Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Szymon Toruńczyk
Nr albumu: 201107

$SO(2)$-geometrie charakterystyczne na niskowymiarowych rozmaitościach

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Marcina Bobieńskiego
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Sierpień 2006

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

Spis treści

Streszczenie

W pracy zajmuję się $SO(2)$-strukurami oraz zgodnymi z nimi koneksjami charakterystycznymi na niskowymiarowych rozmaitościach. Szczegółowo opisane są takie geometrie w przypadku trójwymiarowym, a w przypadku czterowymiarowym sklasyfikowane są geometrie jednorodne.

Słowa kluczowe

Specjana geometria riemannowska, koneksja charakterystyczna, przestrzeń jednorodna, przestrzeń naturalnie reduktywna, teoria strun

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

53B05 Linear and Affine Connections
53B15 Other connections
53C10 G-structures
53C30 Homogeneous manifolds
53A40 Other special differential geometries
53B50 Applications to physics

Tytuł pracy w języku angielskim

Characteristic $SO(2)$-geometries on low-dimensional varieties

Wstęp

Motywacje fizyczne †

Liniowe koneksje metryczne o całkowicie antysymetrycznej torsji, zwane koneksjami *charakterystycznymi*, stały się ostatnio przedmiotem zainteresowania w teoretycznej fizyce i matematyce. Przykładowo, przestrzenie występujące w modelach Wessa-Zumina-Novikova-Wittena (są to proste modele konforemnej teorii pola, będącej częścią kwantowej teorii pola) niosą geometrię metrycznej koneksji z całkowicie antysymetryczną torsją ([HP92],[GHR],[HP96]). W teoriach supergrawitacji, geometria przestrzeni moduli pewnej klasy czarnych dziur również jest zadana przez metryczną koneksję o całkowicie antysymetrycznej torsji ([GPS97]). W teorii supergrawitacji typu II, geometria rozwiązań NS5-bran jest także wyznaczona przez taką koneksję charakterystyczną. Istnienie spinorów równoległych ze względu na koneksję charakterystyczną na riemannowskiej spin-rozmaitości ma duże znaczenie w teorii strun, gdyż są one związane z pewnymi solitonami (solitony BPS) [Pap00].

W teorii strun typu II rozpatruje się rozmaitości $N^k \times M^{10-k}$, gdzie N^k jest k-wymiarową czasoprzetrzenią oraz M^{10-k} jest zwartą rozmaitością riemannowską. W takim przypadku mówimy, że dodatkowe wymiary pochodzące z rozmaitości M są „zwinięte" lub że mamy do czynienia z ich *kompaktyfikacją*. Rozmaitość M jest wyposażona w pewną dodatkową strukturę. Modelem jest mianowicie piątka (M^n, g, H, Φ, Ψ), gdzie g jest metryką riemannowską na rozmaitości M, H jest trójformą, Φ jest tak zwaną funkcją dylatacji, oraz Ψ jest polem spinorowym. Żąda się, by spełnione były równania strun, będące uogólnieniem równań Einsteina (patrz [Str86]):

$$Ric^g_{ij} - \frac{1}{4}H_{imn}H_{jmn} + 2 \cdot \nabla^g_i \partial_j \Phi = 0,$$
$$\delta(e^{-2\Phi}H) = 0,$$

uzupełnione o tak zwane spinorowe równania Killinga:

$$(\nabla^g_X + \frac{1}{4}\iota_X H) \cdot \Psi = 0,$$
$$(d\Phi - \frac{1}{2}H) \cdot \Psi = 0$$

($\delta = \pm * d*$ jest koróżniczką oraz ∇^g jest koneksją Levi-Civity na rozmaitości (M, g)).

Biorąc metryczną koneksję ∇, której tensor torsji jest równy tensorowi H (jak wynika z tw. 1.4, taka koneksja istnieje), powyższe równania można równoważnie zapisać w takiej, bardziej eleganckiej, postaci ([IP01]):

$$Ric^\nabla + \frac{1}{2}\delta(H) + 2 \cdot \nabla^g d\Phi = 0, \qquad \delta(H) = 2 \cdot \iota_{grad\Phi} H,$$
$$\nabla\Psi = 0, \qquad (d\Phi - \frac{1}{2}H) \cdot \Psi = 0,$$

gdzie Ric^∇ oznacza tensor Ricciego koneksji ∇. A zatem, tutaj koneksja ∇ ma całkowicie antysymetryczną torsję H oraz pole spinorowe Ψ jest względem niej równoległe. Dlatego też, geometrie charakterystyczne oraz równoległe pola spinorowe są tak istotne w teorii strun typu II.

† Poniższe opracowanie zaczerpnięte jest z pracy [FI02].

Specjalne geometrie

Rozpatrzmy n-wymiarową, jednospójną rozmaitość riemannowską M wraz z jej koneksją Levi-Civity. Przesunięcie równoległe wzdłuż różnych pętli zaczepionych w ustalonych punkcie $x \in M$ wyznacza nam pewną grupę izometrii przestrzeni stycznej do punktu x, zwaną grupą holonomii. Okazuje się, że gdy M nie jest przestrzenią symetryczną, to niektóre podgrupy $H \subseteq SO(n)$ mogą występować jako grupy holonomii rozmaitości riemannowskich, a inne nie. Gdy M jest nieredukowalną rozmaitością riemannowską, to możliwe grupy holonomii zostały sklasyfikowane przez Bergera [Ber55] w roku 1955 (z późniejszymi poprawkami).

Grupa holonomii	$dimM$	Rodzaj rozmaitości	Inne własności
$SO(k)$	k	Orientowalna	
$U(k)$	$2k$	Kählerowska	
$SU(k)$	$2k$	Calabi-Yau	Ricci-płaska, kählerowska
$Sp(k) \cdot Sp(1)$	$4k$	Kwaternionowo-kählerowska	Einsteinowska
$Sp(k)$	$4k$	Hiper-kählerowska	Ricci-płaska, kählerowska
G_2	7	Rozmaitość G_2	Ricci-płaska
$Spin(7)$	8	Rozmaitość $Spin(7)$	Ricci-płaska

Lista Bergera

Geometrie zadane przez koneksję Levi-Civity, których grupa holonomii nie stanowi pełnej grupy izometrii $SO(n)$, nazywane są *geometriami specjalnymi*. Wiadomo, że wszystkie grupy z powyższej listy rzeczywiście mogą się pojawiać jako grupy holonomii niesymetrycznych przestrzeni. Jednak w przypadku dwóch ostatnich grup, znalezienie takich przykładów okazało się bardzo trudnym zadaniem. Dokonał tego dopiero R. Bryant w roku 1987 [Bry87], zupełne przykłady zostały znalezione przez niego i S. Salamona w roku 1989 [BS89], a zwarte przykłady znalazł w roku 1994 D. Joyce [Joy96]. Również, na oryginalnej liście Bergera znalazła się 16-wymiarowa nieprzywiedlna reprezentacja grupy $Spin(9)$, jednak okało się, że geometrie o takiej holonomii nie istnieją [GB72].

Zaznaczmy, że jeżeli nie ograniczać się do beztorsyjnych i metrycznych koneksji, to okazuje się, że *dowolna* spójna grupa $H \subseteq GL(n)$ może być zrealizowana jako grupa holonomii pewnej koneksji [HO56].

Zauważmy, że jeśli na rozmaitości M istnieje obiekt kowariantnie stały względem koneksji Levi-Civity, to grupa holonomii może być właściwą podgrupą grupy $SO(n)$, a wtedy geometria rozmaitości M byłaby specjalna. W przypadku kowariantnie stałych spinorów istotnie taka implikacja zachodzi [Hit74]. Jeżeli rozpatrujemy koneksje niekoniecznie beztorsyjne, ale z antysymetryczną torsją, to takiego wniosku nie możemy wyciągać, ale sytuacje takie leżą w kręgu zainteresowań różnych grup badawczych (np. grupy prof. Thomasa Friedriecha z Berlina, [FI02]).

Specjalne geometrie mają znaczenie dla kompaktyfikacji w teorii strun, gdyż kowariantnie stałe spinory, które istnieją na rozmaitościach ze specjalną geometrią, pozwalają na rozważanie supersymetrii, zjawiska podstawowego dla współczesnych teorii fizycznych. Szczególnie dużo zainteresowania skupiają sześciowymiarowe rozmaitości Calabi-Yau z grupą holonomii $SU(3)$, a także rozmaitości z holonomią $SU(2)$ lub G_2.

Warto zauważyć, że $SO(2)$-geometrie dostarczają ciekawych przykładów innych geometrii. Przestrzeń Aloffa-Wallacha typu (p, q), będąca ilorazem grupy $SU(3)$ przez jednowymiarową podgrupę, jest to siedmiowymiarowa przestrzeń z G_2-strukturą pochodzącą od $SO(2)$-struktury (konkretniej, od $\mathcal{S}_{2p+q,2q+p,p-q,\bullet}$-struktury, według oznaczeń z części (1.1) tej pracy). Jest to klasyczny i szeroko badany przykład G_2-geometrii (patrz np. [CMS94],[Aly05]). Pewne interesujące przykłady nieprzywiedlnych $SO(3)$-strukutur na 5-rozmaitościach pochodzą od $SO(2)$-struktur (dokładniej, $\mathcal{S}_{2,1,\bullet}$-struktur). Zostały one zbadane w [BN].

Naturalnie reduktywne przestrzenie jednorodne

Jednorodne przestrzenie riemannowskie, na których istnieje koneksja z całowicie antysymetryczną torsją, nazywane są *przestrzeniami naturalnie reduktywnymi*. Pojęcie to uogólnia pojęcie przestrzeni symetrycznej. Przestrzenie naturalnie reduktywne charakteryzują się tym, że istnieje taka tranzytywna grupa G izometrii przestrzeni, dla których geodezyjne są orbitami jednoparametrowych podgrup grupy G [AS58]. Niskowymiarowe naturalnie reduktywne przestrzenie jednorodne zostały sklasyfikowane w wymiarach 3, 4, 5 [TV83], [KV85], [KV87].

