

Zadania z GALu

Wersja 11 październik 2011

Zadania z ♠ jeszcze nie są zrobione.

- 1) Załóżmy, że układ równań liniowych o współczynnikach całkowitych ma dla każdej liczby pierwszej p dokładnie jedno rozwiązanie nad $\mathbf{Z}_p$. Czy ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?
- 2) Dana nieosobliwa macierz kwadratowa. Czy stosując jedynie operacje I typu ($wiersz := wiersz + a(inny\ wiersz)$) można ją sprowadzić do postaci diagonalnej $Diag(1, 1, 1, \dots, 1, d)$?
- 3) Układowi równań liniowych odpowiada macierz. Jakim transformacjom równań odpowiadają elementarne operacje na kolumnach?

Rozwiązać układy równań zadane przez macierze (szukamy rozwiązań w $\mathbf{Q}$)

$$4) \spadesuit \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & -2 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & -5 & 1 & 17 \\ 6 & 5 & 3 & -2 & -9 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -5 & -10 & 12 \end{array} \right]$$

$$5) \spadesuit \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ -7 & -3 & 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right]$$

$$6) \spadesuit \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 4 & 0 & 10 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

$$7) \spadesuit \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

- 9) Znaleźć rozwiązanie w zależności od parametrów $a, b, c \in \mathbf{R}$

$$\text{i)} \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right] \quad \text{ii)} \spadesuit \left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a^2 \end{array} \right] \quad \text{iii)} \spadesuit \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \end{array} \right]$$

10) $\spadesuit$ Wykazać, że istnieje piątka punktów $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathbf{R}^2$, przez które przechodzi dokładnie jedna stożkowa (tzn. krzywa o równaniu $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$).

Własność tę oznaczmy przez (*).

11) $\spadesuit$ Dla piątki punktów $p_1, \dots, p_5$ o powyższej własności (*) wykazać, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że jeśli piątka punktów $q_1, \dots, q_5$ spełnia $|p_i - q_i| < \varepsilon$ dla $i = 1, 2, \dots, 5$, to też ma własność (*).

12) $\spadesuit$ Uogólnić Zadania 10–11 dla zbiorów opisanych równaniami d -tego stopnia w $\mathbf{R}^n$.

13) $\spadesuit$ Jednorodny układ m równań, n niewiadomych jest zadany przez macierz $A = \{a_{ij}\}$. Załóżmy, że nie można żadnego równania pominąć. Niech $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$ dla $i = 1, 2, \dots, n - m$ będzie zbiorem rozwiązań rozpinającym wszystkie rozwiązania. Rozważmy układ $n - m$ równań, n niewiadomych zadany przez macierz $C = \{b_{ji}\}$. Sprawdzić, że wiersze macierzy A spełniają równania zadane przez C . Ponadto każde inne rozwiązanie da się otrzymać przez elementarne operacje na wierszach A .

14) $\spadesuit$ Podać warunek na to by cztery płaszczyzny w $\mathbf{R}^3$ zadane równaniami $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$ (dla $i = 1, 2, 3, 4$) zawierały wspólną prostą.

15) $\spadesuit$ Podać warunek na to by cztery punkty w $(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ leżały na jednym okręgu.

16) $\spadesuit$ Wykazać, że jeśli okrąg na płaszczyźnie przechodzi przez 3 punkty o współrzędnych wymiernych, to współrzędne jego środka oraz kwadrat promienia są liczbami wymiernymi.