

8.3 Dla rozmaitości Calabi-Yau tzn gdy $\Omega^n \simeq \mathcal{O}_X$ (i dodatkowo zakładamy, że $H^0(X,\Omega^p) = 0$ dla $0 < p < n$) diament Hodge'a wygląda tak ($n=3$)

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & \clubsuit & & 0 & \\ 1 & & \heartsuit & & \heartsuit & & 1 \\ & 0 & & \clubsuit & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{matrix}$$

Mówimy, że X^* jest kohomologicznym lustrem X gdy $h^{pq}(X^*) = h^{n-p,q}(X)$. Dla 3-rozmaitości oznacza to $h^{12}(X^*) = h^{11}(X)$ i $h^{11}(X^*) = h^{12}(X)$. Symetria lustrzanej to geometryczny sposób znajdowania X^*.

8.4 C^∞ **Teoria Morse'a** [Milnor – Morse theory, 1963]

– funkcja Morse'a $f : M \to \mathbb{R}$ to funkcja właściwa, taka że jeśli $Df(p) = 0$, to $D^2f(p)$ jest formą niezdegenerowaną. Zakładamy też, że w przeciwobrazie wartości krytycznej jest tylko jeden punkt krytyczny.

– $ind(p)$=indeks punktu krytycznego = ilość minusów w formie $D^2f(p)$, wtedy $M_{\leq p+\varepsilon}$ powstaje z $M_{\leq p-\varepsilon}$ poprzez doklejenie $I^{ind(p)} \times I^{n-ind(p)}$ wzdłuż $\partial I^{ind(p)} \times I^{n-ind(p)}$, czyli homotopijnie doklejamy komórkę wymiaru $ind(p)$.

– niech $M \subset \mathbb{R}^N$, $f_q(x) = dist(q, x)^2$ dla ustalonego $q \in \mathbb{R}^N \setminus M$: dla prawie wszystkich q jest funkcją Morse'a

– załóżmy, że $q = 0$, p jest krytyczny, $T_pM = \{x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0\}$; zatem M lokalnie jest wykresem funkcji $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{N-n}$, $Dg(0) = 0$; możemy założyć, że $g(0.\ldots, 0) = (a, 0, \ldots, 0)$ dla $a > 0$; wtedy

$$f_q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (a + g_1(x_1, \ldots, x_n))^2 + \sum_{j=2}^{N-n} g_j(x_1, \ldots, x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2ag_1(x_1, \ldots, x_n) + \mathcal{O}(||x||^4)\,,$$

stąd

$$D^2f_q(p) = 2(I + aD^2g_1(0))\,.$$

oraz

$$ind(p) = \#\{\lambda \in specD^2g_1(0) \mid \lambda < -\tfrac{1}{a}\}$$

8.5 Jeśli $M \subset \mathbb{C}^N$ podrozmaitość zespolona, $q \notin M$, p punkt krytyczny funkcji f_q, to indeks tego punktu jest conajwyżej $\dim_{\mathbb{C}}(M)$.

– możemy założyć jak wyżej, że $q = 0$, $a \in \mathbb{R}_+$.

Krok pomocniczy: Niech Q będzie niezdegenerowaną formą zespoloną dwuliniową na $\mathbb{C}^n$. Jeśli u jest wektorem własnym rzeczywistej formy $re(Q)$ z wartością własną λ, to $I(u)$ jest wektorem wąsnym z wartością własną $-\lambda$.

Indeks formy $2(I + a\, re(D^2g(0))$ jest conajwyźej $\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}(M)$.

8.6 Jeśli $M \subset \mathbb{C}^N$ podrozmaitość zespolona wymiaru n, to M ma typ homotopijny n-wymiarowego CW-kompleksu/kompleksu symplicjalnego. Zatem $H^k(M; R) = 0$ dla $k > n$ (współczynniki dowolne).

8.7 Łatwe twierdzenie Lefschetza [Milnor §7]: Jeśli $X \subset \mathbb{P}^N$ podrozmaitość zespolona wymiaru n, $Y = X \cap \mathbb{P}^{N-1}$, to $H_{n-k}(X \setminus Y) \simeq H^k(X, Y) = 0$ dla $k < n$. Zatem $i^* : H^k(X) \to H^k(Y)$ jest izomorfizmem dla $k < n - 1$, monomorfizmem dla $k = n - 1$.

8.8 Podobnie: $H^{n-k}(X \setminus Y) \simeq H_k(X, Y) = 0$ dla $k < n$. Zatem $i_* : H_k(Y) \to H_k(X)$ jest izomorfizmem dla $k < n - 1$, epimorfizmem dla $k = n - 1$.

8.9 Ponadto $i_* : \pi_1(Y) \to \pi_(X)$ jest izomorfizmem gdy $1 < n - 1$, epimorfizmem dla $1 = n - 1$.

8.10 Jeśli $X \subset \mathbb{P}^N$, oraz M jest gładką hiperpowierzchnią stopnia d, to $M \cap X \simeq \iota(X) \cap H$, gdzie $\iota : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}(Sym^d(\mathbb{C}^{N+1}))$ jest zanurzeniem Plückera, i H jest hiperpłaszczyzną w $\mathbb{P}(Sym^d(\mathbb{C}^{N+1}))$.

Stąd dla zupełnego przecięcia dostajemy informację o wszystkich liczbach Bettiego $X \subset \mathbb{P}^N$ oprócz środkowej:

$$X = X_{N-n} \subset X_{N-n-1} \subset \cdots \subset X_{N-1} \subset X_N = \mathbb{P}^N$$

$\dim(X_i) = N - i$, skoro $k < n < \dim(X_i)$ dla $i < N - n$, to mamy izomorfizmy $H^k(X_i) \simeq H^k(x_{i+1})$. Zatem

$$H^k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dla } k \text{ parzystego} \\ 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystego} \end{cases}$$

dla $k < n$, oraz z dualności Poincaré $H^k(X) \simeq H_{2n-k}(X)$ ten sam wzór mamy dla $n > k$.

8.11 Dla zupełnych przecięć, poza środkowym wymiarem $H^*(X;\mathbb{Q})$ są generowane przez $[\omega^k]$.

8.12 Ćw: znaleźć $\dim(H^n(Q_n))$ dla nieosobliwej kwadryki w $\mathbb{P}^{n+1}$.