Plan pracy

W mojej pracy będę się zajmował $SO(2)$-geometriami charakterystycznymi, związanymi z różnymi włożeniami grupy $SO(2)$ w grupę $SO(n)$. Tak więc, rozpatrywane będą podgrupy grupy $SO(n)$ izomorficzne z $SO(2)$ i odpowiadające im struktury na n-wymiarowych rozmaitościach wraz z koneksjami charakterystycznymi zachowująymi daną strukturę (dokładna definicja znajduje się w części 1.5).

W rozdziale pierwszym wprowadzone są podstawowe pojęcia i oznaczenia, oraz przedstawione są ogólne twierdzenia, z których będę korzystał w kolejnych rozdziałach. Dotyczą one wiązek głównych, redukcji grupy strukturalnej, kanonicznych koneksji niezmienniczych na przestrzeniach jednorodnych oraz geometrii charakterystycznych. Wyniki przedstawione w rozdziale pierwszym są klasyczne, jednak z powodu braku odpowiednich referencji zamieściłem własne ich dowody. W pozostałej części pracy znajdują się wyniki mojego autorstwa.

Rozdział drugi, zawierający główne wyniki niniejszej pracy, poświęcony jest dokładnemu opisowi rozpatrywanego przeze mnie zagadnienia w przypadku trójwymiarowym. $SO(2)$-struktura na rozmaitości trójwymiarowej jest tym samym, co wybór metryki, orientacji oraz pola jednostkowych wektorów stycznych do rozmaitości. Pierwsze twierdzenie (2.1) opisuje warunek konieczny i dostateczny, jaki musi spełniać to pole, by na rozmaitości istniała koneksja charakterystyczna zgodna z tak zadaną strukturą. Ponadto, pokazana jest jej jednoznaczność (dowód korzysta z twierdzenia 1.4). Kolejna część drugiego rozdziału zawiera klasyfikację trójwymiarowych, jednorodnych $SO(2)$-geometrii charakterystycznych. Twierdzenie 2.2 podsumowuje dokonaną klasyfikację. Trzecia część drugiego rozdziału zawiera konstrukcję oraz klasyfikację wszystkich niejednorodnych $SO(2)$-geometrii charakterystycznych w wymiarze 3. Okazuje się, że każda taka geometria jest lokalnie izomorficzna z przestrzenią totalną jakiejś $SO(2)$-wiązki głównej nad powierzchnią riemannowską (tw. 2.3).

Celem rozdziału trzeciego jest zbadanie $SO(2)$-geometrii charakterystycznych na czterowymiarowych rozmaitościach. Zanurzenia grupy $SO(2)$ w $SO(4)$ klasyfikowane są poprzez pary względnie pierwszych liczb całkowitych (k, l). Parametryzują one również rodzaje $SO(2)$-struktur na czterowymiarowych rozmaitościach. Twierdzenie 3.2 opisuje topologiczne warunki konieczne i dostateczne na to, by na czterowymiarowej rozmaitości istniała $SO(2)$-struktura dowolnego rodzaju. W drugiej części rozdziału dokonana jest, analogiczna do tej w rozdziale drugim, analiza wszystkich możliwych jednorodnych $SO(2)$-geometrii charakterystycznych w wymiarze 4. Twierdzenie 3.3 klasyfikuje wszystkie takie przestrzenie.

Rozdział czwarty zawiera dwa twierdzenia, które udało się sformułować na temat wyżej wymiarowych rozmaitości z $SO(2)$-geometrią charakterystyczną. Pierwsze z nich (4.1) mówi o jednoznaczności istnienia $SO(2)$-koneksji charakterystycznej. Drugie z nich (4.2) zawiera konstrukcję niejednorodnych $SO(2)$-geometrii charakterystycznych w dowolnym wymiarze, dla kanonicznego włożenia $SO(2) \subseteq SO(n)$. Jest to uogólnienie konstrukcji zawartej w części 2.2.

1. Wiązki główne, koneksje, geometrie jednorodne i geometrie charakterystyczne

1.1. Oznaczenia

Niech H będzie grupą Liego, a ξ wiązką główną nad rozmaitością M z H jako grupą strukturalną. Przestrzeń totalną wiązki ξ będę oznaczać symbolem $E(\xi)$, jej bazę symbolem $B(\xi)$, a cięcia tej wiązki symbolem $\Gamma(\xi)$. Jeżeli dane jest działanie grupy H na rozmaitości X, to przez $\xi[X]$ będę oznaczał wiązkę ze standardowym włóknem X, odpowiadającą wiązce ξ, czyli wiązkę $E(\xi) \times_H X \longrightarrow B(\xi)$.

Grupa H działa z prawej strony na przestrzeni totalnej $E(\xi)$ wiązki ξ, tym samym wyznaczając homomorfizm algebry Liego $\mathfrak{h}$ grupy H w algebrę pól wektorowych na $E(\xi)$. Pole będące obrazem elementu $X \in \mathfrak{h}$ oznaczać będziemy symbolem $X^\dagger$. Jest to tak zwane *fundamentalne wertykalne pole wektorowe* odpowiadające wektorowi X.

Załóżmy, że dany jest homomorfizm ϕ grupy H w inną grupę G. Homomorfizm ten indukuje przekształcenie $\hat{\phi}$ wiązki ξ w G-wiązkę główną $\tilde{\xi} = \xi[G]$. W tej sytuacji mówimy, że morfizm $\hat{\phi}\colon \xi \to \tilde{\xi}$ wyznacza *H-strukturę* w wiązce $\tilde{\xi}$ lub *redukcję grupy strukturalnej* wiązki $\tilde{\xi}$ do grupy H. Gdy ϕ jest włożeniem, to $\hat{\phi}$ też jest włożeniem. Wówczas redukcja grupy strukturalnej do H jest tym samym, co cięcie wiązki $\tilde{\xi}[G/H]$.

Przez koneksję na wiązce głównej ξ rozumiem dystrybucję horyzontalną Γ na przestrzeni $E(\xi)$, która jest niezmiennicza ze względu na prawostronne działanie H na $E(\xi)$. Dystrybucja horyzontalna wyznacza rzut wzdłuż dystrybucji wertykalnej, który będziemy oznaczać symbolem h. Jest to homomorfizm (projekcja) wiązki $TE(\xi)$ w jej podwiązkę Γ. Za jego pomocą, określony jest operator różniczki kowariantnej D,

$$D\colon \Omega^k(E(\xi)) \to \Omega^{k+1}(E(\xi))$$
$$D\alpha(V_1, \dots, V_{k+1}) = (d\alpha \circ h)(V_1, \dots, V_{k+1}) := d\alpha(hV_1, \dots, hV_{k+1}).$$

Forma koneksji Γ jest to forma $\omega \in \Omega^1(E(\xi)) \otimes \mathfrak{h}$ o wartościach w algebrze Liego grupy H, która wektorowi $V \in TE(\xi)$ przyporządkowuje taki element $X \in \mathfrak{h}$, że $X^\dagger$ jest cześcią wertykalną wektora V. Forma krzywizny koneksji Γ jest to forma $\Omega \in \Omega^2(M) \otimes \mathfrak{g}$,

$$\Omega = D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Koneksja Γ na wiązce ξ indukuje koneksję $\tilde{\Gamma}$ na wiązce $\tilde{\xi} = \xi[G]$, poprzez prawostronne przesunięcia R_g działania grupy G na $\tilde{\xi}$. Odwrotnie, gdy dana koneksja $\tilde{\Gamma}$ na wiązce $\tilde{\xi}$ pochodzi w ten sposób od pewnej koneksji Γ na wiązce ξ, to mówimy, że istnieje *redukcja koneksji* $\tilde{\Gamma}$ do koneksji Γ na ξ.

Jeżeli mówimy o koneksji liniowej na wiązce stycznej do rozmaitości M, to będziemy często myśleć o niej jak o operatorze pochodnej kowariantnej $\nabla\colon \Gamma(TM) \to \Gamma(T^*M \otimes TM)$. Operator ten spełnia regułę Leibniza:

$$\nabla(f \cdot V) = df \otimes V + f \cdot \nabla V,$$

dla $f \in C^\infty(M)$ oraz $V \in \Gamma(TM)$.

Na wiązce baz $\lambda\colon L(M) \to M$ wiązki stycznej do rozmaitości M dana jest pewna szczególna forma $\theta \in \Omega^1(L(M)) \otimes \mathbb{R}^n$, którą będziemy nazywać formą *tautologiczną* (w języku angielskim używa się terminu *soldering form*, co dosłownie znaczy „forma spawająca”). Forma ta, wektorowi X stycznemu do $L(M)$ w punkcie u, przyporządkowuje współrzędne wektora $\lambda_* X$ w bazie wyznaczonej przez u. Forma torsji koneksji o formie ω wyraża się wzorem $\Theta = D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta$.

Niech τ oznacza trywialną reprezentację grupy $SO(2)$ w jednowymiarowej przestrzeni rzeczywistej $\mathbb{R}$, oraz niech σ oznacza kanoniczną jednowymiarową reprezentację grupy $U(1)$ w przestrzeni $\mathbb{C}$. Wówczas niech σ^k będzie k-tą potęgą tensorową tej zespolonej reprezentacji; jest to również jednowymiarowa reprezentacja zespolona. Reprezentację $\sigma^{i_1} \oplus \sigma^{i_2} \oplus \ldots \oplus \sigma^{i_k}$ na przestrzeni $\mathbb{C}^k$ będziemy również traktowali jako rzeczywistą $2k$-wymiarową reprezentację i oznaczali dla uproszczenia $\sigma^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. Reprezentację tę można traktować jako homomorfizm grupy $SO(2)$ w grupę $SO(2k)$. Obraz tego homomorfizmu oznaczmy przez $\mathcal{S}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. Podobnie, reprezentację $\sigma^{i_1} \oplus \sigma^{i_2} \oplus \ldots \oplus \sigma^{i_k} \oplus \tau$ na $2k+1$ wymiarowej przestrzeni rzeczywistej będziemy oznaczać symbolem $\sigma^{i_1,i_2,\ldots,i_k,\bullet}$, a obraz homomorfizmu grupy $SO(2)$ w $SO(2k+1)$ przez nią wyznaczonego oznaczmy przez $\mathcal{S}_{i_1,i_2,\ldots,i_k,\bullet}$.

