

Miary tendencji centralnej i rozproszenia.

1. Obliczyć średnią arytmetyczną, średnią geometryczną, medianę i odchylenie standardowe ciągu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
2. Dany jest szereg statystyczny

312	323	358	331	342	345	312	342
350	342	348	348	351	320	341	351.

Wyznaczyć średnią arytmetyczną, średnią geometryczną, średnią harmoniczną, medianę, odchylenie standardowe.

Odp. Średnia arytmetyczna = 337,688, średnia geometryczna = 337,368, średnia harmoniczna = 337,040, mediana = 342, odchylenie standardowe = 15,001.

3. Autobus jedzie z miasta A do miasta B z prędkością 48 km/h, a wraca z prędkością 36 km/h. Jaka jest jego średnia prędkość na trasie A -> B -> A ?
4. Wskutek korków na trasie, autobus z poprzedniego zadania jechał z A do B z mniejszą prędkością, a mianowicie 45 km/h. Z jaką średnią prędkością powinien wracać, by średnia prędkość na trasie A -> B -> A wyniosła 40 km/h?
5. Temperatura powietrza w poszczególnych godzinach wynosiła 12, 14, 15, 16, 20, 23, 26 i 32 stopnie. Jaki był średni wzrost temperatury na godzinę?
6. W czasie powodzi poziom wody w poszczególnych godzinach wzrastał o 5, 13, 14, 16, 13, 9, 10 i 5 procent na godzinę. O ile procent wzrastał średnio poziom wody na godzinę?
7. Średni wzrost Niemca 180 cm, średni wzrost Polaka 179 cm, średni wzrost Czecha 175 cm (dane fikcyjne). Jaki jest średni wzrost mężczyzny z tych krajów? Zakładamy, że dorosłych mężczyzn w Niemczech jest 30 mln, w Czechach 7,5 mln, w Polsce 15 mln.
Odp. 179 cm.
8. Inflacja wyniosła w pierwszym roku 10 procent, w drugim 50 procent. Jaka jest średnia?
Odp. 28,4 %.
9. Poniżej podane są dane statystyczne województwa mazowieckiego. Oblicz średnią gęstość zaludnienia w województwie. Wyznacz odchylenie standardowe powierzchni i liczby ludności poszczególnych powiatów od średniej.

Powiat	Powierzchnia (km ²)	Ludność w tys.	Gęstość
Białobrzegi	639,28	34346	53,73
Ciechanowski	1062,62	93846	88,32
Garwoliński	1283,78	108108	84,21
Gostyniński	615,56	49411	80,27
Grodziski	366,87	65269	177,91
Grójecki	1382,97	108990	78,81
Kozienicki	790,1	66692	84,41
Legionowski	392,78	85618	217,98
Lipski	747,58	41572	55,61
Łosicki	771,77	35606	46,14
Makowski	1064,56	50388	47,33
Miński	1186,97	148514	125,12
Mławski	1171,15	70481	60,18
Nowodworski	687,85	74201	107,87
Ostrołęka	29,00	54560	1881,38
Ostrołęcki	2099,32	83539	39,79
Ostrowski	1224,68	79053	64,55
Otwocki	615,09	111427	181,16
Piaseczyński	506,89	101956	201,14
Płoński	1383,67	91380	66,04
Płock	66,64	127670	1915,82
Płocki	1820,33	109398	60,10
Pruszkowski	246,31	132629	538,46
Przasnyski	1217,82	55629	45,68
Przysuski	800,68	47751	59,64
Pułtuski	829,51	51621	62,23
Radom	111,71	232823	2084,17
Radomski	1529,75	141045	92,20
Siedlce	31,87	74996	2353,18
Siedlecki	1603,22	81910	51,09
Sierpecki	852,89	56596	66,36
Sochaczewski	731,02	84858	116,08
Sokołowski	1131,42	61691	54,53
Szydłowiecki	487,78	45649	93,59
Warszawa	494,28	1628505	3294,70
Warszawski Zachodni	532,99	84572	158,67
Węgrowski	1219,18	71983	59,04
Wołomiński	955,37	174395	182,54
Wyszowski	876,49	71016	81,02
Zwoleński	571,24	38855	68,02
Żuromiński	805,01	42349	52,61
Żyrardowski	532,63	76488	143,60
Łącznie województwo:	35470,63	5047386	142,30

Rozkład normalny i rozkład t

1. Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze średnią 674 i odchyleniem standardowym 55 wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przyjmie ona wartość mniejszą niż 600.

2. Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze średnią 410 i odchyleniem standardowym 2 wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przyjmie ona wartość mniejszą między 407 a 415.
3. Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze średnią 500 i odchyleniem standardowym 20 wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przyjmie ona wartość większą niż 555.
4. Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym ze średnią -44 i odchyleniem standardowym 16 wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przyjmie ona wartość dodatnią.
5. Zakładamy, że X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią 120 i odchyleniu standardowym 44. Wyznaczyć takie x , że prawdopodobieństwo, $X < x$ jest mniejsze niż 0,56.
6. Zakładamy, że X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią 16,5 i odchyleniu standardowym 0,8. Wyznaczyć taki punkt, że 85% wartości zmiennej jest powyżej tego punktu.
7. Zakładamy, że X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią 97 i odchyleniu standardowym 10. Wyznaczyć x takie, aby prawdopodobieństwo, że zmienna X przyjmie wartość w przedziale $(102, x)$ wynosiło 0,05.
8. Właściciel kantoru boi się napadu i nie chce trzymać przez noc w kantorze za dużo waluty. Nie może jej oczywiście mieć za mało, bo rano nie ma czasu odebrać pieniędzy z banku. Odkrył, że przez pierwszą godzinę nikt nie chce u niego sprzedać dolarów a pojawiają się tylko kupujący, oraz że przeciętnie przez pierwszą godzinę sprzedaje 250 dolarów z odchyleniem standardowym 50. Ile powinien mieć pieniędzy, żeby z prawdopodobieństwem 90% móc obsłużyć każdego klienta, chcącego kupić dolary?
9. Czas oczekiwania na połączenie telefoniczne z pewnym biurem jest zmienną losową o rozkładzie normalnym o średniej równej 45 sekund z odchyleniem standardowym 10 sekund. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że połączyć się z tym biurem w ciągu 40 sekund. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że będę musiał czekać ponad 70 sekund.
10. Firma produkująca opony samochodowe zakłada, że opona wytrzyma średnio 50000 km z odchyleniem 5000 km. Firma chce dać gwarancję i wymieniać bezpłatnie przedwcześnie zużyte opony, tak jednak, by nie wymieniać więcej niż 10 procent opon. Na ile kilometrów powinna opiewać gwarancja? Zakładamy, że rozkład prawdopodobieństwa jest normalny.
11. Wieloletnie badania wykazały, że poziom wody w rzeczce w kwietniu jest zmienną losową o średniej 1 m i odchyleniu standardowym 0,4. Jak wysoki powinien być wał przeciwpowodziowy, żeby dawał gwarancję 99 procent?
12. Odkryłem, że mój samochód na pewnej długiej trasie zużywa średnio 50 litrów z odchyleniem standardowym 2. Mam mało pieniędzy i chcę zatankować tylko tyle, żeby mieć 99 procent pewności, że dojadę. Ile paliwa mam zatankować?

13. W folderze reklamowym kurortu Kociomruczki znalazło się zdanie: Średnia temperatura lata waha się między 16 a 20 stopni. Pomiar temperatury w ciągu 56 dni lata dał wyniki:

10,3	16,2	22,0	17,9	17,9	14,5	13,4
17,8	24,8	20,9	15,8	23,6	24,4	13,7
15,8	12,1	18,7	22,6	13,1	15,3	12,6
18,3	16,1	20,5	17,5	18,0	15,0	15,6
18,0	14,5	22,1	11,8	13,0	11,8	21,8
20,8	16,5	21,7	19,8	16,0	24,0	10,7
12,9	17,3	23,6	13,3	11,8	22,1	11,3
20,3	21,1	17,8	14,1	16,9	10,2	18,0

Wyznaczyć p-stwo, że średnia temperatura jest między 16 a 20 stopni.

