

Zadania z GALu do domu pisemnie (2)

Wersja 25 październik 2011

1) Niech F będzie ciałem. Przypuśćmy, że $\overbrace{1+1+1+\dots+1}^d = 0$ dla pewnego $d > 0$. Niech d będzie najmniejsze możliwe. Wykazać, że d jest liczbą pierwszą.

2) Liczby zespolone $\mathbf{C} = \mathbf{R} + i\mathbf{R}$ powstają przez dołączenie do $\mathbf{R}$ symbolu i spełniającego tożsamość $i^2 = -1$. Zróbmy tą samą konstrukcję dla $\mathbf{Z}_3$. Czy otrzymamy ciało? Jeśli tak to czy każdy wielomian kwadratowy o współczynnikach w tym ciele będzie miał rozwiązanie? A czy to samo da się powtórzyć dla $\mathbf{Z}_p$ (p – liczba pierwsza, $p > 3$)?

3) Niech X będzie dowolnym zbiorem. Przez $P(X)$ oznaczamy zbiór podzbiorów X . Definiujemy operację "+,,:":

$$A + B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

oraz mnożenie przez skalar z $\mathbf{Z}_2$

$$r \cdot A = \begin{cases} \emptyset & \text{gdy } r = 0 \\ A & \text{gdy } r = 1 \end{cases}$$

Sprawdzić, że $P(X)$ ze zdefiniowanymi powyżej operacjami jest przestrzenią wektorową nad $\mathbf{Z}_2$. Definiujemy ponadto mnożenie w $P(X)$

$$A \odot B := A \cap B$$

Czy $P(X)$ z działaniami $+$ i $\odot$ jest ciałem? Jeśli nie, to które aksjomaty nie są spełnione?

4) Opisać równaniami przestrzeń $V \subset \mathbf{R}^4$ rozpiętą przez wektory:

$$\alpha = (2, 2, 3, -4), \quad \beta = (6, 2, -3, 8), \quad \gamma = (-2, 1, 6, -11).$$

5) Czy wektor $(-4, 1, 9, -17)$ należy do przestrzeni z poprzedniego zadania? Jeśli tak, to zapisać go za pomocą wektorów α , β i γ .