

Zadania z GALu VII

Wersja 18 grudzień 2011

Zadania z ♠ jeszcze nie są zrobione. Z poprzedniej serii zostało ważne Zad. 39.24. Ponadto z pierwszej serii Zad. 13.

1) ♠ Niech q będzie kwaternionem o module jeden. Opisać geometrycznie przekształcenie: $\phi_q : \text{im } \mathbf{H} \rightarrow \text{im } \mathbf{H}$ zadane wzorem $\phi_q(x) = qxq^{-1}$. W szczególności wykazać, że dla q czysto urojonego (tzn $q \in \text{im } \mathbf{H}$) przekształcenie ϕ_q jest symetrią.

2) Niech $f(x, y, z) = 2x + y - 3z$ będzie funkcjonałem na $\mathbf{R}^3$. Znaleźć współrzędne f

- a) w bazie sprzężonej do standardowej,
- b) w bazie sprzężonej do $(3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 7)$,
- c) w bazie sprzężonej do $(2, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 2)$.

3) Niech $f, g : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ będą funkcjonałami zadanymi wzorami $f(x, y) = x + iy$, $g(x, y) = x - iy$. Wykazać, że $\{f, g\}$ stanowią bazę $(\mathbf{C}^2)^*$. Znaleźć taką bazę $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}^2$, że $\{f, g\}$ jest bazą sprzężoną do $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

4) Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3} \subset \mathbf{F}^3$ by standardowy wektor sprzężony ϵ_1^* był równy $\alpha_2^* - 5\alpha_3^*$.

5) Niech $V \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozpiętą przez wektory $(1, 2, 0, -3)$, $(-2, 3, 2, -3)$ i $(-3, 1, 2, 0)$. Przez $\text{Anh}(V) = \{f \in (\mathbf{R}^4)^* : \forall v \in V f(v) = 0\}$ oznaczamy przestrzeń funkcjonałów znikających na V (tzw. *anihilator*). Opisać $\text{Anh}(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

6) Niech $V \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią opisaną przez równanie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Opisać $\text{Anh}(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

7) Niech $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcjonałem liniowym $f = 5\epsilon_1^* - 3\epsilon_2^* + \epsilon_3^*$ w bazie sprzężonej do bazy standardowej.

- a) Napisać wzór na f .
- b) Znaleźć współrzędne tego funkcjonału w bazie sprzężonej do $\alpha_1 = (2, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)$.

8) Niech $n \in \mathbf{N}$. Badamy funkcjonały liniowe z przestrzeni macierzy $\phi : M_{n \times n}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$. Opisać wszystkie funkcjonały spełniające tożsamość $\phi(AB) = \phi(BA)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$.

9) ♠(DOM) Podać przykład bazy $\mathbf{R}^3$ taki, że $\epsilon_1^* = 2\alpha_1^* + \alpha_3^*$ oraz $\epsilon_2^* = \alpha_1^* + \alpha_2^*$.

10) ♠(DOM) Niech $\Phi : \mathbf{C}^3 \rightarrow \mathbf{C}^4$ będzie dane wzorem

$$\Phi(x, y, z) = (x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + y - 2z).$$

Znaleźć obraz i jądro przekształcenia sprzężonego $\Phi^* : (\mathbf{C}^4)^* \rightarrow (\mathbf{C}^3)^*$ (przypomnienie: $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$ dla $f \in (\mathbf{C}^4)^*$).

11) ♠ To samo dla $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x + 2y, 3x + 6y, 2x + 4y)$.

12) Wykazać, że funkcjonały mają takie same jądra wtedy i tylko wtedy gdy są proporcjonalne.

13) Niech $\dim V = n$ oraz niech $f_1, f_2, \dots, f_n \in V^*$. Wykazać że $f_1, f_2, \dots, f_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) = \{0\}$.

14) ♠ Niech $L \subset V$, $\Phi : V \rightarrow W$. Wykazać, że

$$L \subset \ker \Phi \iff \text{im } \Phi^* \subset \text{Anh}(L).$$

15) ♠ Niech V będzie przestrzenią wielomianów. Wykazać, że V nie jest izomorficznie z V^* . I ogólniej: niech $\dim(V) = \infty$. Wtedy $V \not\cong V^*$