

Zadania z GALu II

Wersja 14 październik 2011

Zadania z ♠ jeszcze nie są zrobione.

1) ♠ W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania

a) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$,

b) $z^2 - 4z + 13 = 0$,

c) $\frac{1}{z} = \frac{1-z}{1}$,

d) $z^4 = (1-i)^4$,

2) ♠ Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór liczb spełniających warunek:

a) $\operatorname{Re}(iz + 2) > 0$,

b) $\operatorname{Im} \frac{1+iz}{1-iz} = 1$,

c) $\left| \frac{z-2i}{z+1} \right| = 1$,

d) $\operatorname{Im}(iz^4 + 2) \geq 0$.

3) ♠ Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby

a) $-2 + 2i$,

b) $\sqrt{3} - i$,

c) $-5 + 5\sqrt{3}i$.

4) ♠ Obliczyć wyrażenia (wynik w postaci $a + bi$)

a) $(1-i)^{12}$,

b) $(1 + \sqrt{3}i)^8$,

c) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-\sqrt{3}i)^6}$.

5) ♠ Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić

a) $\cos(nx)$ przez funkcje $\cos(x)$ i $\sin(x)$

b) $\cos(7x)$ przez funkcje $\cos(x)$.

6) ♠ Obliczyć $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

(wsk. ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego),

7) ♠ Obliczyć

a) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} \dots$

b) $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} \dots$

8) ♠ Obliczyć sumę i iloczyn pierwiastków n -tego stopnia z jedynki.

9) ♠ Jeśli $\xi^n = 1$ i $\xi^k \neq 1$ dla $k < n$ to mówimy, że ξ jest pierwotnym pierwiastkiem z jedynki n -tego stopnia. Obliczyć sumę pierwotnych pierwiastków z jedynki dla n postaci:

a) $n = p$ jest liczbą pierwszą

b) $n = p^k$

c) dowolne n .