

Zadania z GALu IV

Wersja 14 listopad 2011

1) Znaleźć bazę podprzestrzeni liniowej wielomianów spełniających:

a) $f(1) = f(2) = 0$;

b) $f^{(3)}(7) = 0$ (trzecia pochodna).

2) Wykazać, że jeśli $1 + 1 \neq 0$ w ciele F to w dowolnej przestrzeni liniowej V nad F dla dowolnych wektorów $v, w \in V$ zachodzi $\text{lin}(v + w, v - w) = \text{lin}(v, w)$.

3) Wyznaczyć wszystkie wartości parametru p , tak by układ $(2, p, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 3)$ był liniowo niezależny. (Rozważyć też ciała $\mathbf{Z}_p$.)

4) Dane są wektory $\alpha_1 = (-1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 2)$, $\alpha_3(t) = (-3, t, 0)$.

a) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3(t)$ jest bazą przestrzeni $\mathbf{R}^3$?

b) dla każdego t takiego jak w a) znaleźć współrzędne wektora $\beta = (1, 1, -1)$ w tej bazie.

c) Dla jakich wartości t wektor $\alpha_3(t)$ jest kombinacją liniową α_1 i α_2 ? Znaleźć tę kombinację.

5) ♠Niech $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)$, $\alpha = (-3, 0, 1)$. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3 , że układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest bazą $\mathbf{R}^3$ i wektor α ma w tej bazie współrzędne 2, -3, 1.

b) to samo polecenie gdy $\beta = (3, 5, 2)$.

6) ♠Dane wektory w $\mathbf{R}^3$: $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\beta_1 = (1, -1, 1)$, $\beta_2 = (4, 1, 2)$. Opisać $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2) \cap \text{lin}(\beta_1, \beta_2)$.

7) Dane dwie podprzestrzenie w $\mathbf{R}^4$:

$$V = \begin{cases} x + 2y - 3w & = & 0 \\ x + y - 2z & = & 0 \end{cases}, \quad W = \begin{cases} 3x + y - z - 3w & = & 0 \\ x + y - z - w & = & 0 \end{cases}$$

Opisać równaniami $V + W$. Znaleźć wymiary przestrzeni $V + W$ i $V \cap W$. Wypisać bazy.

8) ♠Niech $V = \text{lin}((2, 4, 1, 2), (1, -1, 1, -2), (4, 2, 3, -2)) \subset \mathbf{R}^4$ oraz niech W będzie zadane równaniami:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Znaleźć wymiar przestrzeni $V + W$ i $V \cap W$. Opisać je równaniami oraz podać bazy tych przestrzeni.

9) ♠Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Czy wektory $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 2)$ można dopełnić wektorem $\beta \in W$ do bazy $\mathbf{R}^4$.

10) ♠Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Znaleźć równanie przestrzeni zawierającej W i wektor $(1, 1, 1, 2)$.