

Zadania z GALu do domu pisemnie (4)

Wersja 29 listopad 2011

1) Niech $W \subset \mathbf{R}^8$ będzie opisane przez układ równań

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 3x_8 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 6x_8 = 0 \end{cases}.$$

Znaleźć równanie przestrzeni zawierającej W i wektor $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

2) W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ określamy podprzestrzenie

$$U = \text{lin}\{(1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1)\}, \quad V = \text{lin}\{(-1, -1, 1, -1), (2, 2, 0, 1)\}.$$

Wykazać, że $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$ i znaleźć rzut wektora $(4, 2, 4, 4)$ na U równoległe do V .

3) Niech $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $f(1, 3) = (2, 4, 1)$ i $f(2, 1) = (5, 3, 2)$. Znaleźć $f(1, 1)$.

4) Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi oraz $f : V \rightarrow W$ dowolnym przekształceniem. Oznaczmy przez $\text{graph}(f) \subset V \times W$ wykres funkcji f (należą do niego punkty postaci $(v, f(v))$). Wykazać, że f jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy gdy $\text{graph}(f)$ jest podprzestrzenią liniową w $V \times W$.

5) Wskazać przekształcenie $\phi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ spełniające 3 warunki

- a) $(-1, 2, 1) \in \ker \phi$,
- b) $\text{im } \phi = \text{lin}\{(1, 1, 2)\}$
- c) $\phi^3 = 0$.

Podać jawny wzór $\phi(x, y, z) = (\dots, \dots, \dots)$. Wykazać, że przekształcenie ϕ spełniające powyższe warunki musi ponadto spełniać: $\phi^2 = 0$.

Zadania dodatkowe: dowolny termin oddania, ale nie później niż 3 pierwsze osoby. (Proszę oddawać na rozłącznych kartkach z pozostałymi zadaniami.)

6) Dla jakich k następujące zdanie jest prawdziwe?

- (*) Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru, i niech $W_1, W_2, W_3, \dots, W_k$ oraz $W'_1, W'_2, W'_3, \dots, W'_k$ będą podprzestrzeniami. Jeśli dla dowolnego zbioru indeksów $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$ wymiary $\dim(\bigcap_{i \in I} W_i)$ i $\dim(\bigcap_{i \in I} W'_i)$ są równe, to istnieje taki izomorfizm liniowy $f : V \rightarrow V$, że $f(W_i) = W'_i$.

7) W sytuacji opisanej w poprzednim zadaniu założmy, że wszystkie przestrzenie W_i i W'_i są prostymi (tzn. $\dim(W_i) = \dim(W'_i) = 1$). Dla jakich par liczb k i $n = \dim(V)$ powyższe stwierdzenie (*) jest prawdziwe?