Teoria Picarda-Lefschetza

8.13 Niech $X \subset \mathbb{P}^N$ rozmaitość rzutowa wymiaru n, H hiperpowierzchnia, $Y = X \cap H$. Definiujemy cykle niezmiennicze i znikające:

$$Inv = im(\iota^* : H^{n-1}(X) \to H^{n-1}(Y))\,,$$

$$Van = ker(\iota_* : H^{n-1}(Y) \to H^{n+1}(X))(= ker(\iota_* : H_{n-1}(Y) \to H_{n-1}(X))\,)\,,$$

Korzystając z tożsamości $[Y] \cup a = i_* i^* a$ i trudnego twierdzenia Lefschetz dowodzimy, że

$$H^{n-1}(Y) = Inv \oplus Van\,.$$

Ponadto z tożsamości $(i^*a \cup b, [Y]) = (a \cup i_* b, [X])$ otrzymujemy, że Inv i Van są prostopadłe ze względu na formę przecięć.

8.14 Pęk Lefschetza: niech $X \subset \mathbb{P}^N$, A podprzestrzeń rzutowa kowymiaru 2. Hiperpłaszczyzny $H \subset \mathbb{P}^N$ zawierające A są parametryzowane przez $\mathbb{P}^1$. Oznaczenie: dla $\lambda \in \mathbb{P}^1$ odpowiadająca przestrzeń to H_λ. Definiujemy

$$\widetilde{X} = \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{P}^1 \mid x \in H_\lambda\}\,.$$

Mamy rzutowania

$$X \longleftarrow \widetilde{X} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^1\,.$$

Mówimy, że X jest pękiem Lefschetza gdy $\widetilde{X}$ jest gładkie i rzutowanie na $\mathbb{P}^1$ ma tylko proste osobliwości (postać lokalna $\sum_{i=1}^n z_i^2$), conajwyżej jedna we włóknie.

Twierdzenie: dla generycznego wyboru A otrzymujemy pęk Lefschetza.

8.15 Niech $S \subset \mathbb{P}^1$ będzie zbiorem wartości krytycznych p, $U = \mathbb{P}^1 \setminus S$. Wtedy $p : \widetilde{X}_U = p^{-1}(U) \to U$ jest rozwłóknieniem lokalnie trywialnym w topologii C^∞. Niech $\lambda \in U$. Grupa podstawowa $\pi = \pi_1(U,\lambda)$ działa na kohomologie włókna $X_\lambda = X \cap H_\lambda$. Opiszemy podprzestrzenie Inv i V w $H^{n-1}(X_\lambda)$ w terminach działania π.

8.16 Twierdzenie (równoważne Trudnemu Lefschetzowi) dla pęku Lefschetza mamy

$$Inv = H^{n-1}(Y)^\pi\,,$$

gdzie $\pi = \pi_1(U,\lambda)$, oraz $(-)^\pi$ oznacza niezmienniki działania. Ponadto cykle znikające $Van \subset H^{n-1}(Y) \simeq H_{n-1}(Y)$ są generowane przez geometryczne cykle odpowiadające punktom osobliwym odwzorowania $\mathcal{X} \to \mathbb{P}^1$.

Patrz np: Klaus Lamotke, The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz. Topology 20 (1981), no. 1, 15-51 lub

[Arapura §13.3] Donu Arapura, Algebraic Geometry over the Complex Numbers, Springer Universitext 2012

9 Monodromia

9.1 Ogólne wiadomości o monodromii: dla topologicznego rozwłóknienia $F \subset E \to B$ mamy odwzorowanie

$$\pi_1(B,b) \to [F_b, F_b]$$

skonstruowane przez wasność podnoszenia homotopii oraz

$$\pi_1(B,b) \to Aut(H_*(F_b))\,.$$

9.2 Ciąg Wanga dla rozwłóknienia nad okręgiem

$$\to H_k(F) \stackrel{\mu-1}{\to} H_k(F) \to H_k(E) \to H_{k-1}(F) \to$$

otrzymany z ciągu dokładnego pary (E, E_+), gdzie E_+ jest przeciwobrazem półokręgu

$$\to H_{k+1}(E, E_+) \to H_k(E_+) \to H_k(E) \to H_k(E, E_+) \to$$

9.3 Inna sytuacja, gdzie monodromia ma kluczowe znaczenie: Niech $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ kiełek odwzorowania holomorficznego z izolowaną osobliwością w zerze, $f(0) - 0$. Rozwłóknienie Milnora

$$f/|f| : S^{2n-1}_\epsilon \setminus X \to S^1$$

i równoważne z nim

$$f : B_\epsilon \cap f^{-1}(S^1_\delta) \to S^1 ,$$

$0 < \delta << \epsilon << 1$.

9.4 Lokalna topologia osobliwości $\sum z_i^2$: zbiór $Y_\epsilon = \{\sum z_i^2 = \epsilon\}$ jest homeomorficzny z TS^{n-1}. (Uwaga na zmianę orientacji o $(-1)^{n(n+1)/2}$.)

$$\begin{aligned}
&Y_\epsilon = \{\sum x_i y_i = 0, \ \sum x_i^2 - y_i^2 = \epsilon\} , \\
&Y_\epsilon = \{(x, y) = 0, \ ||x||^2 = \epsilon + ||y||^2\} , \\
&Y_\epsilon = \{(x, y) = 0, \ | \, |x/\sqrt{\epsilon + ||y||^2} \, ||^2 = 1\} , \\
&TS^{n-1} = \{(u, y) = 0, \ ||u|| = 1\}, \qquad \text{gdzie } u = \tfrac{x}{\sqrt{\epsilon+||y||^2}} .
\end{aligned}$$

9.5 Niech

$$\delta = [S^{n-1}], \qquad \ell - \text{klasa włókna } TS^{n-1} .$$

Lokalna monodromia osobliwości kwadratowej działa tak:

$$\mu(\ell) = \ell + \delta$$

9.6 Formuła Picarda Lefschetza. Monodromia działania γ na cyklach w Y:

$$\mu(\alpha) = \alpha + (-1)^{n(n+1)/2}(\alpha, \delta)\delta,$$

gdzie δ klasa małej sfery w otoczeniu i-tego punktu krytycznego.

9.7 Wracamy do pęku Lefschetza: Dana podrozmaitość $X \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{N+1})$ oraz $A \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$, liniowa podprzestrzeń kowymiaru 2. Prosta rzutowa $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{N+1}/V)$ parametryzuje hiperpłaszczyzny H_λ zawierające A. Jeśli A jest transwersalne do X, to

$$\widetilde{X} = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{P}^1 \mid x \in H_\lambda\}$$

jest izomorficzne z rozdmuchaniem X w $X \cap A$. W szczególności $\mathcal{X}$ jest rozmaitością gładką. Zakładamy, że rzutowanie $\mathcal{X} \to \mathbb{P}^1$ ma jedynie osobliwości typu Morse'a.