Zauważmy, że gdy liczby $i_1, i_2, \ldots, i_k$ są względnie pierwsze, to homomorfizmy $\sigma^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ oraz $\sigma^{i_1,i_2,\ldots,i_k,\bullet}$ są monomorfizmami, więc grupy $\mathcal{S}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ oraz $\mathcal{S}_{i_1,i_2,\ldots,i_k,\bullet}$ są izomorficzne z grupą $SO(2) = U(1)$.

Każde zanurzenie grupy $SO(2)$ w grupę $SO(n)$ jest sprzężone z pewnym zanurzeniem $\sigma^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ lub $\sigma^{i_1,i_2,\ldots,i_k,\bullet}$ dla względnie pierwszych liczb $i_1, \ldots, i_k$.

Niech M będzie n-wymiarową, zorientowaną rozmaitością riemannowską. Z tą rozmaitością związana jest jej wiązka baz ortonormalnych i zorientowanych ξ. Jest to $SO(n)$-wiązka główna. Redukcja grupy strukturalnej do podgrupy $G \subseteq SO(n)$ jest tym samym, co cięcie wiązki $\xi[SO(n)/G] = \xi/G$ z włóknem standardowym $SO(n)/G$. Interesują nas redukcje do podgrup $SO(n)$ izomorficznych z $SO(2)$. A zatem, wystarczy się ograniczyć do podgrup postaci $\mathcal{S}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ lub $\mathcal{S}_{i_1,i_2,\ldots,i_k,\bullet}$.

1.2. Odpowiedniość między formami na wiązce głównej oraz formami na wiązce stycznej

Definicja. Niech ξ będzie G-wiązką główną nad M oraz niech ρ będzie reprezentacją grupy G na przestrzeni wektorowej V.

Formę $\alpha \in \Omega^k(E(\xi)) \otimes V$ na wiązce głównej ξ o wartościach w V nazywamy *tensorialną typu* (ρ, V), gdy spełnione są następujące warunki:

i) α jest *horyzontalna*, tzn. $\alpha(X_1, \ldots, X_k) = 0$ gdy którykolwiek z wektorów $X_1, \ldots, X_k$ jest wertykalny,

ii) α jest *pseudotensorialna typu* (ρ, V), tzn. $R_g^* \alpha = \rho(g^{-1})\alpha$ dla $g \in G$.

Przykład 1. Jeżeli $\breve{\alpha} \in \Omega^k(M) \otimes V$ jest formą na M o wartościach w przestrzeni V, to forma α określona na wiązce ξ wzorem

$$\alpha_{(u)}(X_1, \ldots, X_k) = \breve{\alpha}(\xi_* X_1, \ldots, \xi_* X_k)$$

jest formą tensorialną typu $(\mathbb{1}, V)$, gdzie $\mathbb{1}$ oznacza trywialną reprezentację grupy G na V.

Przykład 2. Forma koneksji ω na wiązce głównej jest formą pseudotensorialną, ale nie jest formą tensorialną, bo nie jest horyzontalna. Wręcz przeciwnie, jest wertykalna w tym sensie, że $\omega(X) = 0$ o ile X jest polem horyzontalnym. Jednak jeżeli ω i ω' są dwiema formami koneksji, to $\omega - \omega'$ już jest formą horyzontalną, więc tensorialną.

Przykład 3. Niech $\tilde{\xi}$ będzie G-wiązką główną nad rozmaitością M, oraz ξ jej H-podwiązką główną wraz z włożeniem $\iota\colon \xi \hookrightarrow \tilde{\xi}$. Załóżmy, że α jest tensorialną formą typu (ρ, V) na $\tilde{\xi}$. Wówczas $\iota^*\alpha$ jest tensorialną formą typu $(\rho|_H, V)$ na ξ. Istotnie, z założenia, że ξ jest podwiązką wiązki $\tilde{\xi}$ wynika, że ι komutuje z R_h dla $h \in H$. Stąd wynika, że $R_h^*\iota^*\alpha = \iota^* R_h^*\alpha = \iota^* Ad(h^{-1})\alpha = Ad(h^{-1})\iota^*\alpha$. Horyzontalność formy $\iota^*\alpha$ jest oczywista.

Załóżmy teraz, że $\iota^*\alpha = 0$. Dla $u \in E(\xi)$, każdy wektor $\tilde{X}$ styczny do $E(\tilde{\xi})$ jest sumą wektora X stycznego do $E(\xi)$ oraz wektora wertykalnego V. A zatem, $\alpha_{(u)}(\tilde{X}) = \alpha_{(u)}(X + V) = \iota^*\alpha_{(u)}(X) + \alpha(u)(V) = 0$. Tak więc, $\alpha = 0$ na zbiorze $E(\xi) \subseteq E(\tilde{\xi})$. Z pseudotensorialności wynika teraz, że $\alpha = 0$ na całym $E(\tilde{\xi})$. Pokazuje to, że przekształcenie ι^*, które formom tensorialnym na wiązce $\tilde{\xi} = \xi[G]$ przyporządkowuje ich redukcje do wiązki ξ, jest monomorfizmem.

Przykład 4. Niech $\lambda\colon L(M) \to M$ będzie wiązką reperów wiązki stycznej do M. Jeżeli $\Phi \in End(TM) \simeq \Gamma(T^*M \otimes TM)$ jest endomorfizmem wiązki stycznej, to określmy formę α na wiązce ξ wzorem $\alpha_{(u)}(X) = u^{-1}(\Phi(\xi_* X))$, gdzie $u \in L(M)$ jest traktowane jako izomorfizm $u\colon \mathbb{R}^n \to T_xM$. Wtedy α jest formą tensorialną typu $(\sigma, \mathbb{R}^n)$, gdzie σ jest zwykłą reprezentacją grupy $GL(\mathbb{R}^n)$ na przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Tensorialną formę odpowiadającą morfizmowi identycznościowemu wiązki TM nazywamy *formą tautologiczną* i oznaczamy symbolem θ.

Uogólniając powyższy przykład, można nietrudno wykazać następujący

Fakt. *Formy tensorialne typu (ρ, V) stopnia k na wiązce ξ tworzą wiązkę wektorową izomorficzną z przestrzenią $\Gamma(\Lambda^k(T^*M) \otimes \xi_\rho[V])$.* ■

1.3. Kanoniczna koneksja niezmiennicza na przestrzeni jednorodnej

Załóżmy, że H jest domkniętą podgrupą grupy G. Niech dla $g \in G$, ϕ_g oznacza automorfizm wewnętrzny grupy G wyznaczony przez g, tzn. $\phi_g(a) = g\ a\ g^{-1}$. Wówczas $\phi_g(e) = e$, więc różniczka $Ad(g)$ przekształcenia ϕ_g w punkcie e wyznacza automorfizm przestrzeni $T_eG = \mathfrak{g}$ (jest to również automorfizm algebry Liego). Tak więc, otrzymujemy reprezentację grupy G na przestrzeni $\mathfrak{g}$, którą nazywamy *reprezentacją dołączoną* i oznaczamy Ad_G.

Jeżeli H jest podgrupą grupy G, to przez Ad_H będziemy oznaczać, niecałkiem zgodnie z powyższą notacją, reprezentację Ad_G na $\mathfrak{g}$ obciętą do grupy H.

Przestrzeń jednorodna $M = G/H$ jest *reduktywna*, jeżeli algebra Liego $\mathfrak{g}$ grupy G ma wyznaczony Ad_H-niezmienniczy rozkład na sumę prostą $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Tak jest na przykład wtedy, gdy H jest zwartą grupą, gdyż wtedy na $\mathfrak{g}$ mamy Ad_H-niezmienniczy iloczyn skalarny i możemy przyjąć $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$. Jeśli przestrzeń M jest rozmaitością riemannowską oraz grupa G działa przez izometrie na M, to stabilizator H jest grupą zwartą, jako podgrupa domknięta grupy $SO(n)$, więc $M = G/H$ jest przestrzenią reduktywną.

Gdy G/H jest reduktywna, to reprezentacja dołączona Ad_H na $\mathfrak{g}$ jest sumą dwóch reprezentacji, na $\mathfrak{h}$ oraz na $\mathfrak{m}$. Ponadto, różniczkując zależność $Ad_H\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ dostajemy, że $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$.

Gdy dany jest rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, każdy wektor $X \in \mathfrak{g}$ możemy zapisać jednoznacznie jako $X = X_\mathfrak{h} + X_\mathfrak{m}$, gdzie $X_\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}$ oraz $X_\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}$. Niech $\pi_\mathfrak{h}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ oraz $\pi_\mathfrak{m}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ będą rzutami przestrzeni $\mathfrak{g}$ na odpowiednie podprzestrzenie. Dla formy α o wartościach w $\mathfrak{g}$, formę $\pi_{\mathfrak{h}}\alpha$ o wartościach w $\mathfrak{h}$ oznaczmy przez $\alpha_{\mathfrak{h}}$, a formę $\pi_{\mathfrak{m}}\alpha$ o wartościach w $\mathfrak{m}$ oznaczmy przez $\alpha_{\mathfrak{m}}$.

Przekształcenie ilorazowe $\zeta\colon G \to G/H$ jest w istocie H-wiązką główną nad przestrzenią jednorodną G/H. Wiązkę tę oznaczamy przez $G(G/H, H)$. Grupa G działa z lewej strony na $E(\zeta) = G$ w oczywisty sposób.

