

Zadania z GALu IV

Wersja 27 listopad 2011

Zadania z ♠ jeszcze nie są zrobione, z ♥ do domu pisemnie (wraz z innymi z kartki (4))

1) Pozostały zadania z poprzedniej kartki. Które warto jeszcze robić? Jak najsprawniej można zrobić zadanie 10 z poprzedniej kartki?

2) ♠Niech $\mathbf{F}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ oznacza przestrzeń wielomianów zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_n$ o współczynnikach z ciała $\mathbf{F}$. Przez $Sym_n(\mathbf{F})$ oznaczmy wielomiany symetryczne, to znaczy takie wielomiany $W(X_1, X_2, \dots, X_n)$, które spełniają:

$$W(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n) = W(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

dla każdej pary indeksów $i < j$. (Np dla $n = 2$ ma być $W(X_1, X_2) = W(X_2, X_1)$.) Zbiór $Sym_n(\mathbf{F})$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbf{F}[X_1, X_2, \dots, X_n]$. Podać przykład bazy.

3) ♠Niech $\sigma_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie elementarnym wielomianem symetrycznym

$$\sigma_k = \sigma_k(X_1, X_2, \dots, X_n) := \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}, \#I=k} \prod_{i \in I} X_i.$$

Wykazać, że

$$\mathbf{F}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n] = Sym_n(\mathbf{F}).$$

(A ściślej, że przekształcenie

$$\phi : \mathbf{F}[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \rightarrow Sym_n(\mathbf{F})$$

spełniające

$$\phi(Y_k) = \sigma_k(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

$$\phi(P \cdot Q) = \phi(P) \cdot \phi(Q)$$

jest izomorfizmem. Tzn. pokazać, że jednomiany od $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ są bazą $Sym_n(\mathbf{F})$.) W szczególności np dla $n = 4$ zapisać $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3$ za pomocą σ_k .

4) ♠Niech $p_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie sumą potęg

$$p_k(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

Dla jakich ciał

$$\mathbf{F}[p_1, p_2, \dots, p_n] = Sym_n(\mathbf{F})?$$

I trochę prostych zadań o przekształceniach liniowych:

5) Niech $U, V \subset \mathbf{R}^n$ będą określone układami równań:

$$U = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\} \quad V = \{x_1 = x_2 = \dots = x_n\}.$$

Wykazać, że $\mathbf{R}^n = U \oplus V$ oraz wyznaczyć rzuty wektorów jednostkowych na U równoległe do V .

6) ♥W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ określamy podprzestrzenie

$$U = \text{lin}\{(1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1)\}, \quad V = \text{lin}\{(-1, -1, 1, -1), (2, 2, 0, 1)\}.$$

Wykazać, że $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$ i znaleźć rzut wektora $(4, 2, 4, 4)$ na U równoległe do V .

7) Niech U i W będą podprzestrzeniami liniowymi V . Załóżmy, że $\dim V < \infty$ oraz $\dim U + \dim W = \dim V$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- a) $V = U \oplus W$;
- b) $V = U + W$;
- c) $U \cap W = \{0\}$.

8) ♥ Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $f(1, 3) = (2, 4, 1)$ i $f(2, 1) = (5, 3, 2)$. Znaleźć $f(1, 1)$.

9) Niech f będzie niezerową funkcją liniową $V \rightarrow \mathbf{F}$. Niech $U = \ker f$. Wykazać, że $V = U \oplus \text{lin}\{v\}$ dla dowolnego $v \in V \setminus U$.

10) Znaleźć przykłady przekształceń $f : V \rightarrow V$ pewnej przestrzeni (koniecznie nieskończenie wymiarowej) takie, że

- a) jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem,
- b) jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem.

11) ♠ Znaleźć jądro i obraz przekształcenia

- a) $\phi : K[x] \rightarrow K[x]$, $\phi(f) = f - f'$.
- b) $\phi : K[[x]] \rightarrow K[[x]]$ (szeregi formalne), $\phi(f) = f - f'$.xxx

12) ♠ Niech $f_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$ dla $i = 0, \dots, n$ będzie ciągiem przekształceń liniowych, takim, że $\text{im } f_i = \ker f_{i+1}$, $V_0 = 0$ i $V_{n+1} = 0$. Udowodnić, że $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim V_i = 0$.

13) ♠ Oznaczmy przez $M(n \times n)$ przestrzeń liniową macierzy kwadratowych rozmiaru n . (Jaki jest jej wymiar?). Niech

$$T : M(n \times n) \rightarrow M(n \times n)$$

będzie transpozycją, tzn. przekształceniem zadanym wzorem

$$T(\{a_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}) = \{a_{j,i}\}_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Znaleźć jądra i obrazy przekształceń $S = \frac{1}{2}(Id + T)$ i $A = \frac{1}{2}(Id - T)$.

14) ♠ Udowodnić, że jeśli $\dim V < \infty$, to $W_1 \oplus V \simeq W_2 \oplus V$ wtedy i tylko wtedy gdy $W_1 \simeq W_2$. Podać kontrprzykład, gdy $\dim V = \infty$.

15) ♠ Dane dwie podprzestrzenie $W_1, W_2 \subset V$. Załóżmy, że $\dim W_1 = \dim W_2$. Czy zawsze istnieje taki izomorfizm f przestrzeni V , że $f(W_1) = W_2$?

16) ♠ Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, a $J : V \rightarrow V$ przekształceniem, takim, że $J^2 = -Id_V$. Wprowadzić w V strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbf{C}$, tak, że mnożenie przez $i \in \mathbf{C}$ jest przekształceniem J . Wywnioskować, że jeśli $\dim_{\mathbf{R}} V < \infty$, to $\dim_{\mathbf{R}} V$ jest parzysty.