9.8 Mamy rozwłóknienie nad $U = \mathbb{P}^1 \setminus S$ z włóknem dyfeomorficznym z Y. Zbiór U możemy utożsamić z dyskiem bez kilku punktów. Grupa podstawowa U jest wolna, generowana przez $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ (po jednym generatorze dla każdej wartości krytycznej. Jedyna relacja, to $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_k = 1$ (można wyrzucić γ_k i będą wolne generatory).

9.9 Twierdzenie Picarda-Lefschetza: w pęku Lefschetza

– $Van = ker(H_{n-1}(Y) \to H_{n-1}(X)) \simeq im(H_{\underline{n}}(X, Y) \to H_{n-1}(Y))$ jest generowane przez cykle δ_i związane z punktami krytycznymi odwzorowania $\widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$

– $Inv = H^{n-1}(Y)^\pi$

– $H^{n-1}(Y) = Inv \oplus Van$, suma ortogonalna ze względu na formę przecięć

– rerezentacja $\pi = \pi_1(U)$ na Van jest prosta.

9.10 Przykład rodziny w $\mathbb{P}^2$ z monodromią, która nie jest pólprosta:

$$z_0 z_2^2 = 4z_1^3 + (t - 3)z_0^2 z_1 + (s - 1)z_0^3 .$$

Monodromia jest postaci $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. [Barth-Hulek-Van de Ven, Compact Complex Surfaces p.152]

Formalność

(Tego nie omawiaem)

9.11 $\partial\bar\partial$–lemat: jeśli $\bar\partial\alpha = 0$ i $\alpha = \partial\beta$, to istnieje γ taka, że $\alpha = \partial\bar\partial\gamma$.

Dowód: Zakładamy że $\alpha \in A^{p,q}$, $\partial\alpha = 0$, $\alpha = \bar\partial\beta$:

$$\alpha = \bar\partial\beta = \bar\partial(\beta_h + \partial\gamma + \partial^*\delta) = \bar\partial\partial\gamma + \bar\partial\partial^*\delta$$

$$0 = \partial\alpha = \partial\bar\partial\partial^*\delta$$

$$0 = (\partial\bar\partial\partial^*\delta, \bar\partial\delta) = (\bar\partial\partial^*\delta, \partial^*\bar\partial\delta) = -||\bar\partial\partial^*\delta||^2$$

9.12 Bliźniaczy dd^c–lemat, gdzie

$$d^c = I^{-1}dI = i\partial - i\bar\partial$$

$$d^c = -i(\partial - \bar\partial), \quad (d^c)^* = - * d^c *$$

(trzeba sprawdzić, że $[d^c, d^*] = 0$.) Korzystamy z z rozkładu Hodge'a dla d^c (sprzężenie rozkładu dla d).

$$d^c\alpha = 0 \quad \text{i} \quad \alpha = d\beta \quad \text{i} \quad \exists\gamma\ \alpha = dd^c\gamma\,.$$

9.13 CDGA modulo kwaziizomorfizmy i formalność

9.14 Formalność rozmaitości kählerowskich:

– Niech $\mathcal{Z}^\bullet_{d^c}(M) = ker(d^c) \subset \mathcal{A}^\bullet(M)$ włożenie jest kwazi-izomorfizm (epi, bo $\mathcal{H} \subset \mathcal{Z}^\bullet_{d^c}(M)$, mono bo gdy $d^c\alpha = 0$, $\alpha = d\beta$ to $\alpha = dd^c\gamma$

– Różniczka $(H^*_{d^c}(M), d)$ jest trywialna.

– Niech $H^*_{d^c}(M) = ker(d_c)/im(d_c)$, rzutowanie $(\mathcal{Z}^\bullet_{d^c}(M), d) \to (H^*_{d^c}(M), d)$ jest kwaziizomorfizmem (oczywiste).

9.15 Wniosek: dla rozmaitości Kählera wszystkie produkty Masseya znikają.

(Potrójny produkt Masseya klas kohomologii $([\alpha], [\beta], [\gamma])$ — definicja Huybrechts 3.A.31)

Prykad

9.16 Z teorii Hodge'a wynika, że $\alpha \in \Omega^p(X)$ jest holomorficzną formą, to $d\alpha = 0$. Poniżej jest przykład nietrywialnej 1-formy holomorficznej na krzywej eliptycznej zadanej równaniem.

9.17 Niech $f = y^2z - (x^3 + pxz^2 + qz^3) = 0$ zadaje gładki stożek w $cE \subset \mathbb{C}^3$.

– Iloraz form $\alpha = \frac{vol}{df}$ lokalnie (tam gdzie $f'_y \neq 0$) równy

$$-\frac{dx \wedge dz}{f'_y} = \frac{dz \wedge dx}{2yz}$$

jest dobrze określoną formą na $cE \setminus \{0\}$.

– $cE \setminus \{0\}$ rozwłóknia się nad E z włóknem $\mathbb{C}^*$. W trywializacji $x = uz$, $y = vz$ forma α jest równa

$$\alpha = \frac{dz \wedge (zdu + udz)}{2vz^2} = \frac{dz}{z} \wedge \frac{du}{2v}$$

– całkując tę formę po wiązce okręgów dostajemy 1-formę na E

$$\beta = \int_z \alpha = 2\pi i res_z(\alpha) = 2\pi i\frac{du}{2v}$$

– Ta forma jest nietrywialna: gdy $p, q \in \mathbb{R}$ można obliczyć całkę z tej formy po cyklu $\mathbb{RP}^2 \cap E$

$$\int_{\mathbb{RP}^2\cap E} \beta = 2 \cdot 2\pi i \int_{u_0}^{\infty} \beta = 2\pi i \int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u^3 + pu + q}} du \neq 0$$

(zakładamy, że $\mathbb{RP}^2 \cap E = \{[u_0, 0, 1], [1, 0, 0]\}$)

Patrz Mathematica Wolfram ,,incomplete elliptic integral of the first kind" np. gdy

$$f = y^2 z - (x^3 + x)\,,$$

to

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u^3 + u}} du = \frac{8\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}}$$

10 Wiązki wektorowe

10.1 Aksjomatyczna definicja klas Cherna np wg Milnora-Stasheffa

Dalej Huybrechsa §4

10.2 Struktura hermitowska na wiązce zespolonej (nad dowolną bazą)

10.3 Zakładamy, że baza X jest rozmaitością zespoloną, E wiązką holomorficzną. Niech $A^k(X, E) = \Gamma(\mathcal{A}^k_X \otimes E)$, $A^k(X, E) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X, E)$. Operator $\bar\partial_E : A^{p,q}(X, E) \to A^{p,q+1}(X, E)$.