Niech P będzie G-niezmienniczą S-strukturą na reduktywnej przestrzeni jednorodnej $M = G/H$ z rozkładem $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Niech $\lambda\colon H \to S$ oznacza reprezentację izotropii a $\tilde{\lambda}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{s}$ indukowany przez nią homomomorfizm algebr Liego, Ad_h oznacza reprezentację dołączoną elementu $h \in H$ w $\mathfrak{s}$ a $Ad_{\lambda(h)}$ reprezentację dołączoną elementu $\lambda(h) \in S$ w $\mathfrak{s}$. Ustalmy element $u_o \in P_o$ włókna wiązki P nad $o \in M$, $u_o\colon \mathbb{R}^m \to T_oM$.

Twierdzenie 1.1. *Jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między zbiorem G-niezmienniczych koneksji na wiązce P a zbiorem liniowych przekształceń $\Lambda\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{s}$ takich, że*

$$\Lambda(Ad_h X) = Ad_{\lambda(h)}(\Lambda X) \qquad \text{dla } h \in H \text{ oraz } X \in \mathfrak{m}.$$

Odpowiedniość ta dana jest przez przyporządkowanie G-niezmienniczej koneksji o formie ω przekształcenia Λ zadanego wzorem

$$\Lambda(X) = \omega_{u_o}(\tilde{X}) \qquad \text{dla } X \in \mathfrak{m},$$

gdzie $\tilde{X}$ jest polem na P indukowanym przez $X \in \mathfrak{m}$.

Przy utożsamieniu $\mathfrak{m} \simeq \mathbb{R}^m \simeq T_oM$, tensory torsji oraz krzywizny w punkcie $o \in M$ dane są wzorami:

$$\begin{aligned} T_o(X,Y) &= \Lambda(X)\cdot Y - \Lambda(Y)\cdot X - [X,Y]_{\mathfrak{m}} \\ R_o(X,Y) &= [\Lambda X, \Lambda Y] - \Lambda([X,Y]_{\mathfrak{m}}) - \tilde{\lambda}([X,Y]_{\mathfrak{h}}), \end{aligned}$$

dla $X, Y \in \mathfrak{m}$, gdzie znak $\cdot$ w powyższym wyrażeniu oznacza działanie $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ na $\mathfrak{m}$.

Dowód Dowód znajduje się w w [KN69] (Twierdzenie 1.4, Rozdział X). ■

Następujące stwierdzenie pokazuje, że w niektórych przypadkach można bez straty ogólności rozpatrywać wyłącznie trywialne przekształcenia Λ, za to modyfikując rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$.

Stwierdzenie 1.2. *Załóżmy, że, w powyższej sytuacji, przekształcenie algebr Liego $\tilde{\lambda}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{s}$ indukowane przez reprezentację izotropii jest izomorfizmem. Wtedy, dla dowolnej G-niezmienniczej koneksji Γ na P, istnieje taki Ad_H-niezmienniczy rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{m}}$, przy którym przekształcenie Λ, odpowiadające koneksji Γ w sposób opisany powyżej, jest zerowe.*

Dowód Reprezentacja izotropii $\lambda\colon H \to S$ indukuje morfizm G-ekwiwariantny $\hat{\lambda}\colon G \to P$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, hook] & S \arrow[d, hook] \\ G \arrow[r, "\hat{\lambda}"] \arrow[dr, two heads] & P \arrow[d, two heads] \\ & G/H \end{tikzcd}$$

H-wiązki głównej $G(G/H, H)$ w S-wiązkę główną P. Przy powyższym założeniu, przekształcenie $\hat{\lambda}$ wyznacza izomorfizm przestrzeni stycznych w każdym punkcie przestrzeni G. A zatem, za pomocą $\hat{\lambda}$, możemy przeciągnąć na G przestrzenie horyzontalne koneksji Γ określone na wiązce P, otrzymując G-niezmienniczą koneksję $\tilde{\Gamma}$ na wiązce $G(G, G/H)$. Przestrzeń horyzontalna $\tilde{\mathfrak{m}}$ tej koneksji w punkcie $e \in G$ zadaje szukany Ad_H-niezmienniczy rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{m}}$. ■

Poniższe twierdzenie mówi o tym, że przy badaniu przestrzeni jednorodnych, iloraz postaci G/H można „skrócić" przez dzielnik normalny N grupy G zawarty w H i rozpatrywać zamiast tego przestrzeń $G'/H' = (G/N)/(H/N)$, przy czym, jeżeli wiemy, że na przestrzeni tej istnieje G-niezmiennicza K-struktura, to wspólny dzielnik N jest dużego wymiaru.

Twierdzenie 1.3. *Załóżmy, że G/H jest przestrzenią jednorodną. Wówczas istnieje jedyna maksymalna podgrupa N w H, która jest normalna w G. Ponadto, jest ona podgrupą Liego grupy G oraz istnieje G-ekwiwariantny dyfeomorfizm przestrzeni $(G/N)/(H/N)$ w przestrzeń G/H.*

Jeżeli G/H jest spójną, reduktywną przestrzenią jednorodną z rozkładem $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, oraz na na wiązce stycznej do G/H dana jest G-niezmienniczą K-struktura poprzez reprezentację ρ grupy K na $\mathfrak{m}$, to $dim(H/N) \leq dim(K)$, a dokładniej, $dim(H/N) \leq dim(im\ \tau)$, gdzie $\tau \colon H \to GL(T_o(G/H))$ jest reprezentacją izotropii grupy H.

Dowód Niech N będzie grupą generowaną przez wszystkie podgrupy normalne w G, zawarte w H. Wtedy N również jest normalną podgrupą w G zawartą w H. A zatem N jest maksymalną podgrupą o tych własnościach, a ponieważ domknięcie N też je posiada, więc N musi być domknięta. Na mocy twierdzenia Kuranishi i Yamabe, N jest podgrupą Liego grupy G. Naturalne przekształcenie przestrzeni G/H w przestrzeń $(G/N)/(H/N)$ jest G-ekwiwariantnym dyfeomorfizmem.

Niech $\tilde{K} = \rho(K)$ oraz $\tau \colon H \to GL(T_o(G/H))$ będzie reprezentacją izotropii grupy H. Z założenia, że dana K-struktura jest G-niezmiennicza wynika, że obraz τ leży w $\tilde{K}$. Niech $L = ker\ \tau$. Wówczas $[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}] = 0$, a ponieważ L jest normalna w H, więc $[\mathfrak{l}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{l}$. Tak więc, $[\mathfrak{l}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{l}$,więc $\mathfrak{l}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$. A zatem składowa jedności grupy L jest normalną podgrupą grupy G, zawartą w H, więc $dim\ N \geq dim\ L = dim\ H - dim(im\ \tau)$. Stąd, $dim\ H/N = dim\ H - dimN \leq \dim(im\ \tau) \leq dim\ \tilde{K} \leq dim\ K$. ■

Wniosek. Gdy na przestrzeni jednorodnej M dana jest niezmiennicza $SO(2)$-struktura, to możemy założyć, że $M = G/H$ gdzie $dim\ H = 1$ oraz reprezentacja izotropii jest nietrywialna, albo że $dim\ H = 0$, czyli M jest grupą.

1.4. Geometrie charakterystyczne

Definicja. Niech (M, g) będzie gładką rozmaitością riemannowską. Metryczną koneksję ∇ na rozmaitości M nazywamy *koneksją charakterystyczną*, jeżeli jej tensor torsji T_∇ jest całkowicie antysymetryczny, to znaczy:

$$g(T_\nabla(X, Y), Z) = -g(T_\nabla(X, Z), Y)$$

dla dowolnych pól wektorowych X, Y, Z na M. Trójkę (M, g, ∇) nazwiemy wówczas *geometrią charakterystyczną*. Jeżeli na M zadana jest pewna G-struktura, gdzie $G \subseteq O(n)$, oraz koneksja charakterystyczna ∇ jest zgodna z tą strukturą, to powiemy że jest to *G-koneksja charakterystyczna*, która wyznacza *G-geometrię charakterystyczną* na M.

Niech $\overset{LC}{\nabla}$ oznacza koneksję Levi-Civity, oraz niech ∇ będzie dowolną koneksją na rozmaitości M. Niech tensor $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ spełnia równość

$$\nabla_X Y = \overset{LC}{\nabla}_X Y - \frac{1}{2}\alpha(Y, X). \tag{1}$$

Dla danej koneksji ∇ oraz pól X, Y, Z stycznych do M, tensor ∇g określony jest wzorem:

$$(\nabla g)(X, Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

Ponieważ $\overset{LC}{\nabla} g = 0$, więc

$$(\nabla g)(X, Y, Z) = \frac{1}{2}(g(\alpha(Y, X), Z) + g(\alpha(Z, X), Y)),$$

więc

$$\nabla g = S^{1,3}\alpha, \tag{2}$$

gdzie $S^{1,3}$ jest operatorem symetryzacji ze względu na pierwszy i trzeci argument tensora α. Koneksja jest metryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\nabla g = 0$, czyli gdy tensor α jest antysymetryczny w pierwszym i trzecim argumencie.

Jeżeli przez T_∇ oznaczymy torsję koneksji ∇, to znaczy

$$T_\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

to wówczas

$$T_\nabla = \Lambda^{1,2}\alpha, \tag{3}$$

gdzie $\Lambda^{1,2}\alpha$ oznacza antysymetryzację ze względu na pierwsze dwa pierwsze argumenty tensora α.

Następujące twierdzenie daje różne opisy koneksji charakterystycznej:

Twierdzenie 1.4. *Niech (M, g) będzie rozmaitością riemannowską, oraz niech ∇ będzie koneksją metryczną na M i niech $\alpha(Y, X) = 2(\overset{LC}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y)$. Wówczas równoważne są warunki:*

- *i)* ∇ *jest koneksją charakterystyczną,*
- *ii) tensor α jest całkowicie antysymetryczny,*
- *iii)* $T_\nabla = \alpha$,
- *iv) geodezyjne koneksji ∇ pokrywają się z geodezyjnymi Levi-Civity na M.*

Dowód Na mocy (2), metryczność koneksji ∇ jest równoważna warunkowi $S^{1,3}\alpha = 0$, lub równoważnie

$$\Lambda^{1,3}\alpha = \alpha. \tag{4}$$

Przeformułujmy również warunki *i)-iv)* natępująco:

i') $\Lambda^{1,2,3}\alpha = \Lambda^{1,2}\alpha$

ii') $\Lambda^{1,2,3}\alpha = \alpha$

iii') $\Lambda^{1,2}\alpha = \alpha$

iv') $\alpha(X, X) = 0$ dla dowolnego $X \in TM$.

