

OPERATORY LINIOWE

$f: V \rightarrow V$, czyli dziedziną = przeciwdziedzina

Będziemy robić zadania 39.x, gdzie
 $x = 8, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 23, 24$.

§ 39. DEFINICJA OPERATORA LINIOWEGO. OBRAZ, JĄDRO, MACIERZ OPERATORA LINIOWEGO

39.1. Które z następujących odwzorowań są operatorami liniowymi podanych przestrzeni liniowych:

- (a) $x \mapsto a$, gdzie a jest ustalonym wektorem w przestrzeni V ;
- (b) $x \mapsto x + a$, gdzie a jest ustalonym wektorem w przestrzeni V ;
- (c) $x \mapsto \alpha x$, gdzie α jest ustalonym skalarą;
- (d) $x \mapsto (x|a)b$, gdzie a, b są ustalonymi wektorami w przestrzeni euklidesowej V ;
- (e) $x \mapsto (a|x)x$, gdzie a jest ustalonym wektorem w przestrzeni euklidesowej V ;
- (f) $f(t) \mapsto f(at + b)$, $f \in \mathbb{R}[t]_n$ i a, b są ustalonymi liczbami;
- (g) $f(t) \mapsto f(t + 1) - f(t)$, $f \in \mathbb{R}[t]_n$;
- (h) $f(t) \mapsto f^{(k)}(t)$, $f \in \mathbb{R}[t]_n$;
- (i) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;
- (j) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$;
- (k) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$?

39.2. Wykazać, że każdy operator liniowy przeprowadza dowolny liniowo zależny układ wektorów na układ liniowo zależny.

39.3. Niech $(a_1, \dots, a_n)$ stanowią bazę w n -wymiarowej przestrzeni liniowej V . Wykazać, że dla dowolnego liniowo niezależnego układu wektorów $(b_1, \dots, b_n)$ istnieje dokładnie jeden operator liniowy przeprowadzający a_i na b_i , $i = 1, \dots, n$.

39.4. Udowodnić, że dowolny operator liniowy jednowymiarowej przestrzeni liniowej ma postać $x \mapsto \alpha x$, gdzie α jest skalarą.

39.5. Wyznaczyć obrazy i jądra operatorów liniowych z zadania 39.1.

39.6. Wykazać, że operator różniczkowania:

- (a) jest osobliwy w przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż n ;
- (b) jest nieosobliwy w przestrzeni funkcji o bazie $(\cos t, \sin t)$.

39.7. Wykazać, że każda podprzestrzeń dowolnej przestrzeni liniowej jest:

- (a) jądrem pewnego operatora liniowego;
- (b) obrazem pewnego operatora liniowego.

39.8. Udowodnić, że jeśli dwa operatory liniowe rzędu 1 mają jednakowe jądra i jednakowe obrazy, to są przemienne.

39.9. Niech V będzie przestrzenią nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $\mathcal{A}$ będzie operatorem liniowym podprzestrzeni właściwej L przestrzeni V . Udowodnić, że jeśli ciało $\mathbb{K}$ jest nieskończone, to istnieje nieskończenie wiele operatorów liniowych przestrzeni V , których ograniczenie do podprzestrzeni L jest równe $\mathcal{A}$.

39.10. Niech $\mathcal{A}$ będzie operatorem liniowym przestrzeni V i niech L będzie podprzestrzenią V . Udowodnić, że:

- (a) obraz $\mathcal{A}(L)$ i przeciwobraz $\mathcal{A}^{-1}(L)$ są podprzestrzeniami przestrzeni V ;
- (b) jeśli operator $\mathcal{A}$ jest nieosobliwy i V ma wymiar skończony, to

$$\dim \mathcal{A}(L) = \dim \mathcal{A}^{-1}(L) = \dim L.$$

39.11. Niech $\mathcal{A}$ będzie operatorem liniowym przestrzeni V i niech L będzie taką podprzestrzenią V , że $L \cap \text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$. Udowodnić, że operator $\mathcal{A}$ przeprowadza dowolny liniowo niezależny układ wektorów w L na układ liniowo niezależny.

39.12. Dla dowolnych operatorów $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ udowodnić nierówność Frobeniusa

$$\text{rk}(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \text{rk}(\mathcal{A}\mathcal{C}) \leq \text{rk } \mathcal{A} + \text{rk}(\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}).$$

39.13. Operator liniowy $\mathcal{A}$ nazywamy *pseudoodbiciem*, jeśli $\text{rk}(\mathcal{A} - \mathcal{E}) = 1$. Udowodnić, że każdy operator liniowy n -wymiarowej przestrzeni jest złożeniem nie więcej niż n pseudoodbici.

39.14. Niech $\mathcal{A}$ będzie operatorem liniowym n -wymiarowej przestrzeni V . Udowodnić, że zbiór takich operatorów liniowych $\mathcal{X}$, że $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{O}$ jest podprzestrzenią liniową i następnie znaleźć jej wymiar.