14. Drobne kulki pakowane są przez maszynę do pudełek. Średnio do pudełka wchodzi 124 kulki, z odchyleniem standardowym 12. Wyznaczyć taką liczbę kulek N , że 10 % pudełek będzie zawierać więcej niż N kulek.
15. W sklepie spożywczym „Dziedzownica” sprzedawało się w kolejnych dniach 48, 59, 45, 62, 50, 68, 57, 80, 65, 58, 79, 69 litrów mleka. Zakładamy, że dane te pochodzą od rozkładu normalnego. Ile litrów mleka należy zamówić, żeby z prawdopodobieństwem 95 % starczyło go dla wszystkich klientów?
16. Właściciel stacji benzynowej chce poznać, ile litrów paliwa tankuje przeciętny kierowca. Losowa próbka 50 tankowań dała średnią wielkość 28,5 litra z odchyleniem standardowym 5,6 litra. Właściciel chce dawać misia pluszowego kierowcom, którzy tankują jednorazowo ponad 45 litrów. Zakładając, że dziennie stację odwiedza 1000 klientów, ile pluszowych misiów powinien przygotować na pierwszy dzień akcji?
17. W sytuacji z poprzedniego zadania, właściciel przygotował 2 razy mniej misiów. Jak powinien ustawić limit, od którego kierowcom należy się prezent?
18. Średnia długość zaskrońca w Puszczy Kampinoskiej wynosi 270 mm z odchyleniem standardowym 27,0 mm. Zbadano długość 25 zaskrońców z Puszczy Knyszyńskiej. Miały one średnią długość 310 mm. Czy na poziomie istotności 10 % możemy twierdzić, że zaskrońce z Puszczy Knyszyńskiej są dłuższe od zaskrońców z Puszczy Kampinoskiej?
19. Z wieloletnich badań wynika, że średnia temperatura w lipcu na Hali Gąsienicowej o godz. 12 GMT wynosi 13,7 stopnia z odchyleniem standardowym 2,2 stopnia. Pewnego roku średnia wyniosła 10 stopni. Czy można uważać, klimat na Hali Gąsienicowej się zmienił?
20. Przez 16 kolejnych lat zanotowano następujące średnie temperatury: 15, 11, 10, 13, 17, 12, 11, 10, 16, 12, 10, 15, 18, 16, 16. Czy z danych tych można wyciągnąć wniosek o zmianie klimatu na Hali Gąsienicowej?

21. Załóżmy, że przez n kolejnych lat średnia temperatura lipca na Hali Gąsienicowej wynosi dokładnie k stopni. Dla $k = 14, 15, 16$ i 20 wyznaczyć n tak, żeby na poziomie istotności 5% można było przyjąć hipotezę o zmianie średniej temperatury na Hali Gąsienicowej.
22. Zawartość mithrilu w rudzie z kopalni Moria w Górach Mglistych wynosi $7,3$ procenta. Dostarczono 49 próbek pewnej rudy. Przeciętna zawartość mithrilu jest w nich $7,2$ procenta z odchyleniem standardowym $0,7$. Czy na poziomie istotności $0,1$ (czyli 10%) należy przyjąć, czy odrzucić hipotezę, że próbki te pochodzą naprawdę z Morii?
23. Badania wykazały, że średnie zużycie paliwa w pewnym modelu samochodu wynosi 7 litrów na 100 km. Wprowadzono nowy model. 50 jazd próbnych dało średnią $6,9$ z odchyleniem standardowym $0,04$. Czy na poziomie istotności $0,05$ firma może twierdzić, że nowy model zużywa mniej paliwa?
24. Na podstawie wieloletnich badań ustalono, że średnia temperatura w miejscowości X w lipcu wynosi 27 stopni, że podlega prawom rozkładu normalnego z odchyleniem standardowym $\sigma = 4$ stopnie. Zaobserwowano, że przez dziewięć kolejnych lat średnia temperatura lipca była (każdego roku) równa 26 stopni. Czy na poziomie istotności $0,05$ należy przyjąć, czy odrzucić hipotezę o zmianie średniej temperatury w lipcu w tej miejscowości?
25. Pewien zwariowany przyrodnik liczył mrówki w mrowiskach w Puszczy Kampinoskiej i wyznaczył, że średnia liczba mrówek w jednym mrowisku wynosi 134786 , z odchyleniem standardowym 13000 . Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że w losowo wybranym mrowisku jest więcej niż 150000 mrówek. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że w losowo wybranym mrowisku jest mniej niż 8000 mrówek. Jeżeli w następnym roku o tej samej porze w 10 wybranych mrowiskach liczba mrówek będzie wynosić $130000, 129000, 125000, 134000, 128000, 131000, 133000, 130000, 127000$ i 124000 , na jakim poziomie istotności będzie zasadne twierdzenie, że średnia liczba mrówek się zmniejszyła?
26. Załóżmy, że w oparciu o próbkę wielkości $n \geq 30$ wyznaczyliśmy przedział ufności z poziomem istotności α . Jakie powinno być n , by przedział ufności był dwa razy mniejszy? Odpowiedź: $4n$.
27. Załóżmy, że w oparciu o próbkę wielkości $n \geq 60$ wyznaczyliśmy przedział ufności z poziomem istotności α . Jaki jest przedział ufności dla $n/2$?
28. Przez 15 kolejnych lat mierzono grubość pokrywy śnieżnej w dniu 1 stycznia na Kasprowym Wierchu. Pomiary dały w centymetrach: $200, 189, 190, 207, 207, 210, 220, 210, 211, 199, 189, 231$. Wyznaczyć 95% przedział ufności dla średniej.
29. Makler giełdowy analizuje zyski. Losowa próbka 15 spółek dała przeciętną roczną stopę zwrotu $= 10,37\%$ z odchyleniem standardowym $s = 3,5\%$. Zakładając, wielkość zysku podlega rozkładowi normalnemu, podać 95% przedział ufności dla średniej.