10.4 Gdy baza jest rozmaitością zespoloną ze struktuą hermitowską, E wiązką ze strukturą hermitowską definiujemy antyliniowy izomorfizm

$$\bar{*}_E : A^{p,q}(X, E) \xrightarrow{\simeq} A^{n-p,n-q}(X, E^*)$$

oraz operator

$$\bar\partial^*_E = -\bar{*}_{E^*}\bar\partial\bar{*}_E : A^{p,q}(X, E) \to A^{p,q-1}(X, E)$$

który jesat formalnie sprzężony do $\bar\delta_E$.

10.5 Laplasjan $\Delta_E = [\bar\partial_E, \bar\partial^*_E]_s$. Formy harmoniczne $\mathcal{H}^{p,q} = \ker(\Delta_E) \cap A^{p,q}(X, E)$.

10.6 Rozkład Hodge'a i izomorfizm $H^{p,q}(X; E) := H^q(X; \Omega^p \otimes E) \simeq \mathcal{H}^{p,q}$.

10.7 Dulaność Serre'a

10.8 Koneksja na wiązce zespolonej nad C^∞ rozmaitością.

10.9 Koneksja zgodna ze strukturą hermoitowską na wiązce (lokalnie w trywializacji $\nabla = d + \alpha$, gdzie $\alpha \in A^1(X, \mathfrak{u}(E)) \subset A^1(X, End(E))$.

10.10 Koneksja zgodna ze strukturą zespoloną tzn $\nabla^{0,1} = \bar\partial_E$.

10.11 Istnieje dokładnie jedna koneksja zgodna ze strukturą hermitowską i zespoloną.

11 Klasy Cherna

11.1 Koneksja holomorficzna: lokalnie, gdy $E \simeq \mathbb{C}^n$, $D = \partial \otimes id + \alpha$, $\alpha \in \Omega^1 \otimes End(E)$. Nie musi zawsze istnieć. Przeszkodą jest klasa Atiyaha $A(E) \in H^1(X; \Omega^1 \otimes End(E))$. Klasa Atiyaha zadana jest przez kocykl Cecha $\{d\psi_{ij}\}$ (z złożony z trywializacją wiązki), gdzie $\psi_{i,j}$ jest kocyklem sklejającym wiązkę. Koneksja holomorficzna istnieje na E wtedy i tylko wtedy gdy $A(E) = 0$.

11.2 Przykład $E = \mathcal{O}(n) \to \mathbb{P}^1$. Mamy

$$A(E) = dz^n = n\, z^{n-1} dz \in H^0(\mathbb{C}^*, \Omega^1) \simeq H^1(\mathbb{P}^1; \Omega^1 \otimes End(E)).$$

11.3 Rozszerzenie koneksji poprzez formułę Leibniza $\nabla_E : \mathcal{A}^k(X, E) \to \mathcal{A}^{k+1}(X, E)$.

11.4 Koneksja na E indukuje koneksję na $End(E)$

$$(\nabla f)(s) := \nabla(f(s)) - f\nabla s = [\nabla, f]s\,.$$

11.5 Krzywizna $F_\nabla = \nabla^2 \in \mathcal{A}^2(X,E)$ jest $A^1(X)$ liniowa, więc zadaje przekrój $\mathcal{A}^2(X, End(E))$.

11.6 Jeśli lokalnie $\nabla = d+\alpha$, to $F_\nabla = d\alpha + \alpha\wedge\alpha \in \mathcal{A}^2(X, End(E))$.

11.7 Jeśli ∇ jest zgodna ze strukturą hermitowską i zespoloną, to $F_\nabla \in \mathcal{A}^{1,1}(X; End(E,h))$.

11.8 Dla wiązek liniowych $End(E) = \mathbb{C}$, $\alpha\wedge\alpha = 0$, więc $F_\nabla = \partial\alpha = \partial\bar\partial\log h$, gdzie $H = [h]$ jest macierzą iloczynu hermitowskiego.

11.9 Tożsamość Bianchi:

$$\nabla(F_\nabla) = 0 \in \mathcal{A}^3(X, End(E)).$$

Lokalnie dla $\nabla = d+\alpha$

$$\nabla(F_\nabla) = (d+\alpha)(d\alpha+\alpha\wedge\alpha) = d(\alpha\wedge\alpha) + [\alpha, d\alpha] = 0\,.$$

Mamy też

$$dF_\nabla = d(d\alpha+\alpha\wedge\alpha) = d\alpha\wedge\alpha - \alpha\wedge d\alpha = [d\alpha,\alpha] = [F_\nabla,\alpha]\,.$$

11.10 Dla dowolnego wielomianu $P: End(\mathbb{C}^n)\to\mathbb{C}$ niezmienniczego ze względu na sprzężenie forma $P(\nabla_E^2) \in A^{2\deg(P)}(X)$ jest zamknięta.

Dowód (wg Milnora-Stasheffa Appendix C) Dla $A = (a_{ij})_{i,j}$ definiujemy macierz $P'(A) = (\frac{\partial P}{\partial a_{ji}})_{i,j}$. Mamy $dP(A) = tr(P'(A)\cdot dA)$. Ponadto, jeśli P jest Ad-niezmienniczy, to macierze $P'(A)$ i A są przemienne.

$$\begin{aligned} dP(F_\nabla) &= P'(F_\nabla)dF_\nabla = P'(F_\nabla)[F_\nabla,\alpha] = P'(F_\nabla)\wedge F_\nabla\wedge\alpha - P'(F_\nabla)\wedge\alpha\wedge F_\nabla = \\ &= F_\nabla\wedge P'(F_\nabla)\wedge\alpha - P'(F_\nabla)\wedge\alpha\wedge F_\nabla = [F_\nabla, P'(F_\nabla)\wedge\alpha] = 0\,. \end{aligned}$$

11.11 Uwaga: Przekształcenie

$$\mathbb{C}[M_{n\times n}(\mathbb{C})]^{GL_n} \to \mathbb{C}[\text{macierze diagonalne}]^{\Sigma_n} = \mathbb{C}[\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n]$$

jest izomorfizmem. Jeśli P jest wielomianem Ad-niezmienniczym, to można go wyrazić przez współczynniki wielomianu charakterystycznego. Równoważnie: $P(A)$ jest funkcją symetryczną od wartości własnych macierzy A.