39.15. Wyznaczyć macierz operatora:

- (a) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ w bazie wektorów jednostkowych przestrzeni $\mathbb{R}^3$;
- (b) obrotu płaszczyzny o kąt α w dowolnej bazie ortogonalnej;
- (c) obrotu przestrzeni trójwymiarowej o kąt $2\pi/3$ wokół prostej, która w prostokątnym układzie współrzędnych dana jest równaniami $x_1 = x_2 = x_3$, w bazie złożonej z wektorów jednostkowych;

(d) rzutu przestrzeni trójwymiarowej na oś współrzędnych wyznaczoną przez wektor $\mathbf{e}_2$ równoległe do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_3$ w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$;

(e) danego w przestrzeni euklidesowej wzorem $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}$ w bazie ortonormalnej $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, gdzie $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$;

(f) $X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$ przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$ w bazie złożonej z jednostek macierzy; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(g) $X \mapsto X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$ w bazie złożonej z jednostek macierzy; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(h) $X \mapsto {}^tX$ przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$ w bazie złożonej z jednostek macierzy; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(i) $X \mapsto AXB$, gdzie A, B są ustalonymi macierzami przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$, w bazie złożonej z jednostek macierzy;

(j) $X \mapsto AX + XB$, gdzie A, B są ustalonymi macierzami przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$, w bazie złożonej z jednostek macierzy;

(k) różniczkowania przestrzeni $\mathbb{R}[t]_n$ w bazie $(1, t, \dots, t^n)$;

(l) różniczkowania przestrzeni $\mathbb{R}[t]_n$ w bazie $(t^n, t^{n-1}, \dots, 1)$;

(m) różniczkowania przestrzeni $\mathbb{R}[t]_n$ w bazie

$$1, t-1, \frac{(t-1)^2}{2}, \dots, \frac{(t-1)^n}{n!}.$$

39.16. Wykazać, że istnieje jednoznacznie wyznaczony operator przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przeprowadzający wektory $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 2)$ odpowiednio na wektory $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, następnie wyznaczyć macierz tego operatora w bazie składającej się z wektorów jednostkowych.

39.17. Załóżmy, że przestrzeń liniowa V jest sumą prostą podprzestrzeni L_1 i L_2 o bazach $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ i $(\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$. Udowodnić, że rzut na L_1 równoległy do L_2 jest operatorem liniowym i wyznaczyć jego macierz w bazie $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.

39.18. Wyznaczyć ogólną postać macierzy operatorów liniowych n -wymiarowej przestrzeni w bazie postaci $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$, $(k < n)$, które przeprowadzają liniowo niezależne wektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ na wektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$.

39.19. Niech operator liniowy przestrzeni V w bazie $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4)$ ma macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć macierz tego operatora w bazach:

(a) $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$;

(b) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$.

39.20. Niech

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

będzie macierzą operatora liniowego przestrzeni $\mathbb{R}[t]_2$ w bazie $(1, t, t^2)$. Wyznaczyć macierz tego operatora w bazie

$$(3t^2 + 2t + 1, t^2 + 3t + 2, 2t^2 + t + 3).$$

39.21. Niech

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

będzie macierzą operatora liniowego przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w bazie

$$((8, -6, 7), (-16, 7, -13), (9, -3, 7)).$$

Wyznaczyć macierz tego operatora w bazie

$$((1, -2, 1), (3, -1, 2), (2, 1, 2)).$$

39.22. Załóżmy, że operator liniowy $\mathcal{A}$ n -wymiarowej przestrzeni V przeprowadza liniowo niezależne wektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ odpowiednio na wektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Udowodnić, że w pewnej bazie $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ macierz tego operatora jest równa BA^{-1} , gdzie kolumny macierzy A i B składają się odpowiednio ze współrzędnych danych wektorów w bazie $\mathbf{e}$.

39.23. Znaleźć ogólną postać macierzy operatora liniowego $\mathcal{A}$ w bazie, której pierwsze k wektory tworzą:

(a) bazę jądra operatora $\mathcal{A}$; (b) bazę obrazu operatora $\mathcal{A}$.

39.24. Udowodnić, że jeśli $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ jest rozkładem wielomianu $f(t)$ na czynniki względnie pierwsze i operator liniowy $\mathcal{A}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f(t)$, tzn. $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, to w pewnej bazie macierz operatora $\mathcal{A}$ ma postać

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \text{ gdzie } f_1(A_1) = 0, f_2(A_2) = 0.$$

§ 40. WEKTORY WŁASNE, PODPRZESTRZENIE NIEZMIENNICZE, PODPRZESTRZENIE PIERWIASTKOWE

40.1. Wyznaczyć wektory własne i wartości własne:

(a) operatora różniczkowania w przestrzeni $\mathbb{R}[t]_n$;

(b) operatora $X \mapsto {}^tX$ przestrzeni $M_n(\mathbb{R})$;