

Zadania z GALu do domu pisemnie (3)

Wersja 7 listopad 2011

1) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad nieskończonym ciałem. Dane podprzestrzenie liniowe $V_1, V_2, \dots, V_n$. Wykazać, że jeśli $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ to $V = V_i$ dla pewnego i .

2) Niech

$$W_k^n(p) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (p^n - p^i)}{\prod_{i=0}^{k-1} (p^k - p^i)}.$$

Udowodnić, że $W_k^n(p)$ jest wielomianem zmiennej p , którego współczynnik a_i przy p^i można obliczyć za pomocą następującego wzoru:

$$a_i = \#\{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{Z}^k : 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq n - k, \sum_{j=1}^k \lambda_j = i\}$$

($\#$ oznacza liczebność zbioru). W szczególności wszystkie a_i są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

3) Niech

$$V_1 = \text{lin}\{(1, 0, 1, -1, 1), (0, -1, 1, 1, 1), (1, 1, -2, 1, 1)\} \subset \mathbf{R}^5,$$

$$V_2 = \text{lin}\{(-1, -1, 1, 1, 0), (-1, 0, 2, 1, 2), (-2, -1, 0, 1, -2)\} \subset \mathbf{R}^5.$$

Znaleźć bazę $V_1 \cap V_2$.

4) Dany układ równań

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= t \\ 5x_1 + sx_2 + 11x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \end{cases}$$

W zależności od parametrów s i t określić ile ten układ ma rozwiązań.

5) Niech macierze A i B będą tego samego rozmiaru. Udowodnić nierówność rzędów

$$rk(A + B) \leq rk(A) + rk(B).$$