Scena eksperymentalna TiGR ma zaszczyt przedstawić sztukę

Degeneracje grassmanianu do rozmaitości torycznych.

(dramat matematyczno-filogenetyczny w kilku zadaniach, na część z nich układający nie zna odpowiedzi)

Osoby:

- Grassmanian $\mathbb{G} = Grass(2, n)$ zadany jest we współrzędnych Plückera x_{ij}, gdzie $1 \leq i < j \leq n$, równianiami

$$x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk} = 0$$

  dla każdej czwórki $1 \leq i < j < k < l \leq n$

- Drzewo trójdzielne na płaszczyźnie $\mathcal{T}$ (spójny graf niezorientowany bez cykli z wierzchołkami krotności 1 i 3) o n liściach (wierzchołkach krotności 1) ponumerowanych liczbami od 1 do n przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara. Drzewo to ma $2n - 3$ krawędzi i $n - 2$ wierzchołków wewnętrznych. Licząc, że każda krawędź ma długość 1 drzewo to zadaje metrykę na zbiorze $\{1, \ldots, n\}$, w której dla pary $i,\ j$ odległość $d(i, j)$ jest liczona po tym drzewie.

Zadania:

1. Pokaż, że drzewa takie jak $\mathcal{T}$ są w bijekcji z triangulacjami (bez dodawania nowych wierzchołków) n-kąta foremnego z odpowiednio ponumerowanymi bokami.

2. Niech $\gamma(i, j)$ oznacza (najkrótszą t.j. o długości $d(i, j)$) drogę z liścia i do liścia j. Rozpatrzmy czwórke indeksów $1 \leq i < j < k < l \leq n$

   (a) Pokaż, że droga $\gamma(i, k)$ przecina $\gamma(j, l)$ oraz zachodzi dokładnie jedna możliwość: $\gamma(i, j)$ przecina $\gamma(k, l)$ albo $\gamma(i, l)$ przecina $\gamma(j, k)$

   (b) Załóżmy, że dla każdej czwórki indeksów wiemy, która z powyższych możliwości zachodzi. Czy determinuje to jednoznacznie $\mathcal{T}$ jako graf?

3. Drzewo $\mathcal{T}$ zadaje odwzorowanie torusa algebraicznego $(\mathbb{C}^*)^{2n-3}$, którego współrzędne y_κ odpowiadają jego krawędziom, w torus $(\mathbb{C}^*)^{n(n+1)/2}$, którego współrzędne x_{ij} odpowiadają parom jego liści

(zakładamy, że $i < j$), w ten sposób, że na x_{ij} przechodzi produkt współrzędnych krawędzi drogi z i do j, to jest

$$x_{ij} = \prod_{\kappa \in \gamma(i,j)} y_\kappa$$

(a) Pokaż, że domknięcie obrazu tego odwzorowania w przestrzeni afinicznej o współrzędnych x_{ij} jest rozmaitością afiniczną. Uzasadnij, że rozmaitość ta jest stożkiem więc determinuje rozmaitość rzutową w $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n(n+1)/2-1}$ o współrzędnych jednorodnych x_{ij}. Będziemy tę rozmaitość oznaczać $X(\mathcal{T})$.

(b) Znajdź wymiar rozmaitości $X(\mathcal{T})$.

(c) Pokaż, że dla każdej czwórki $1 \leq i < j < k < l \leq n$ ideał $X(\mathcal{T})$ zawiera albo kwadrykę $x_{ik}x_{jl} - x_{ij}x_{kl}$ albo kwadrykę $x_{ik}x_{jl} - x_{il}x_{jk}$ w zależności od tego która para dróg z zadania poprzedniego się przecina.

(d) Pokaż, że powyższe kwadryki generują ideał $X(\mathcal{T})$.

(e) Pokaż, że $X(\mathcal{T})$ jest rozmaitością toryczną. Znajdź jej wachlarz lub stożek odpowiadający jej stożkowi afinicznemu.

4. Na $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$ ze współrzędnymi x_{ij} ustalamy działanie torusa $(\mathbb{C}^*)^n$ ze współrzędnymi t_i tak, że t_i działa na x_{jk} z wagą 1 lub 0 w zależności od tego czy $i \in \{j, k\}$. Działanie to można opuścić do przestrzeni $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n(n+1)/2-1}$ o współrzędnych jednorodnych x_{ij}. Pokaż, że zarówno $\mathbb{G}$ jak i każda rozmaitość $X(\mathcal{T})$ jest niezmiennicza względem tego działania (niezależnie od wyboru drzewa $\mathcal{T}$).

5. Dla ustalonego $\mathcal{T}$ na $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$ ze współrzędnymi x_{ij} ustalamy działanie torusa $\mathbb{C}^*$ z wagami $-d(i,j)$, to jest dla $t \in \mathbb{C}^*$ bierzemy $t(x_{ij}) = t^{-d(i,j)} \cdot x_{ij}$. W produkcie $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n(n+1)/2-1} \times \mathbb{C}^*$ zdefiniujmy rozmaitość $\mathbb{G}(\mathcal{T})$ równaniami

$$t(x_{ij}) \cdot t(x_{kl}) - t(x_{ik}) \cdot t(x_{jl}) + t(x_{il}) \cdot t(x_{jk}) = 0$$

dla każdej czwórki $1 \leq i < j < k < l \leq n$.

(a) Pokaż, że $\mathbb{G}(\mathcal{T})$ jest izomorficzne z produktem $\mathbb{G} \times \mathbb{C}^*$.

(b) Niech $\overline{\mathbb{G}(\mathcal{T})}$ oznacza domknięcie $\mathbb{G}(\mathcal{T})$ w $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n(n+1)/2-1} \times \mathbb{C}$. Pokaż, że $\overline{\mathbb{G}(\mathcal{T})}_0$, czyli włókno rzutowania tej rozmaitości nad $0 \in \mathbb{C}$, jest izomorficzne z $X(\mathcal{T})$.

ZADANIA, część 2

1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a $U \subset X$ zbiorem otwarym. Zakładamy, że:
– U jest homeomorficzne z $\mathbf{R}^n$,
– domknięcie U jest zwarte,
– włożenie $X - U \to X$ jest korozwłóknieniem.
Udowodnić, że $H_*(X, X-U) \simeq \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{dla} \quad * = n \\ 0 & \text{dla} \quad * \neq n \end{cases}$.

2. Niech X będzie zespoloną rozmaitością algebraiczną (nie zakładamy gładkości). Załóżmy, że X można rozłożyć na ,,algebraiczne komórki", tzn. przedstawić X jako sumę lokalnie domkniętych zbiorów algebraicznych $X = \bigsqcup D_\sigma$, gdzie $D_\sigma \simeq \mathbf{C}^{n_\sigma}$ dla pewnego n_σ. Czy znając liczby n_σ można obliczyć kohomologie przestrzeni X?
Uwaga: *rozważyć osobno przypadek, gdy X jest gładka.*

3. Udowodnić, że rozmaitość Schuberta $\bar{\sigma}_1 \subset Grass(2,4)$ jest izomorficzna ze stożkiem rzutowym nad $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ zanurzonym w $\mathbf{P}^3$ odwzorowaniem Segre:

$$([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1].$$

4. Zanurzenie Plückera zadaje metrykę kählerowską na grassmanianach. Obliczyć objętości grassmanianów $Grass(2,4)$, $Grass(2,5)$, $\ldots$.