30. Chcemy oszacować średni poziom przygotowania kilkuset studentów do egzaminu. Losowo wybranych 20 studentów otrzymało 2 dwójki, 8 trójek, 7 czwórek i 3 piątki. Wyznaczyć średnią i podać jej przedział ufności na poziomie istotności 0,05. Zakładamy, że zmienna losowa opisująca poziom przygotowania ma rozkład normalny.
31. Przypuśćmy, że dla zmiennej o rozkładzie normalnym wyznaczono przedział ufności dla średniej na podstawie próbki wielkości n . Jaka winna być wielkość próbki, żeby otrzymać dwa razy węższy przedział, na tym samym poziomie istotności?
32. Długość 95% przedziału ufności dla pewnej zmiennej o rozkładzie normalnym jest równa 10. Jaka jest długość przedziału ufności dla tej zmiennej na poziomie istotności 0,1?

Przedział ufności dla proporcji.

1. Wybrano losowo 100-osobową próbkę studentów. 34 z nich oświadczyło, że woli piwo Cesarskie od piwa Proletariat, pozostali odwrotnie. Wyznaczyć 95% przedział ufności dla średniej proporcji studentów wolących piwo Cesarskie.
2. Student może wybrać, czy egzamin będzie zdawać u profesora X czy Y. Spośród wszystkich studentów, 75 procent oświadczyło, że woli zadawać u profesora X. Czy na poziomie ufności 95 % należy się spodziewać, że zdających u X będzie więcej niż 85 procent?
3. Sondaż przedwyborcze pokazały, że $3/4$ wyborców będzie głosować na Partię Szybkiego Postępu. Załóżmy, że dane z gazety są oparte na reprezentatywnej próbce 460-osobowej. Wyznaczyć 95 % przedział ufności proporcji osób głosujących na tę partię. Jakie jest prawdopodobieństwo, że partia dostanie mniej niż połowę głosów? Jakie jest prawdopodobieństwo, że dostanie co najmniej 80 procent głosów?
4. PKP chce zbadać, jaki procent podróżnych jeździ pierwszą klasą. W losowej próbce 347 pasażerów 201 miało bilet drugiej klasy. Wyznaczyć 95% przedział ufności dla proporcji podróżnych jeżdżących pierwszą klasą.

Poprawka na małą populację

1. Zapytano 160 osób pewnej firmy, czy są zadowolone z nowego kierownictwa. 85 procent odpowiedziało, że tak. Wyznaczyć 95% przedział ufności proporcji osób zadowolonych, wiedząc, że w firmie tej pracuje 1245 osób.
2. Do supermarketu dostarczono 1520 kartonów z jajkami. W próbce 100 losowo wybranych znaleziono 12 kartonów ze stłuczonymi jajkami. Wyznaczyć 90% przedział ufności dla proporcji kartonów zawierających stłuczone jajka.
3. W Sejmie zasiada 460 posłów. Wybrano losowo 123 z nich i zbadano, czy wiedzą, co to jest twierdzenie Pitagorasa. Wiedziało 23. Wyznaczyć przedział ufności dla tej proporcji na poziomie istotności 0,01.