Z definicji koneksji charakterystycznej oraz wzoru (3) wynika, że warunek *i)* można zapisać tak:

$$\Lambda^{1,2,3}\Lambda^{1,2}\alpha = \Lambda^{1,2}\alpha,$$

gdzie $\Lambda^{1,2,3}$ oznacza antysymetryzację ze względu na wszystkie trzy argumenty tensora. Ponieważ $\Lambda^{1,2,3} \circ \Lambda^{1,2} = \Lambda^{1,2,3}$, to widzimy, że warunki *i)* oraz *i')* są równoważne.

Warunek *ii)* jest wyrażeniem warunku *ii')* za pomocą słów, a warunek *iii)*, na mocy (3), można zapisać w postaci warunku *iii')*.

Natomiast warunek *iv)* oznacza, że dla każdej gładkiej krzywej $\gamma\colon I \to M$,

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \equiv 0 \Leftrightarrow \overset{LC}{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma \equiv 0.$$

A zatem, na mocy (1),

$$\overset{LC}{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma \equiv 0 \Rightarrow \alpha(\dot\gamma, \dot\gamma) \equiv 0.$$

Ponieważ dla dowolnego wektora $X \in TM$ istnieje geodezyjna γ Levi-Civity wychodząca w kierunku X, zatem

$$\alpha(X, X) = 0$$

dla dowolnego $X \in TM$. Odwrotnie, jeżeli $\alpha(X, X) = 0$ dla dowolnego $X \in TM$, to

$$\overset{LC}{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma.$$

Tak więc, istotnie warunki *iv)* oraz *iv')* są sobie równoważne.

Oczywiście $\alpha(X, X) = 0$ dla dowolnego $X \in TM$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest antysymetryczny w pierwszym i drugim argumencie, czyli gdy $\Lambda^{1,2}\alpha = \alpha$. Dowodzi to równoważności warunków *iii')* oraz *iv')*.

Ponieważ tensor α jest całkowicie antysymetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest antysymetryczny ze względu na pierwszy i drugi argument, oraz ze względu na pierwszy i trzeci argument, to warunki *ii')* oraz *iii')* są równoważne, przy założeniu równości (4). Co więcej, widać też że implikują one równość *i')*.

Pozostaje zatem wykazać, że równości *i')* oraz (4) implikują warunek *iv')*. Dla wygody, będziemy teraz traktować tensor α jako tensor trzykrotnie kontrawarianty. Załóżmy, że zachodzi *i')*. Niech X, Y będą polami wektorów stycznych do M. Wówczas,

$$\Lambda^{1,2}\alpha(Y, X, X) = 0,$$

czyli

$$\alpha(Y, X, X) = \alpha(X, Y, X).$$

Na mocy (4), lewa strona powyższej równości jest równa $-\alpha(X, X, Y)$, a prawa strona równości jest równa 0. Kończy to dowód implikacji *i')⇒iv')*.

Tym samym pokazaliśmy równoważność warunków *i')-iv')*, a co za tym idzie, także *i)-iv)*.
■

Wniosek. Przyporządkowanie $\alpha \mapsto \overset{LC}{\nabla} - \frac{1}{2}\alpha$ zadaje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między elementami $\Omega^3(M)$ a koneksjami charakterystycznymi na rozmaitości riemannowskiej M. Odwzorowanie odwrotne dane jest przez $\nabla \mapsto T_\nabla$.

2. Trójwymiarowe $SO(2)$-geometrie charakterystyczne

Zajmiemy się trójwymiarowymi rozmaitościami, na których zadana jest pewna $SO(2)$-struktura oraz zgodna z nią koneksja, o całkowicie antysymetrycznej torsji. Ponieważ wszystkie zanurzenia grupy $SO(2)$ w $SO(3)$ są sprzężone z zanurzeniem $\sigma^{1,\bullet}$, więc możemy bez straty ogólności ograniczyć się do struktur zadanych przez grupę $\mathcal{S}_{1,\bullet}$. Jest to dokładnie grupa tych przekształceń przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$, które zachowują orientację, standardowy iloczyn skalarny, oraz wektor e_3 standardowej bazy $\mathbb{R}^3$. Wynika stąd, że zadanie takiej struktury na trójwymiarowej rozmaitości M jest równoważne wyborowi jej orientacji $\circlearrowleft$, metryki g oraz pola wektorów V długości 1. Wówczas wiązka główna wyznaczająca $SO(2)$-strukturę jest to podwiązka wiązki reperów, składająca się z zorientowanych baz postaci (X_1, X_2, V).

Definicja. Przez $SO(2)$-stukturę na trójwymiarowej rozmaitości M będziemy rozumieli trójkę $(\circlearrowleft, g, V)$, gdzie $\circlearrowleft$ jest orientacją, g jest metryką oraz V jest unormowanym polem wektorów stycznych do M. Taką strukturę będziemy oznaczać $(M, \circlearrowleft, g, V)$.

Będziemy mówić, że lokalna baza pól wektorowych (e_1, e_2, e_3) na M jest *zgodna* ze strukturą $(M, \circlearrowleft, g, V)$, jeśli tworzą one bazę zorientowaną i ortonormalną, oraz $e_3 = V$.

Wiązka styczna każdej orientowalnej, trójwymiarowej rozmaitości M jest trywialna (zob. [MS74]) . A zatem istnieją na niej trzy globalnie określone, w każdym punkcie liniowo niezależne, pola wektorowe e_1, e_2, e_3. Wyznaczają one pewną metrykę g oraz orientację $\circlearrowleft$, więc na dowolnej trójwymiarowej rozmaitości M istnieje pewna $SO(2)$-struktura $(M, \circlearrowleft, g, V)$.

Niech $(M, \circlearrowleft, g, V, \nabla)$ będzie $SO(2)$-geometrią charakterystyczną. Koneksja charakterystyczna ∇ wyznacza (jednoznacznie, jak wynika z tw. 1.4) trójformę T_∇, ktorej z kolei odpowiada pewna funkcja określona na M poprzez izomorfizm Hodge'a $* : \Omega^3(M) \simeq C^\infty(M)$. Funkcję tę będziemy nazywali *funkcją torsji* danej geometrii charakterystycznej na trójwymiarowej rozmaitości.

Wybierzmy wektor bazowy standardowej dwuwymiarowej reprezentacji algebry $\mathfrak{so}(2)$, wyznaczony przez macierz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reprezentacja $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3$ indukuje reprezentację na $\Lambda^2(\mathbb{R}^3) \overset{*}{\simeq} \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ i rozkład tej ostatniej przestrzeni na nieprzywiedlne reprezentacje to

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R} \cdot (e_3)_\flat \oplus (e_3)^\perp,$$

gdzie $e_3^\perp$ to są te jednoformy, które znikają na wektorze e_3.

Rozkład ten indukuje kanoniczny przedstawienie dwuformy krzywizny $\Omega \in \Omega^2(M) \otimes \mathfrak{so}(2)$ w postaci

$$\Omega = \Big(R_1 \ * V_\flat + R_2 \wedge V_\flat\Big) \otimes J, \tag{2.1}$$

gdzie $V_\flat = g(V, \cdot)$ jest formą dualną do pola V względem metryki g, $R_1 \in C^\infty(M)$, oraz $R_2 \in \Omega^1(M)$ jest formą ortogonalną do $V_\flat$.

Poniższe twierdzenie podaje warunki konieczne i dostateczne na istnienie $SO(2)$-koneksji charakterystycznej na 3-rozmaitości $(M, \circlearrowleft, g, V)$.

Twierdzenie 2.1. *Niech $(M, \circlearrowleft, g, V)$ będzie trójwymiarową $SO(2)$-strukturą. Wówczas $SO(2)$-koneksja charakterystyczna istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy pole V jest geodezyjne i tensor $\overset{LC}{\nabla} V$ jest antysymetryczny. Ponadto, taka koneksja wyznaczona jest jednoznacznie.*

Dowód Załóżmy, że ∇ jest koneksją charakterystyczną, oraz że $\alpha = 2(\overset{LC}{\nabla} - \nabla)$. Na mocy tw. 1.4, α jest tensorem całkowicie antysymetrycznym. Wówczas koneksja ta jest zgodna ze strukturą $(M, \circlearrowleft, g, V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nabla V = 0$, czyli gdy $\overset{LC}{\nabla} V = -i_V \alpha$. A więc $\overset{LC}{\nabla} V$ jest endomorfizmem antysymetrycznym oraz $\overset{LC}{\nabla}_V V = 0$.

Z drugiej strony, załóżmy, że pole V jest geodezyjne oraz że endomorfizm $\overset{LC}{\nabla} V$ jest antysymetryczny i odpowiada pewnej dwuformie $\beta \in \Omega^2(M)$. Geodezyjność pola V oznacza, że $\iota_V \beta = 0$. Wtedy forma $\alpha = -V_\flat \wedge \beta$ jest jedyną trójformą taką, że $\beta = -i_V \alpha$, więc koneksja ∇ jest szukaną $SO(2)$-koneksją charakterystyczną. ∎

2.1. Klasyfikacja trójwymiarowych, jednorodnych $SO(2)$-geometrii charakterystycznych

Załóżmy teraz, że $(M, \circlearrowleft, g, V)$ jest trójwymiarową przestrzenią jednorodną. Znaczy to, że na M działa tranzytywnie pewna grupa symetrii G, poprzez dyfeomorfizmy zachowujące wybraną strukturę, a więc izometrie zachowujące orientacje oraz pole V. Załóżmy, że na M istnieje $SO(2)$-koneksja charakterystyczna Γ. Z twierdzenia 4.1 o jednoznaczności wynika, że Γ też musi być G-niezmiennicza. A zatem także tensory torsji oraz krzywizny są G-niezmiennicze, więc funkcja torsji oraz funkcja R_1 są stałe. Dla uproszczenia napisów, niech $-t$ będzie (stałą) funkcją torsji koneksji Γ.

