

Zadania z GALu do domu pisemnie (5)

Wersja 14 grudzień 2011

1) Niech $F : W \rightarrow V$ będzie reprezentowane przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ względem pewnych baz (e_1, e_2, e_3) w przestrzeni V i (f_1, f_2) w W . Wyznaczyć macierz odwzorowania F względem baz $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ i $(f_1, f_1 + f_2)$.

2) Niech $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)$. Przekształcenie ϕ jest zadane przez macierz w bazie $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$:

$$M(\phi)_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Znaleźć obraz i jądro ϕ .

3) Wykazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ spełnia $\phi^2 = 2(\phi - Id)$, to n jest parzyste i w pewnej $\mathcal{A}$ bazie ϕ ma macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}$, gdzie I jest macierzą jednostkową wymiaru $n/2 \times n/2$

(lub wersja łatwa: Wykazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ spełnia $\phi^2 = 2(\phi - Id)$, to w pewnej bazie ma macierz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.)

4) Niech $\phi : V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $V = \ker \phi \oplus \operatorname{im} \phi$. Ponadto ϕ jest rzutowaniem na $\operatorname{im} \phi$.

5) Niech

$$V = \{ \{a\}_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \{a_n\}_{n \in \mathbf{N}} \text{ jest zbieżny} \}.$$

Czy V jest izomorficzne z przestrzenią wszystkich ciągów $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?