11.12 $P(F_\nabla)$ definiuje klasę kohomologii, która nie zależy od wyboru koneksji. Biorąc $P = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k\sigma_k$ (gdzie σ_k jest k-tym współczynnikiem wielomianu charakterystycznego) definiujemy klasy Cherna.

11.13 Sprawdzamy, że klasy Cherna spełniają aksjomaty. Unormowanie: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\subset\mathbb{C}^{n+1}$, na zbiorze $\mathbb{C}^n = U_0 = \{z_0\neq 0\}$ ze współrzędnymi $w_i = \frac{z_i}{z_0}$ mamy przekrój $s(w_1,w_2,\dots,w_n) = (1,w_1,w_2,\dots,w_n)$. Stąd $[c_1(\mathcal{O}(-1)] = \left[\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\log(1+|w|^2)\right]$. Dla $n=1$:

$$[c_1(\mathcal{O}(-1)] = \left[\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\log(1+w^2)\right] = \left[\frac{i}{2\pi}\frac{dz\wedge d\bar z}{(1+|w|^2)2}\right] = \left[\frac{i}{2\pi}\frac{-2idx\wedge dy}{(1+|w|^2)2}\right]$$

Po scałkowaniu po $\mathbb{P}^1$ dostajemy -1. Forma definiująca $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ jest równa formie Fubini-Study.

11.14 Charakter Cherna $ch(E)$: przyjmujemy $P(A) = \prod_{k=1}^n \exp(\frac{i\lambda_k}{2\pi})$. Mamy

$$ch(E\oplus F) = ch(E) + ch(F)$$

$$ch(E\otimes F) = ch(E)\cdot ch(F)$$

11.15 Pierwsza klasa Cherna:

– aksjomatycznie:

  * jest naturalna ze względu na przekształcenia ciągłe/gładkie
  * $c_1(L \otimes K) = c_1(L) + c_1(K)$
  * $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) =$ dodatni generator $H^2(\mathbb{P}^1)$

– $\frac{i}{2\pi}[F_\nabla] = \frac{i}{2\pi}[\partial\bar\partial \log h]$

– poprzez teorię przeszkód

– $Vect^1(X) = [X, B\mathbb{C}^*] = [X, \mathbb{P}^\infty] = [X, K(\mathbb{Z}, 2)] = H^2(X;\mathbb{Z})$,
gdzie $Vect^1(X) = H^1(X; C(X, \mathbb{C}^*))$ oznacza zbiór klas izomorfizmu wiązek liniowych.

–poprzez ciąg dokładny kohomologii stowarzyszony z krótkim ciągiem dokładnym snopów

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to C(X, \mathbb{C}) \to C(X, \mathbb{C}^*) \to 0$$

$$0 = H^1(X, C(X, \mathbb{C})) \to H^1(X, C(X, \mathbb{C}^*)) \to H^2(X; 2\pi i\mathbb{Z}) \to H^2(X, C(X, \mathbb{C})) = 0$$

– poprzez teorię przeszkód: przeszkoda do istnienia niezerowego przekroju w

$$H^2(X; \pi_1(\mathbb{C}^*)) \simeq H^2(X;\mathbb{Z})$$

11.16 Dla rozmaitości zespolonych i wiązek holomorficznych:
– klasa Atiyaha $A(X) \in H^1(X; \Omega^1)$
– dywizor zadany przez przekrój meromorficzny wiązki
– poprzez ciąg dokładny kohomologii stowarzyszony z krótkim ciągiem dokładnym snopów

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = Pic(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X; 2\pi i\mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

12

[wg Griffiths-Harris z dostostosowana notacją, Ch.1,§2]

12.1 Mówimy, że forma $\omega \in A^{1,1}(X) \cap A^2(X) \subset A^2(X)_\mathbb{C}$ jest dodatnia, gdy jest minus częścią urojoną iloczynu hermitowskiego $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle x, y\rangle - i\omega(x, y)$, tzn

$$\omega = \frac{i}{2}\sum h_{ij} dz_i \wedge d\bar z_j\,,$$

gdzie (h_{ij}) jest macierzą iloczynu hermitowskiego.

12.2 Wiązki liniowa jest dodatnia gdy dopuszcza koneksję ∇ taką, że $\frac{i}{2\pi}F_\nabla$ jest dodatnią (1,1)-formą.

12.3 Stw: Jeśli $[\omega] = c_1(L) \in H^2(X)$, gdzie ω jest rzeczywistą (1,1)-formą, to istnieje koneksja ∇ taka, że $\omega = \frac{i}{2\pi}F_\nabla$.

Dw: lokalnie w trywializacji $F_\nabla = \partial\bar\partial \log(h(z))$. Dla innego wyboru metryki mamy $h' = e^\rho h$. Stąd

$$F_{\nabla'} = \partial\bar\partial \log(e^\rho h(z)) = F_\nabla + \partial\bar\partial\rho.$$

Chcemy by

$$F_{\nabla'} = -2\pi i\omega = F_\nabla + d\beta$$

dla zadanej $\beta \in A^1(X)$. Zatem trzeba rozwiązać równanie

$$\partial\bar\partial\rho = d\beta\,.$$

Wtedy $h' = e^\rho h$ i ∇' jest zgodną koneksją. Zamiast tego rozwiązujemy równanie

$$dd^c\tilde\rho = d\beta$$

(bo $dd^c = -i(\partial + \bar\partial)(\partial - \bar\partial) = 2i\partial\bar\partial$). To jest dokładnie dd^c lemat 9.12

$\alpha = d\beta$ i $d^c\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = dd^c\gamma$

(założenie $d^c\alpha = 0$ jest spełnione bo skoro α jest typu (1,1), $d\alpha = 0$, to $\partial\alpha = 0$ i $\bar\partial\alpha = 0$).

12.4 Przykład wiązki dodatniej: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

12.5 Jeśli L i K dodatnie, to $L \otimes K$ też. Jeśli $K = L^{\otimes n}$ jest dodatnie, to L też. Obcięcie zachowuje dodatniość.

12.6 Jeśli L jest generowana przez globalne przekroje, to L jest ,,półdodatnia", tzn L dopuszcza koneksję, której krzywizna definiuje formę półtora-liniowa nieujemnie określoną. Własność półdodatniości jest zachowywana przez pull-backi.

12.7 Jeśli $s_0, s_1, \ldots, s_m \in H^0(X; L)$ nie mają wspólnych zer, to jest zdefiniowane odwzorowanie $\phi : X \to \mathbb{P}^m$, $L = \phi^*\mathcal{O}(1)$. Indukowana koneksja ma półdodatnią krzywiznę.