Niech (e_1, e_2, e_3) będzie bazą w punkcie $o \in M$ zgodną z wybraną strukturą. Wówczas, na mocy definicji funkcji torsji $-t$,

$$\begin{aligned} T_o(e_1, e_2) &= -t \cdot e_3 \\ T_o(e_2, e_3) &= -t \cdot e_1 \\ T_o(e_3, e_1) &= -t \cdot e_2 \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Jeżeli przez H oznaczymy grupę izotropii wybranego punktu $o \in M$, to $M = G/H$, oraz przestrzeń jednorodna G/H jest reduktywna. Na mocy wniosku z twierdzenia 1.3, możemy założyć, że grupa G symetrii M jest taka, że $dim H = 1$ i reprezentacja $H \to SO(2)$ izotropii jest nietrywialna, lub że $dim H = 0$, czyli że $M = G$ jest grupą.

2.1.1. Nietrywialna grupa izotropii

W tym przypadku, $M = G/H$, gdzie H jest jednowymiarową domkniętą podgrupą grupy M, oraz reprezentacja izotropii $H \to SO(2)$ jest nietrywialna. Niech na M dana będzie koneksja Γ zgodna z daną $SO(2)$-strukturą. Na mocy stwierdzenia 1.2, istnieje taki rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, że przekształcenie $\Lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ odpowiadające koneksji Γ jest zerowe. Wówczas, na mocy twierdzenia 1.1, formy torsji i koneksji w punkcie $o \in M$ dane są wzorem

$$T_o(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{m}} \tag{T}$$

$$R_o(X, Y) = -\tilde{\lambda}([X, Y]_{\mathfrak{h}}) \qquad dla\ X, Y \in T_o M \simeq \mathfrak{m}. \tag{R}$$

Reprezentacja izotropii λ grupy H na $\mathfrak{m}$ w pewnej ortonormalnej bazie (e_1, e_2, e_3) jest postaci $\sigma^{k,\bullet}$ dla pewnej niezerowej liczby całkowitej k. Wówczas istnieje wektor h rozpinający jednowymiarową przestrzeń $\mathfrak{h}$, dla którego spełnione są zależności:

$$\begin{aligned} [h, e_1] &= -e_2, \\ [h, e_2] &= e_1, \\ [h, e_3] &= 0. \end{aligned}$$

Wtedy, z równości ($\star$) oraz (T), wnioskujemy, że istnieją liczby α, β, γ takie, że

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= t \cdot e_3 + \alpha \cdot h, \\
[e_2, e_3] &= t \cdot e_1 + \beta \cdot h, \\
[e_3, e_1] &= t \cdot e_2 + \gamma \cdot h.
\end{aligned}$$

Teraz,

$$[h, [e_3, e_1]] = [h, t\ e_2 + \gamma\ h] = t[h, e_2] = t\ e_1,$$

a z drugiej strony, z tożsamości Jakobiego,

$$[h, [e_3, e_1]] = [[h, e_3], e_1] + [e_3, [h, e_1]] = -[e_3, e_2] = [e_2, e_3] = t\ e_1 + \beta\ h.$$

A zatem $\beta = 0$. Analogicznie, $\gamma = 0$.

Podsumowując, nasza algebra $\mathfrak{g}$ rozpięta jest przez wektory h, e_1, e_2, e_3, których komutatory zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned}
[h, e_1] &= -e_2 \\
[h, e_2] &= e_1 \\
[h, e_3] &= 0 \\
[e_1, e_2] &= t \cdot e_3 + \alpha \cdot h \\
[e_2, e_3] &= t \cdot e_1 \\
[e_3, e_1] &= t \cdot e_2.
\end{aligned}$$

Ze wzoru (R) oraz powyższych równości wynika, że rozkład $R = (R_1 \cdot e^1 \wedge e^2 + R_2) \otimes J$ jest taki, że $R_1 = -\alpha$ oraz $R_2 = 0$. Przestrzeń horyzontalna koneksji Γ w punkcie $e \in G$ wiązki $G(G/H, H)$ jest to przestrzeń $\mathfrak{m}$ rozpięta przez wektory e_1, e_2, e_3 algebry liego $\mathfrak{g}$.

Przypadek 1: $t^2 \neq \alpha,\ t \neq 0$.
Załóżmy, że $t^2 \neq \alpha$ oraz $t \neq 0$. Po podstawieniu

$$\begin{aligned}
\tilde{h} &= \tfrac{t}{t^2 - \alpha}(e_3 + t\ h), \\
\tilde{e}_1 &= \mu\ e_1, \\
\tilde{e}_2 &= \mu\ e_2, \\
\tilde{e}_3 &= \tfrac{1}{t^2 - \alpha}(t\ e_3 + \alpha\ h),
\end{aligned}$$

gdzie $\mu^2 \cdot (t^2 - \alpha) = \varepsilon = \pm 1$, mnożenie upraszcza się do następującej postaci:

$$\begin{aligned}
[\tilde{h}, \tilde{e}_1] &= 0 \\
[\tilde{h}, \tilde{e}_2] &= 0 \\
[\tilde{h}, \tilde{e}_3] &= 0 \\
[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] &= \varepsilon\ \tilde{e}_3 \\
[\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] &= \tilde{e}_1 \\
[\tilde{e}_3, \tilde{e}_1] &= \tilde{e}_2.
\end{aligned}$$

Te same równości są spełnione w algebrze $\mathfrak{gl}(5)$ przez elementy

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \tilde{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

które rozpinają podalgebrę $\mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(3)$ gdy $\varepsilon = 1$ oraz podalgebrę $\mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2,1)$ gdy $\varepsilon = -1$. A zatem, za grupę G możemy wziąć grupę $SO(2) \oplus SO(3)$ w przypadku $\varepsilon = 1$ oraz grupę $SO(2) \oplus SO(2,1)$ gdy $\varepsilon = -1$. Podgrupa H odpowiadająca podalgebrze $\mathfrak{h}$ w obydwu przypadkach jest grupą $\mathcal{S}_{1,-1,\bullet} \subseteq SO(2) \oplus SO(2) \oplus \mathbb{1}$.

Przypadek 2: $t^2 = \alpha, t \neq 0$.
Podstawiając $\tilde{e}_3 = te_3 + \alpha h$, dostajemy następujące równości:

$$\begin{array}{rcl} [h, e_1] & = & -e_2 \\ [h, e_2] & = & e_1 \\ [h, \tilde{e}_3] & = & 0 \\ [e_1, e_2] & = & \tilde{e}_3 \\ [e_2, \tilde{e}_3] & = & 0 \\ [\tilde{e}_3, e_1] & = & 0. \end{array}$$

Są one także spełnione przez następujące elementy w $\mathfrak{gl}(5)$:

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oznaczmy przez $G_{1.2}$ podgrupę $GL(5)$, której algebra Liego jest rozpinana przez powyższe macierze. Niech N będzie podgrupą normalną odpowiadającą podalgebrze generowanej przez wektory $e_1, e_2, \tilde{e}_3$. N jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}^3, \cdot)$, gdzie

$$v \cdot w = v + w + \pi_3(v \times w)$$

oraz π_3 jest rzutowaniem na trzecią oś współrzędnych. Grupa N składa się z macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & -y & x & z \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Grupa H generowana przez wektor h jest to grupa izomorficzna z $SO(2)$, składająca się z macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Grupa $G_{1.2}$ składa się z macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & -v^T \cdot J \cdot A & z \\ 0 & A & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

takich, że $v \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}$ oraz $A \in SO(2)$.

A zatem $G_{1.2} = N \rtimes H$, oraz przestrzeń $M = G/H$ jest lokalnie izomorficzna z przestrzenią jednorodną $\mathbb{R}^3 \simeq N$ z działaniem grupy $G_{1.2}$ danym przez $(n\ h)(v) = n \cdot h\ v\ h^{-1}$ dla $n, v \in N, h \in H$.

Przypadek 3: $t = 0, \alpha \neq 0$.
Jest to przypadek graniczny, w którym torsja znika. Algebra Liego $\mathfrak{g}$, podobnie jak w przypadku $t^2 \neq \alpha$, jest izomorficzna z $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(3)$ lub $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(2,1)$, w zależności od tego czy $\alpha < 0$ czy też $\alpha > 0$ (przypadek $\alpha = 0$ rozpatrzę osobno). Weźmy więc za G grupę $\mathbb{R} \oplus SO(3)$, gdy $\alpha < 0$ a $\mathbb{R} \oplus SO(2,1)$, gdy $\alpha > 0$. Tym razem, podgrupa H odpowiadająca algebrze $\mathfrak{h}$ jest to podgrupa $\mathbb{1} \oplus SO(2) \subseteq G$. Przestrzeń jednorodna G/H to $S^2 \times \mathbb{R}$ gdy $\alpha > 0$ oraz $H^2 \times \mathbb{R}$ gdy $\alpha < 0$ (H^2— hiperboloida jednopowłokowa).

Przypadek 4: $t = 0, \alpha = 0$.
Wierna reprezentacja liniowa algebry $\mathfrak{g}$ wygląda w tym przypadku następująco:

$$h \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jest to algebra Liego grupy G izometrii przestrzeni trójwymiarowej zachowujących kierunek pionowy. Podgrupa H odpowiada podgrupie izometrii zachowujących środek układu. Tak więc, przestrzeń jednorodna G/H jest to $\mathbb{R}^3$ z grupą symetrii G.

