

Zadania z GALu III

Wersja 7 listopad 2011

Przestrzenie liniowe i podprzestrzenie

Zadania z ♠ jeszcze nie są zrobione.

- 1) Istnieje ciało 4-elementowe $\mathbf{F}_4 = \{0, 1, a, b\}$. Podać tabelki działań dodawania i mnożenia.
- 2) Niech $C(\mathbf{R})$ będzie zbiorem funkcji ciągłych $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ z działaniem dodawania i mnożeniem przez stałą. Sprawdzić, że $C(\mathbf{R})$ jest przestrzenią liniową.
- 3) Które podzbiory $C(\mathbf{R})$ są podprzestrzeniami liniowymi?
 - a) wielomiany?
 - b) funkcje spełniające $f(0) = 1$?
 - c) funkcje spełniające $f(1) = 0$?
 - d) funkcje spełniające $f(x) = f(-x)$, dla każdego $x \in \mathbf{R}$?
 - e) funkcje spełniające $f(x) > 0$ dla $x > 0$?
 - f) funkcje spełniające: f jest dwukrotnie różniczkowalna i $f = -f''$?
 - g) funkcje okresowe?
 - h) funkcje okresowe o okresie T ?
- 4) Niech $V \subset \mathbf{R}^3$ będzie najmniejszą podprzestrzenią liniową zawierającą wektory $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$. Czy wektor $(1, 1, 1)$ należy do V ? A wektor $(1, 4, 3)$?
- 5) Niech $V \subset \mathbf{C}^4$ będzie najmniejszą przestrzenią liniową zawierającą wektory

$$(i, 1, -i, -1), (i, -i, 1, -1), (1, 0, 0, -1).$$

Wykazać, że każdy wektor $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ spełnia warunek: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Natomiast nie każdy spełnia $x_4 = -1$.

- 6) Opisać równaniami najmniejszą podprzestrzeń liniową zawierającą wektory:
 - a) $(1, -1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(2, 0, 1, 1)$ w $\mathbf{R}^4$,
 - b) $(1, -1, 1, -1, 1)$, $(1, 1, 0, 0, 3)$, $(3, 1, 1, -1, 7)$, $(0, 2, -1, 1, 2)$ w $\mathbf{R}^5$.
- 7) Wykazać, że przecięcie $V_1 \cap V_2$ dwu podprzestrzeni liniowych jest podprzestrzenią liniową.
- 8) Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami liniowymi V . Wykazać, że najmniejszą podprzestrzenią liniową zawierającą $V_1 \cup V_2$ jest *suma algebraiczna* $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \in V : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
- 9) Niech A, B_1, B_2 będą podprzestrzeniami liniowymi V .
 - a) Czy prawdziwa jest formuła $A \cap (B_1 + B_2) = (A \cap B_1) + (A \cap B_2)$?
 - b) Czy prawdziwa jest formuła $A + (B_1 \cap B_2) = (A + B_1) \cap (A + B_2)$?

Niech p będzie liczbą pierwszą. Oznaczenie: $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}_p$ oznacza ciało p elementowe.

- 10) Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbf{F}_2)^3$? Opisać je równaniami.
- 11) Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbf{F}_p)^n$?
- 12) (**Zadam pisemnie**) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad nieskończonym ciałem. Dane podprzestrzenie liniowe $V_1, V_2, \dots, V_n$. Wykazać, że jeśli $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ to $V = V_i$ dla pewnego i .
- 13) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad dowolnym ciałem. Dane podprzestrzenie liniowe V_1, V_2 . Wykazać, że jeśli $V = V_1 \cup V_2$ to $V = V_i$ dla $i = 1$ lub 2 .
- 14) ♠ Udowodnić, że dla podprzestrzeni liniowych jakiejś większej przestrzeni mamy:
 - a) $(U + W) \cap (W + V) \cap (V + U) = [(W + V) \cap U] + [(V + U) \cap W]$
 - b) $(U \cap W) + (W \cap V) + (V \cap U) \subset (U + V) \cap (V + W) \cap (W + U)$

15) Wskazówka do zadania 11. Udowodnić, że w przestrzeni $\mathbf{F}_p^n$ jest

$$(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1} (p^n - p^i)$$

k -tek liniowo niezależnych wektorów.

16) Czy te układy wektorów są liniowo niezależne?

a) $(1, 1, 0)$, $(1, 2, -3)$, $(2, 4, 1)$ w $\mathbf{R}^3$;

b) $(1, 2, 1, 1)$, $(2, -1, -1, 4)$, $(5, 5, 2, 7)$ w $\mathbf{R}^4$;

c) $(3, 2, 1, -1)$, $(5, -1, 1, 2)$, $(7, 8, 1, -7)$, $(1, -1, 1, 2)$ w $\mathbf{R}^4$.

17) Czy te układy wektorów rozpinają całą przestrzeń?

a) $(3, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 3, 2)$ w $\mathbf{R}^3$;

b) $(3, 1, 0, -2)$, $(5, 2, 2, -1)$, $(1, -1, 0, -2)$, $(5, 1, 1, -3)$, $(-7, -3, 1, 5)$,
 $(4, 1, -2, -5)$ w $\mathbf{R}^4$;

c) $(1, 1, 1)$, (a, b, c) , (a^2, b^2, c^2) w $\mathbf{R}^3$ dla $a, b, c \in \mathbf{R}$.

18) Znaleźć bazy przestrzeni liniowych rozpiętych przez wektory w dwóch poprzednich zadaniach.

19) Znaleźć bazy przestrzeni liniowych opisanych przez równania:

a) $x + y + z + t + s = 0$ w $\mathbf{R}^5$;

b)
$$\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 0 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = 0 \end{cases}$$
 w $\mathbf{R}^5$;

c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$ w $\mathbf{R}^4$.

20) ♠ Znaleźć bazę podprzestrzeni liniowej wielomianów spełniających:

a) $f(1) = f(2) = 0$;

b) $f^{(3)}(7) = 0$ (trzecia pochodna).