12.8 Tw Kodairy o zanurzeniu: Jeśli wiązka jest dodatnia, to dla dostatecznie dużego ν jest generowana przez globalne przekroje i odwzorowanie $X \to \mathbb{P}(H^0(X; L^\nu))$ jest zanurzeniem. (Zakładamy tylko, że X jest zwarta, analityczna.)

12.9 Wniosek: Isnienie dodatniej wiązki implikuje, że jest algebraiczna.

Poniżej używamy E jako oznaczenie wiązki, bo L jest zarezerwowane na operator Lefschetza. Zakładamy, że X jest wartą rozmairością analityczną.

12.10 Z rozkładu Hodge'a dla $\bar\partial$

$$H^{p,q}(X; E) = \mathcal{H}^{p,q}(E) = ker(\Delta_E)\,.$$

– Operator $L : A^{p,q}(X; E) \to A^{p+1,q+1}(X; E)$ i sprzężony Λ
– $\nabla = \nabla^{1,0} + \bar\partial_E$ oraz tożsamość

$$[\Lambda, \bar\partial_E] = -i(\nabla^{1,0})^*$$

(uogólnienie tożsamośc Kählera $[\Lambda, \bar\partial] = -i\partial^*$)

12.11 (Znikanie Kodairy-Nakano) Jeśli E jest dodatnia, to $H^{p,q}(X; E) = H^q(X; \Omega^p_X \otimes E) = 0$ dla $p + q > \dim X$.

Niech $\eta \in \mathcal{H}^{p,q}(E)$,

$$\bar\partial_E \eta = 0, \qquad \bar\partial^*_E \eta = 0$$
$$F_\nabla \eta = \bar\partial_E \nabla^{1,0}\eta$$

Stąd

$$i\langle \Lambda F_\nabla \eta, \eta\rangle = i\langle \Lambda\bar\partial_E \nabla^{1,0}\eta, \eta\rangle = i\langle(\bar\partial_E\Lambda - i(\nabla^{1,0})^*)\nabla^{1,0}\eta, \eta\rangle = \langle(\nabla^{1,0})^*\nabla^{1,0}\eta, \eta\rangle = \langle\nabla^{1,0}\eta, \nabla^{1,0}\eta\rangle \geq 0$$

Podobnie

$$i\langle F_\nabla\Lambda\eta, \eta\rangle = i\langle(\bar\partial_E\nabla^{1,0} + \nabla^{1,0}\bar\partial_E)\Lambda\eta, \eta\rangle = i\langle\nabla^{1,0}(\Lambda\bar\partial_E + i(\nabla^{1,0})^*)\eta, \eta\rangle =$$
$$-\langle\nabla^{1,0}(\nabla^{1,0})^*\eta, \eta\rangle = -\langle(\nabla^{1,0})^*\eta, (\nabla^{1,0})^*\eta\rangle \leq 0$$

Stąd

$$i\langle[\Lambda, F_\nabla]\eta, \eta\rangle = ||(\nabla^{1,0})^*\eta||^2 + ||\nabla^{1,0}\eta||^2 \geq 0$$

Ale

$$iF_\nabla = 2\pi L$$

bo L jest dodatnia, więc $\frac{i}{2\pi}F_\nabla$ jest formą Kählera. Stąd

$$i\langle[\Lambda, F_\nabla]\eta, \eta\rangle = 2\pi\langle[\Lambda, L]\eta, \eta\rangle] = -2\pi\langle H\eta, \eta\rangle = 2\pi(n - (p+q))||\eta||^2.$$

Jeśli $n - (p+q) \leq 0$, to $i\langle[\Lambda, F_\nabla]\eta, \eta\rangle \leq 0$. Zatem $||\eta||^2 = 0$.

12.12 Wniosek: jęśli $L^{\otimes n} = \mathcal{O}(1)_X$ dla pewnego zanurzenia $X \subset \mathbb{P}^N$, to $H^k(X, \Omega^n_X \otimes L) = 0$ dla $k > 0$.

Poprzez dualność (lub bezpośrednio, korzystając z tego, że $\frac{i}{2\pi}F_{\nabla_{L^*}} = -\omega$:

$$H^k(X, L^*) = 0$$

dla $k < n$.

12.13 Jeśli L jest dodatnia K dowolna, to $H^q(X, L^{\otimes\mu} \otimes K) = 0$ dla $\mu >> 0$.

Dow $L^{\otimes\mu} \otimes K = \Omega^n \otimes M_\mu$, gdzie $M_\mu = L^{\otimes\mu} \otimes K \otimes \Omega^n$ jest dodatnia dla dostatecznie dużych μ.

13 Twierdzenie Kodairy o zanurzeniu

Twierdzenie Kodairy o zanurzeniu wedug Griffiths-Harris §1.4

13.1 Jeśli X jest zwartą rozmaitścią, a L szeroką wiązką na X, to kanoniczne odwzorowania $\phi_{L^n} : X \to H^0(X; L^n)$ dla dostatecznie dużych n jest włożeniem.

Kroki dowodu:

a) ϕ_{L^n} jest dobrze określone, tzn nie ma punktu w którym wszystkie przekroje zerują się: dla $x \in X$ obcięcie

$$H^0(X; L^n) \to L^n_x = H^0(X; L^b \otimes \mathcal{O}_X/m_x)$$

jest epi,

b) ϕ_{L^n} rozdziela punkty: dla $x \in X$ obcięcie

$$H^0(X; L^n) \to L^n_x \oplus L^n_y$$

jest epi, (b) $\Rightarrow$ a))

c) ϕ_{L^n} ma niezdegenerowaną rórżniczkę w każdym punkcie x:

$$H^0(X; L^n \otimes m_x) \to L^n_x \otimes T^*_x X = H^0(X; L^n \otimes \Omega^1_X \otimes \mathcal{O}_X/m_x)$$

jest epi.

Zamiast badać te przekształcenia na X rozdmuchujemy punkty i dowodzimy równoważnych stwierdzeń:

b') obcięcie

$$H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^n) \to H^0(E; \tilde{L}^n_{|E}) = H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}/I_E)$$

jest epi, gdzie $\tilde{X} = Bl_x Bl_y X$, $\tilde{L}$ jest wiązką przeciągniętą na $\tilde{X}$, E jest sumą dywizorów wyjątkowych, I_E snopem ideałów E.

c') obcięcie

$$H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^n \otimes I_E) \to H^0(E; \tilde{L}^n_{|E} \otimes I_E) = H^0(\tilde{X}; \tilde{L}^n \otimes \otimes I_E \mathcal{O}_{\tilde{X}}/I_E)$$

jest epi, gdzie $\tilde{X} = Bl_x X$, $\tilde{L}$ jest wiązką przeciągniętą na $\tilde{X}$, E jest dywizorów wyjątkowm, I_E snopem ideałów E.