2.1.2. Trywialna reprezentacja izotropii

W tym przypadku $M = G$ jest grupą Liego. Wówczas, na mocy twierdzenia 1.1, koneksja Γ odpowiada pewnemu przekształceniu $\Lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{so}(2) \subseteq \mathfrak{gl}(3)$, za którego pomocą torsja wyraża się wzorem

$$T_e(X,Y) = \Lambda(X) \cdot Y - \Lambda(Y) \cdot X - [X,Y].$$

Zakładając, że forma torsji jest antysymetryczna (tak, że $T_\flat = -t\ e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$), otrzymujemy stąd następujące równania:

$$\begin{aligned} [e_1,e_2] &= t \cdot e_3 + \Lambda(e_1) \cdot e_2 - \Lambda(e_2) \cdot e_1 \\ [e_2,e_3] &= t \cdot e_1 + \Lambda(e_2) \cdot e_3 - \Lambda(e_3) \cdot e_2 \\ [e_3,e_1] &= t \cdot e_2 + \Lambda(e_3) \cdot e_1 - \Lambda(e_1) \cdot e_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Będziemy zakładać, bez straty ogólności, że reprezentacja $\mathfrak{so}(2)$ na $\mathfrak{g}$ w bazie (e_1, e_2, e_3), dla wektora J rozpinającego $\mathfrak{so}(2)$ jest postaci $\kappa \cdot \tilde{J}$, gdzie

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że reprezentacja ta wyznacza włożenie grupy $SO(2)$ w $GL(T_eG)$, co jest równoważne określeniu niezmienniczej $SO(2)$-struktury na G.

Istnieją stałe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ takie, że $\Lambda(e_i) = -\alpha_i \cdot \tilde{J}$ dla $i = 1, 2, 3$. Równania (1) przyjmują wtedy postać:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + t \cdot e_3 \\ [e_2, e_3] &= (t - \alpha_3) \cdot e_1 \\ [e_3, e_1] &= (t - \alpha_3) \cdot e_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Wynika z nich natychmiast, że $[e_1, [e_2, e_3]] = 0$, a na mocy tożsamości Jakobiego, $[e_1, [e_2, e_3]] = [[e_1, e_2], e_3] + [e_2, [e_1, e_3]] = -\alpha_1(t - \alpha_3) \cdot e_2 + \alpha_2(t - \alpha_3) \cdot e_1$. Przyrównując to do zera, widzimy, że albo $\alpha_3 = t$, bądź też $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 0$.

Krzywizna. Twierdzenie 1.1 daje nam postać tensora krzywizny, która w tym przypadku, ponieważ algebra $\mathfrak{so}(2)$ jest abelowa oraz $\tilde{\lambda} = 0$, upraszcza się do postaci

$$R_e(X, Y) = -\Lambda([X, Y]).$$

Ze wzorów (2) wynika, że $R_e(e_1, e_2) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \cdot J$ oraz, ponieważ zakładamy, że $\alpha_3 = t$ lub $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 0$, to $R_e(e_1, e_3) = 0$ i $R_e(e_2, e_3) = 0$. A zatem $R = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \cdot e^1 \wedge e^2 \otimes J$, więc $R_1 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$ oraz $R_2 = 0$.

Przypadek 1: $\boldsymbol{t \neq 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 \neq t}$.
W zależności od znaku liczby $t \cdot (t - \alpha_3)$, równania (2) opisują bądź to algebrę $\mathfrak{so}(3)$, bądź też algebrę $\mathfrak{so}(2, 1)$.

Przypadek 2: $\boldsymbol{(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), \alpha_3 = t}$.
W tym przypadku, $[e_1, e_2] = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3$ oraz e_3 jest w centrum algebry. Załóżmy, że $\alpha_1 \neq 0$. Przypadek $\alpha_2 \neq 0$ jest zupełnie symetryczny. Podstawiając $\tilde{e}_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \tilde{e}_2 = \frac{1}{\alpha_1} e_2, \tilde{e}_3 = e_3$, dostajemy następującą tabliczkę mnożenia:

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] &= \tilde{e}_1 \\ [\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] &= 0 \\ [\tilde{e}_3, \tilde{e}_1] &= 0 \end{aligned}$$

Wierna reprezentacja liniowa algebry $\mathfrak{g}$ wygląda następująco:

$$\tilde{e}_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{e}_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{e}_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zatem $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna z algebrą Liego grupy $T(2)$ macierzy górnotrójkątnych 2×2.

Przypadek 3: $\boldsymbol{t \neq 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = t}$.
Wówczas algebra $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna z algebrą Liego grupy Heisenberga macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Przypadek 4: $t = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 \neq 0$.
W tym przypadku, algebra $\mathfrak{g}$ ma wierną reprezentację takiej postaci:

$$e_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jest to algebra Liego grupy ruchów sztywnych (izometrii) płaszczyzny.

Przypadek 5: $t = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.
Algebra $\mathfrak{g}$ jest wówczas oczywiście izomorficzna z $\mathbb{R}^3$.

2.1.3. Podsumowanie

Twierdzenie 2.2. *Niech M będzie trójwymiarową przestrzenią jednorodną z niezmienniczą $SO(2)$-geometrią charakterystyczną $(M, \circlearrowleft, g, V, \nabla)$. Niech $R = (R_1 \cdot *V_\flat + R_2 \wedge V_\flat) \otimes J$ będzie rozkładem formy krzywizny $R \in \Omega^2(M) \otimes \mathfrak{so}(2)$, wynikającym z rozkładu $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ na nieprzywiedlne reprezentacje $SO(2)$.*

Wówczas składowa R_2 krzywizny znika, oraz geometria $(M, \circlearrowleft, g, V, \nabla)$ jest lokalnie izomorficzna z jedną z przestrzeni z poniższej listy, przy odpowiedniej wartości parametru t, który jest przeciwny do wartości stałej funkcji torsji ($SO(2)$-geometrie tych przestrzeni opisane są w punktach 2.1.1 oraz 2.1.2):

	Przestrzeń jednorodna	*Parametry:* t, α	R_1
1.1 a)	$(SO(2) \oplus SO(3))/\mathcal{S}_{1,-1,\bullet}$	$t \neq 0,\ \alpha < t^2$	
1.1 b)	$(SO(2) \oplus SO(2,1))/\mathcal{S}_{1,-1,\bullet}$	$t \neq 0,\ \alpha > t^2$	
1.2	$G_{1.2}/SO(2)$	$t \neq 0,\ \alpha = t^2$	$-\alpha$
1.3 a)	$(\mathbb{R} \oplus SO(3))/(\mathbb{1} \oplus SO(2))$	$t = 0,\ \alpha < t^2$	
1.3 b)	$(\mathbb{R} \oplus SO(2,1))/(\mathbb{1} \oplus SO(2))$	$t = 0,\ \alpha > t^2$	
1.4	$(Eucl(\mathbb{R}^2) \oplus \mathbb{R})/SO(2)$	$t = 0,\ \alpha = t^2$	
	Grupa	*Parametry:* $t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid t\ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 0$	R_1
2.1 a)	$SO(3)$	$t \neq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ t \cdot (t - \alpha_3) > 0$	
2.1 b)	$SO(2,1)$	$t \neq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ t \cdot (t - \alpha_3) < 0$	
2.2	$T(2)$	$(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0),\ \alpha_3 = t$	$\sum \alpha_i^2$
2.3	$Heis$	$t \neq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = t$	
2.4	$Eucl(\mathbb{R}^2)$	$t = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 \neq 0$	
2.5	$\mathbb{R}^3$	$t = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0$	

2.2. Trójwymiarowe niejednorodne $SO(2)$-geometrie charakterystyczne

2.2.1. Klasyfikacja trówymiarowych $SO(2)$-geometrii charakterystycznych

Głównym celem tego rozdziału jest udowodnienie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2.3. *Niech $p\colon \tilde{S} \to S$ będzie dowolną $SO(2)$-wiązką główną nad zorientowaną powierzchnią riemannowską $(S, \circlearrowleft, g)$, a Γ_0 koneksją na wiązce p.*

Wówczas, na 3-rozmaitości $\tilde{S}$ jednoznacznie określona jest taka naturalna $SO(2)$-struktura $(\tilde{S}, \circlearrowleft, \tilde{g}, V)$ wraz z koneksją charakterystyczną Γ, że:

- *Przekształcenie p indukuje morfizm $SO(2)$-wiązek głównych związanych z $SO(2)$-strukturami na $\tilde{S}$ i S odpowiednio.*
- *Tensor torsji koneksji Γ jest całkowicie antysymetryczny i odpowiada funkcji krzywizny t koneksji Γ_0.*

Dla tej $SO(2)$-geometrii charakterystycznej, nieprzywiedlne składowe tensora krzywizny koneksji Γ są równe

$$\begin{aligned} R_1 &= t^2 + \kappa, \\ R_2 &= d\,t, \end{aligned}$$

gdzie κ jest krzywizną Gaussa powierzchni S.

Co więcej, każda $SO(2)$-geometria charakterystyczna $(M, \circlearrowleft, g, V)$ na trójwymiarowej rozmaitości jest lokalnie izomorficzna z geometrią takiej postaci. A zatem, funkcja torsji t, metryka g oraz forma krzywizny są zachowywane przez potok pola V, oraz składowa R_2 krzywizny wynosi dt.

Wniosek. $SO(2)$-geometria charakterystyczna na trójwymiarowej rozmaitości ma stałą torsję wtedy i tylko wtedy, gdy składowa R_2 tensora krzywizny jest zerowa.

Najpierw zostanie przeprowadzona konstrukcja, następnie pokażemy, że rzeczywiście daje ona $SO(2)$-geometrie charakterystyczne, a w końcu, że każda $SO(2)$-geometria charakterystyczna lokalnie jest takiej postaci.

Konstrukcja Niech $(S, \circlearrowleft, g)$ będzie zorientowaną powierzchnią riemannowską i niech $p\colon \tilde{S} \to S$ będzie dowolną $SO(2)$-wiązką główną nad S wraz z koneksją Γ_0. Przez $t \in C^\infty(S)$ oznaczmy funkcję krzywizny koneksji Γ_0.

