

Zadania z GALu do domu pisemnie (6)

Wersja 20 grudzień 2011

1) Dana liczba naturalna n . Niech $V = \mathbf{K}[x]_{\leq n}$ będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia $\leq n$ (nad ciałem $\mathbf{K}$). Bazą jest ciąg wielomianów

$$\mathcal{A} = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}.$$

Dla elementu ciała $a \in \mathbf{K}$ definiujemy ciąg wielomianów

$$\mathcal{B} = \{1, (x-a), (x-a)^2, (x-a)^3, \dots, (x-a)^n\}.$$

Jest on bazą V . (Dlaczego?) Znaleźć macierze przejścia $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(Id_V)$ i $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(Id_V)$.

2) Niech $\mathbf{K}$ będzie ciałem. Rozważmy oczywiste przekształcenie

$$\Phi : \mathbf{K}[x] \rightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{K}}.$$

(Wielomianowi przypisujemy funkcję zadaną wzorem wielomianowym.) Wykazać, że:

a) $\ker(\Phi) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy ciało jest nieskończone.

b) Istnieje pewien wielomian $f_{\min} \in \mathbf{K}[x]$ taki że, każdy element jądra jest podzielny przez $f_{\min}$.

c) Niech p będzie liczbą pierwszą. Wykazać, że $f_{\min}(x) = x^p - x$ dla $\mathbf{K} = \mathbf{F}_p$.

d) Zastanowić się jak to jest dla ciała 4-elementowego $\mathbf{F}_4$.

3) Niech $f : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że istnieje take przekształcenie liniowe $g : W \rightarrow V$, że $f = f \circ g \circ f$ oraz $g = g \circ f \circ g$.

4) Niech

$$\alpha : A \rightarrow B, \quad \beta : C \rightarrow D$$

będą przekształceniami liniowymi. Definiujemy przekształcenie

$$\begin{aligned} \Psi : L(B, C) &\rightarrow L(A, D) \\ f &\mapsto \beta \circ f \circ \alpha. \end{aligned}$$

Znając wymiary A, B, C, D i wymiary jąder oraz obrazów α i β obliczyć wymiar jądra i obrazu Ψ .

5) Dany układ wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n$ w przestrzeni V . Wykazać, że układ ten jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg funkcjonałów $f_1, f_2, \dots, f_n \in V^*$ takich że, macierz $[a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} = [f_i(v_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$ jest maksymalnego rzędu.

6) Niech

$$V = \left\{ \{a_n\} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}.$$

Definiujemy przekształcenie

$$\begin{aligned} \Psi : V &\rightarrow V^* \\ \{a_n\} &\mapsto \Psi(\{a_n\}) \quad \text{dane wzorem} \quad \Psi(\{a_n\})(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \end{aligned}$$

Upewnić się, że Ψ jest dobrze określone. Czy przekształcenie Ψ jest monomorfizmem? Czy przekształcenie Ψ jest epimorfizmem? Jeśli nie jest *epi*, to skonstruować funkcjonał, który nie leży w obrazie.