Snop isałów I_E jest lokalnie wolny, jako wiązka liniowa jest równy $\mathcal{O}(-E)$. Zauważmy, że I_E obcięty do $E = \mathbb{R}(T_x X)$ jest izomorficzny z $\mathcal{O}(1)$, stąd

$$H^0(E; \tilde{L}^n_{|E} \otimes I_E) = L^n_x \otimes T^*_x X\,.$$

Za pomocą twierdzń o znikaniu dowodzimy b') (znikanie $H^1(\tilde{X}; \tilde{L}^n \otimes I_E)$) i c') (znikanie $H^1(\tilde{X}; \tilde{L}^n \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}/I^2_E)$). Korzystamy z:

A) Jeśli L jest dodatnia, to $\tilde{L}^n \otimes I_E = \tilde{L}^n \otimes \mathcal{O}(-E)$ jest dodatnia dla dostatecznie dużych L.

B) Twierdzenie Kodairy-Nakano o znikaniu.

Np b') dowodzimy rozkładając:

$$\tilde{L}^n \otimes I_E = (\tilde{L}^n \otimes \mathcal{O}(-E) \otimes \tilde{K}^{-1}_X \otimes \mathcal{O}(-(\dim X - 1)E)) \otimes K_{\tilde{X}}$$

$$= (\tilde{L}^{n_1} \otimes \tilde{K}^{-1}_X) \otimes (\tilde{L}^{n_2} \otimes \mathcal{O}(-(\dim X)E) \otimes K_{\tilde{X}}$$

bo

$$K_{\tilde{X}} = \tilde{K}_X \otimes \mathcal{O}((\dim X - 1)E).$$

Zatem $\tilde{L}^n \otimes I_E$ jest iloczynem wiązki nieujemnej i dodatinej $\otimes K_{\tilde{X}}$ dla dużych n_1 i n_2, więc można stosować twierdzenie Kodairy-Nakano.

13.2 Przy powyższych założeniach X jest rzutową rozmaitością algebraiczną.

13.3 Jeśli (X, ω) jest rozmaitością Kählerowską, oraz $[\omega]$ jest postaci $\lambda[\omega']$ dla $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $[\omega'] \in H^*(X;\mathbb{Q})$, to X jest rozmaitością rzutową.

Dow. Wystarczy pokazać, że $[\omega'] = c_1(L)$ dla pewnej holomorficznej wiązki zespolonej. To wynika z ciągu dokładnego

$$Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X;\mathbb{Z}) \to H^2(X;\mathcal{O}_X) = H^{2,0}(X)\,.$$

Wystarczy zauważyć, że ω jest typu (1,1), więc złożenie

$$H^2(X;\mathbb{Z}) \to H^2(X;\mathbb{C}) \twoheadrightarrow H^{2,0}(X)$$

jest zerowe.

13.4 Interpretacja reziduum jako różniczki w ciągu dokładnym.

Niech $D \subset X$ będzie hiperpowierzchnią, $i : D \to X$ oraz $j : X \setminus D \to X$ włożenia. Lokalnie D jest zadanie przez $z_1 = 0$ Definiujemy lokalnie $\mathcal{A}_X^*(\log D)$ jako algebrę generowaną nad $\mathcal{A}_X^*$ przez $\frac{dz_1}{z_1}$. Mamy ciąg dokładny snopów nad X

$$0 \to \mathcal{A}_X^* \to \mathcal{A}_X^*(\log D) \overset{res}{\to} i_*\mathcal{A}_D^{*-1} \to 0$$

Ten ciąg indukuje długi ciąg dokładny kohomologii. Ponadto

$$H^*(X;\mathcal{A}_X^*(\log D)) = H^*(X; j_*\mathcal{A}_{X\setminus D}^*) = H^*(X \setminus D; \mathcal{A}_{X\setminus D}) = H^*(X\setminus D;\mathbb{C})\,.$$

Reziduum indukuje odwzorowanie

$$H^k(X \setminus D;\mathbb{C}) \to H^{k-1}(D) \simeq H^{k+1}(X, X\setminus D;\mathbb{C})\,,$$

które z dokładnością do skalara $2\pi i$ jest odwzorowaniem różniczki w długim ciągu dokładnym pary $(X, X \setminus D)$. [Shabat, Ch. IV §18]

Złożenie

$$H^k(X \setminus D;\mathbb{C}) \to H^{k-1}(D;\mathbb{C}) \to H^{k+1}(X;\mathbb{C})$$

jest zerem, co w przypadku gdy $k = 1$, $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ daje klasyczne twierdzenie o reziduuach.

14 Twierdzenie Hirzebrucha-Riemanna-Rocha

[Dokładnie wg Huybrechts §5.1]

14.1 Tw HRR: Jeśli X jest zwartą zespoloną rozmaitością, a E wiązką holomorficzną, to

$$\chi(X;E) = \int_X td(X)ch(E)\,,$$

gdzie $td(X) = td(TX)$ jest multiplikatywną klasą charakterystyczną stoważyszoną z szeregiem formalnym

$\frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n} =$

$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30240} - \frac{x^8}{1209600} + \frac{x^{10}}{47900160} - \frac{691x^{12}}{1307674368000} + \frac{x^{14}}{74724249600} - \frac{3617x^{16}}{10670622842880000} + O\left(x^{18}\right)$

14.2 Klasyczne przypadki szczególne:

- L – wiązka liniowa, $X = C$ – krzywa [Riemann 1857]

$$h^0(C;L) \geq deg(L) + 1 - g(C)\,.$$

[Roch 1865]

$$h^0(C;L) - h^0(X, K_C \otimes L^*) = deg(L) + 1 - g(C)\,.$$

- L – wiązka liniowa, $X = S$ – powierzchnia

$$\chi(S;L) = \chi(S;\mathcal{O}_S) + \frac{L.(L-K_S)}{2}$$

$$\chi(S;\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}\int_S c_1^2(S) + c_2(S)$$

(formuła Noether)

14.3 Asymptotyczny Riemann-Roch: $h_L(n) = \chi(X;L^n)$ jest funkcją wielomianową stopnia $\dim X$

$$h_L(n) = \frac{\langle c_1^n(L),[X]\rangle}{(\dim X)!} n^{\dim X} + \dots.$$

14.4 Gdy $X = \mathbb{C}^d/\Lambda$ jest rozmaitością abelową, to $h_L(n) = \frac{\langle c_1^n(L),[X]\rangle}{(\dim X)!} n^{\dim X}$.

