

832. Найти все матрицы второго порядка, квадрат которых равен нулевой матрице.

833*. Пусть A — матрица второго порядка и k — целое число, большее двух. Доказать, что $A^k = 0$ тогда и только тогда, когда $A^2 = 0$.

834. Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

835. Исследовать уравнение $AX = 0$, где A — данная и X — искомая матрицы второго порядка.

Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$836. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$837. \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$838. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$839. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$840. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$841. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$842. \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$843. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$844. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$845. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$846. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$847. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$848. \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$849. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$$

(порядок матрицы $n + 1$).

$$850. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$851. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

$$852. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$853. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$854. \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a \end{pmatrix} \quad (\text{порядок матрицы равен } n).$$

$$855. \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

856. Показать, что вычисление матрицы, обратной к данной матрице порядка n , можно свести к решению n систем линейных уравнений, каждая из которых содержит n уравнений с n неизвестными и имеет матрицей коэффициентов при неизвестных матрицу A .

Пользуясь методом задачи 856, найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$857. \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$858^*. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

$$859. \begin{pmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \dots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a+(n-1)h & a \end{pmatrix}.$$

$$860^*. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

Решить матричные уравнения:

$$861. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}. \quad 862. X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$863. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$864. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$865. X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$866. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$867. \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}. \quad 868. X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$860. \quad \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-3} & \dots & \varepsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \varepsilon^{-6} & \dots & \varepsilon^{-2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-3} & \varepsilon^{-6} & \varepsilon^{-9} & \dots & \varepsilon^{-3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{-(n-1)} & \varepsilon^{-2(n-1)} & \varepsilon^{-3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Указание. Написать уравнения с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ для определения элементов k -го столбца обратной матрицы. Каждое уравнение помножить на такую степень ε , чтобы коэффициент при определенном неизвестном x_j обратился в единицу. Полученные уравнения сложить.

$$861. \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 862. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}. \quad 863. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$864. \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \quad 865. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \quad 866. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

867. Общий вид решения:

$$\begin{pmatrix} \frac{2+3c_1}{2} & \frac{3+3c_2}{2} \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \text{ где } c_1 \text{ и } c_2 \text{ — любые числа.}$$

868. Общий вид решения:

$$\begin{pmatrix} c_1 & \frac{2-3c_1}{4} \\ c_2 & \frac{9-3c_2}{4} \end{pmatrix}, \text{ где } c_1 \text{ и } c_2 \text{ — произвольные числа.}$$

869. Решения не существует.

870. Общий вид решения:

$$\begin{pmatrix} 7-3c_1 & 5-3c_2 & 7-3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 5c_1-9 & 5c_2-3 & 5c_3-7 \end{pmatrix}, \text{ где } c_1, c_2, c_3 \text{ — произвольные числа.}$$

$$871. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

872. В матрице A^{-1} соответственно: а) поменяются местами i -й и j -й столбцы; б) i -й столбец умножится на $\frac{1}{c}$; в) из j -го столбца вычтется i -й, умноженный на c .

При преобразовании столбцов матрицы A аналогично указанному меняются строки матрицы A^{-1} .

$$879. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} E_k & -U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}.$$