Zadania Seminarium TiGR A.D. 2013

1 Niech $C \subset \mathbb{P}^2$ będzie nieprzywiedlną krzywą stopnia d. Udowodnić, że jeśli k osobliwych punktów C leży na jednej prostej, to $k \leq \frac{d}{2}$.

2 Niech $f : C \to D$ będzie holomorficznym odwzorowaniem z powierzchni Riemanna C (spójna i zwarta) do spójnej krzywej zespolonej D . Załóżmy, że f nie jest funkcją stałą. Udowoednić, że f jest "na" i D jest zwarta.

3 Niech $f : C \to D$ będzie holomorficznym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna (C i D są spójne i zwarte). Załóżmy, że f nie jest funkcją stałą. Udowodnić, następujący związek pomiędzy topologicznymi charakterystykami Eulera, stopniem i stopniami rozgałęzienia w punktach osobliwych f:

$$\sum_{x \in Sing(f)} (ord_x f - 1) = d\,\chi_{top}(D) - \chi_{top}(C)\,.$$

4 Niech Λ i Λ' będą kratami w $\mathbb{C}$. Definiujemy

$$J(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3/(g_2(\Lambda)^3 - 27 g_3(\Lambda)^2), \quad \text{gdzie} \quad g_2(\Lambda) = 60 \sum_{w \in \Lambda - \{0\}} w^{-4}, \quad g_3(\Lambda) = 140 \sum_{w \in \Lambda - \{0\}} w^{-6}\,.$$

Udowodnić, że krzywe $\mathbb{C}/\Lambda$ i $\mathbb{C}/\Lambda'$ są izomorficzne (istnieje holomorficzny homeomorfizm) wtedy i tylko wtedy gdy $J(\Lambda) = J(\Lambda')$.

5 Niech $C = \mathbb{C}/\Lambda$ oraz niech K_C będzie dywizorem kanonicznym. Wskazać bazę przestrzeni $H^0(C; K_C)$. Niech

$$int : \pi_1(C) \to H^0(C; K_C)^*$$

będzie funkcjonałem zadanym formułą:

$$int(\gamma)(\alpha) = \int_\gamma \alpha\,,$$

gdzie $\gamma \in \pi_1(C)$ oraz α jest holomorficzną formą różniczkową. Udowodnić, że

$$C \simeq H^0(C; K_C)^*/int(\pi_1(C))\,.$$

6 Niech L będzie wiązką liniową nad $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}$ zadaną przez funkcję sklejającą $z^k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. (Jaki jest stopień stowarzyszonego dywizora?) Obliczyć z definicji kohomologie Čecha tego pokrycia i uzasadnić, że są one równe $H^*(\mathbb{P}^1; L)$. Sprawdzić czy formuła Riemanna-Rocha jest spełniona.

7 Sprawdzić, że formuła Noether

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + \chi_{top}(S))$$

dla powierzchni S, zachodzi dla hiperpowierzchni w $\mathbb{P}^3$.

8 Załóżmy, że krzywa C na gładniej powierzchni S ma krotność 1 w punkcie $p \in S$. Niech $\widetilde{S}$ będzie rozdmuchaniem powierzchni S w p, a $\widetilde{C}$ właściwym przeciwobrazem krzywej. Obliczyć krotność przecięcia $\widetilde{C}$ z dywizorem wyjątkowym E. Jak wygląda to przecięcie gdy krotność krzywej w p jest wieększa niż 1?

9 a) Znaleźć właściwy przeciwobraz krzywej w $\mathbb{C}^2$ zadanej równaniem $x^3 = y^2$ przy rozdmuchaniu zera. b) Wskazać zwartą powierzchnię S wraz z odwzorowaniem $S \to \mathbb{P}^2$ taką, że właściwy przeciwobraz krzywej zadanej równaniem $x^3 z^2 - y^5 = 0$ jest krzywą gładką.