14.5 Twierdzienie HRR jest szczególnym przypadkiem twierdzenia o indeksie: jeśli X jest C^∞-rozmaitością, E, F rzeczywiste wiązki wektorowe, $D : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ eliptyczny operator różniczkowy, to indeks analityczny operatora D $ind(D) := \dim(ker(D)) - \dim(coker(D))$ jest równy

$$ind(D) = \int_X td(TX \otimes C)ch(\sigma(D)).$$

Symbol główny operatora D jest morfizmem wiązek

$$\sigma : \pi^*E \to \sigma\pi^*(F),$$

gdzie $\pi : T^*X \to X$ jest rzutowaniem. Np dla $D = \bar\partial$ na $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}, \qquad \sigma(D) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ -\xi_x & \xi_x \end{pmatrix}.$$

Warunek eliptyczności oznacza, że $\sigma(D)$ jest izomorfizmem poza $X \subset T^*X$. Wtedy $ch(\sigma(D)) \in H^*(T^*X, T^*X \setminus X) \simeq H^*(X)$.

Żeby dostać HRR przyjmujemy $D = \bar\partial + \bar\partial^* : \mathcal{A}^{0,even}(E) \to A^{0,odd}(E)$, Wtedy $ker(D) = \mathcal{H}_E^{even}$, $coker(D) \simeq \mathcal{H}_E^{odd}$.

14.6 Twierdzenie HRR można udowodnić sprowadzając wszystko do sprawdzenia równości dla $X = \mathbb{P}^d$, $L = \mathcal{O}(n)$. Dla $n \geq 0$ mamy $H^0(\mathbb{P}^d;\mathcal{O}(n)) = \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_d]_n \simeq Sym^n(\mathbb{C}^{d+1})$ i pozostałe kohomologie znikają. Z ciągu Eulera

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1)^{d+1} \to T\mathbb{P}^d \to 0$$

obliczamy

$$td(\mathbb{P}^d) = \left(\frac{h}{1-e^{-h}}\right)^{d+1}$$

$$\int_X td(X)ch(L) = \left(\frac{h^{d+1}}{(1-e^{-h})^{d+1}}e^{nh}\right)_{[d]} = Res_{h=0}\frac{1}{(1-e^{-h})^{d+1}(e^{-h})^n} \overset{u=1-e^{-h}}{=}$$

$$= Res_{u=0}\frac{1}{u^{d+1}}\frac{1}{(1-u)^{d+1}} = \left(\frac{1}{(1-u)^{n+1}}\right)_{[d]} = \left(\left(\Sigma_{k\geq 0}u^k\right)^{n+1}\right)_{[d]} = \binom{n+k}{k} = \dim Sym^n(\mathbb{C}^{d+1}).$$

14.7 Przjmując za $E = \Omega_X^p$ i biorać formalną kombinację $\sum_{p=0}^{\dim X}\Omega_X^p y^p$ definiujemy χ_y-genus Hirzebrucha

$$\chi_y(X) = \sum_p \chi(X;\Omega_X^p)y^p.$$

Dla X Kählera

$$\chi_y(X) = \sum_{p,q} (-1)^q h^{p,q} y^p.$$

Dla specjalnych wartości $y = -1,\ 0,\ 1$ dostajemy topologiczną charakterystrykę Eulera, genus Todda $\chi(X, \mathcal{O}) = \pm(p_a - 1)$ i sygnaturę rozmaitości.

$$\chi_y(X) = \int_X td_y(TX)\,,$$

gdzie td_y jest multiplikatywną klasą charakterystyczną stoważyszoną z szeregiem formalnym

$$td_y(x) = \frac{x(1 + y\,e^{-x})}{1 - e^{-x}} \in \mathbb{Q}[[x]][y]\,.$$

14.8 Rozważa się także $\chi(X; P(TX))$ dla $P = \Lambda^k$, Sym^k itp oraz ich kombinacje. Szczególną rolę odgrywa genus eliptyczny

$$Ell(X) = \chi(X; \mathcal{E}\ell\ell(TX))\,,$$

gdzie $E\ell\ell(TX)$ jest tzw wiązką eliptyczną

$$\mathcal{E}\ell\ell(E) = y^{\frac{-\dim E}{2}}\, \lambda_{-y} E^* \bigotimes_{n \geq 1} \Big(\lambda_{-yq^n} E^* \otimes \lambda_{-y^{-1}q^n} E \otimes s_{q^n} E^* \otimes s_{q^n} E \Big)\,,$$

gdzie q i y są zmiennymi formalnymi oraz

$$\lambda_t E = \sum_{k=0}^{\dim E} \Lambda^k(E)\, t^k\,, \qquad s_t(E) = \sum_{k=0}^{\infty} Sym^k(E)\, t^k\,.$$

Klasa $td(X)ch(E\ell\ell(TX))$ jest multiplikatywną klasą charakterystyczną stowarzyszoną z szeregiem formalnym

$$y^{-1/2} \frac{x(1 - ye^{-x})}{1 - e^{-x}} \prod_{n \geq 1} \frac{(1 - yq^n e^{-x})(1 - y^{-1} q^n e^x)}{(1 - q^n e^{-x})(1 - q^n e^x)}\,.$$

Przyjmując $y = e^z$ mamy

$$y^{-1/2} \frac{1 - ye^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{y^{-1/2} e^{x/2} - y^{1/2} e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{e^{(x-z)/2} - e^{(z-x)/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}$$

i szereg przyjmuje postać

$$\frac{x\,\theta_\tau(x - z)}{\theta_\tau(x)}\,,$$

gdzie $q = e^{2\pi i \tau}$ oraz $\theta_\tau(x)$ jest theta-funkcją Jakobiego (z dokładnością do skalara)

$$\theta_\tau(x) = (e^{x/2} - e^{-x/2}) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n e^x)(1 - q^n e^{-x}).$$

Zmienne τ i z traktujemy jako zmienne formalne lub jako parametry funkcji holomorficznej. Można też z traktować jako parametr na krzywej eliptycznej $\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$. Więcej o genusie eliptycznym w [Borisov-Libgober w *Elliptic Genera and Applications to Mirror Symmetry*, https://arxiv.org/abs/math/9904126]