Na rozmaitości $\tilde{S}$ określone jest standardowe pole wertykalne $V = J^\dagger$ odpowiadające wektorowi bazowemu J algebry $\mathfrak{so}(2)$. Możemy jednoznacznie określić metrykę $\tilde{g}$ taką, by wektor V był unormowany i prostopadły do przestrzeni horyzontalnej koneksji Γ_0. Na przestrzeni horyzontalnej zaś, określamy $\tilde{g}$ jako przeciągnięcie z dołu metryki g przez rzutowanie p. Wyznaczona jest też orientacja $\circlearrowleft$ rozmaitości $\tilde{S}$ taka, że (X, Y, V) tworzy bazę zorientowaną w punkcie $x \in \tilde{S}$ gdy (p_*X, p_*Y) jest bazą zorientowaną w $p(x) \in S$.

Wiązka styczna do $\tilde{S}$ rozkłada się na sumę ortogonalną wiązek:

$$T\tilde{S} = p^*TS \oplus \mathbb{R} \cdot V.$$

Na p^*TS mamy koneksję indukowaną przez koneksję Levi-Civity na TS, a na $\mathbb{R} \cdot V$ mamy płaską koneksję. Łącznie daje to pewną koneksję $\tilde{\Gamma}$ na $T\tilde{S}$. Do koneksji $\tilde{\Gamma}$ dodajmy formę $p^*t \cdot V_\flat$. W ten sposób określamy naszą koneksję Γ na wiązce $T\tilde{S}$.

Poprawność Tak określona $SO(2)$-geometria na rozmaitości $\tilde{S}$ ma całkowicie antysymetryczną torsję odpowiadającą funkcji t i składowe R_1 oraz R_2 tensora krzywizny są takie jak w sformułowaniu twierdzenia.

Dowód Obliczymy wpierw formę koneksji Γ na wiązce $T\tilde{S}$. Opisana w konstrukcji $SO(2)$-struktura $(\tilde{S}, \circlearrowleft, \tilde{g}, V)$ wyznacza $SO(2)$-wiązkę główną $\tilde{\xi}\colon \tilde{E} \to \tilde{S}$ baz z nią zgodnych. Natomiast struktura riemannowska na S wyznacza $SO(2)$-wiązkę główną $\xi\colon E \to S$ ortonormalnych baz zorientowanych wiązki stycznej do S. Przekształcenie $p\colon \tilde{S} \to S$ indukuje morfizm

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{E}, \tilde{\omega}) \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\tilde{\xi}"] & (E, \omega_{LC}) \arrow[d, "\xi"] \\
(\tilde{S}, \circlearrowleft, \tilde{g}, V) \arrow[r, "p"] & (S, \circlearrowleft, g)
\end{tikzcd}$$

$\tilde{p}$ wiązki $\tilde{E}$ w wiązkę E, poprzez przyporządkowanie bazie (X, Y, V) przestrzeni T_xM bazy (p_*X, p_*Y) przestrzeni $T_{p(x)}S$.

Funkcje p^*t na $\tilde{S}$ oraz $\tilde{\xi}^*p^*t$ na $\tilde{E}$ indukowane przez t oznaczmy dla uproszczenia również symbolem t, analogicznie dla κ.

Niech $\omega_{LC} \in \Omega^1(E)$ będzie formą koneksji Levi-Civity powierzchni S, oraz $\kappa \in C^\infty(S)$ funkcją krzywizny tej koneksji. Forma $\tilde{p}^*\omega_{LC}$ jest formą koneksji na wiązce $\tilde{\xi}$, a zatem także forma

$$\tilde{\omega} = \tilde{p}^*\omega_{LC} + t\, \tilde{\xi}^* V_\flat, \tag{$\blacklozenge$}$$

gdyż $\tilde{\xi}^*(p^*t \cdot V_\flat)$ jest formą tensorialną (gdzie t jest funkcją krzywizny koneksji Γ_0). Forma $\tilde{\omega} \otimes J$ jest to dokładnie forma koneksji Γ.

Niech $\tilde{\theta} \in \Omega^1(\tilde{E}) \otimes \mathbb{R}^3$ będzie formą tautologiczną na wiązce $\tilde{\xi}$. Oznacza to, że gdy $X \in T_u\tilde{E}$, to wektor $\tilde{\xi}_*X$ w bazie u ma współrzędne $\tilde{\theta}^1(X), \tilde{\theta}^2(X), \tilde{\theta}^3(X)$. A zatem, ponieważ trzecia współrzędna wektora $\tilde{\xi}_*X$ w dowolnej bazie to $g(\tilde{\xi}_*X, V) = V_\flat(\tilde{\xi}_*X)$, więc

$$\tilde{\xi}^* V_\flat = \tilde{\theta}^3. \tag{1}$$

Jeżeli zaś $\theta \in \Omega^1(P_0) \otimes \mathbb{R}^2$ jest formą tautologiczną na wiązce ξ, to z określenia przekształcenia $\tilde{p}$ wynika, że

$$\tilde{p}^*\theta = \pi_2 \circ \tilde{\theta}, \tag{2}$$

gdzie $\pi_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jest rzutowaniem na dwie pierwsze współrzędne.

Ponieważ $V_\flat(J^\dagger) = 1$ oraz $V_\flat|_{\Gamma_0} = 0$, to forma $V_\flat \otimes J$ jest formą koneksji Γ_0 na wiązce p. Skoro założyliśmy, że koneksja ta ma krzywiznę t, to $dV_\flat = p^*(t\ dS)$, gdzie dS jest formą powierzchni S. Z kolei $\tilde{\xi}^*p^*dS = \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2$, a ponieważ $\tilde{\xi}^*dV_\flat = d\tilde{\theta}^3$, więc

$$d\tilde{\theta}^3 = t\, \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2. \tag{3}$$

Założenie, że κ jest krzywizną Gaussa powierzchni S może być inaczej sformułowane tak:

$$d\omega_{LC} = \kappa\, dS,$$

skąd wynika równość

$$\tilde{p}^* d\omega_{LC} = \kappa\, \tilde{\xi}^*\theta_1 \wedge \theta_2, \tag{4}$$

Beztorsyjność koneksji na wiązce ξ danej przez formę ω_{LC} oznacza, że

$$d\theta + (\omega_{LC} \otimes J) \wedge \theta = 0,$$

zatem, korzystając z (2),

$$\pi_2 \; d\tilde{\theta} + (\tilde{p}^* \omega_{LC} \otimes J) \wedge \tilde{\theta} = 0. \tag{5}$$

Z równości (3), (4), (5) oraz definicji (♦) formy koneksji, torsji i krzywizny na wiązce $\tilde{\xi}$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\omega} & = & \tilde{p}^* \omega_{LC} + t \; \tilde{\theta}_3, \\ \widetilde{\Theta} & = & d\tilde{\theta} + (\tilde{\omega} \otimes J) \wedge \tilde{\theta}, \\ \widetilde{\Omega} & = & d\tilde{\omega} \otimes J \end{array}$$

wynika łatwo, że

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\Theta} & = & t \begin{pmatrix} \tilde{\theta}^2 \wedge \tilde{\theta}^3 \\ \tilde{\theta}^3 \wedge \tilde{\theta}^1 \\ \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\Omega} & = & \Big((\kappa + t^2) \; \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2 + dt \wedge \theta^3 \Big) \otimes J. \end{array}$$

To oznacza, że tensor torsji jest całkowicie antysymetryczny i odpowiada funkcji t, oraz że nieprzywiedlnymi składowymi formy krzywizny względem rozkładu (2.1) są:

$$\begin{array}{rcl} R_1 & = & \kappa + t^2, \\ R_2 & = & dt. \end{array}$$

Kończy to dowód poprawności konstrukcji. ■

Zupełność Niech M będzie trójwymiarową rozmaitością z $SO(2)$-strukturą $(M, \circlearrowleft, \tilde{g}, V)$ i niech Γ będzie koneksją zgodną z tą strukturą, której torsja jest całkowicie antysymetryczna. Wówczas geometria M jest lokalnie izomorficzna z geometrią otrzymaną w powyższej konstrukcji.

Dowód Niech ∇ będzie pochodną kowariantną koneksji Γ. Wówczas, ponieważ ∇ zachowuje $SO(2)$-strukturę oraz tensor torsji jest antysymetryczny, to

$$\begin{array}{rcl} \nabla V & = & 0, \\ \nabla \tilde{g} & = & 0, \\ \tilde{g}(T(X,\; Y),\; Z) + \tilde{g}(T(X,\; Z),\; Y) & = & 0. \end{array}$$

Z pierwszej z równości wynika następująca:

$$T(V,Z) = \nabla_V Z - \nabla_Z V - L_V Z \quad = \quad \nabla_V Z - L_V Z.$$

W związku z tym,

$$\begin{array}{rcl} V\tilde{g}(X,Y) & = & \tilde{g}(\nabla_V X, Y) + \tilde{g}(X, \nabla_V Y) \\ & = & \tilde{g}(L_V X + T(V,X),\; Y) + \tilde{g}(X,\; L_V Y + T(V,Y)) \\ & = & \tilde{g}(L_V X,\; Y) + \tilde{g}(X,\; L_V Y), \end{array}$$

czyli $L_V \tilde{g} = 0$, więc potok pola V zachowuje metrykę g.

Niech $\tilde{S} \subseteq M$ będzie takim otoczeniem ustalonego punktu w M, dla którego istnieje dyfeomorfizm na pewną kostkę otwartą w $\mathbb{R}^3$ o wysokości mniejszej niż 2π, przeprowadzający pole V na pole $\frac{\partial}{\partial x^3}$. Niech S będzie podstawą tej kostki. Wówczas dobrze określone jest przekształcenie ilorazowe $p\colon \tilde{S} \to S$, którego włóknami są krzywe całkowe pola V. Z równości $L_V \tilde{g} = 0$ wynika, że metryka $\tilde{g}$ rzutuje się do dobrze określonej metryki g na powierzchni S. Na S wyznaczona jest również orientacja taka, by dla każdej zorientowanej bazy (X, Y, V) przestrzeni $T_x\tilde{S}$, (p_*X, p_*Y) było zorientowaną bazą przestrzeni $T_{p(x)}S$.

Przez $\tilde{\xi}\colon \tilde{E} \to \tilde{S}$ oznaczmy $SO(2)$-wiązkę główną baz zachowujących daną $SO(2)$-strukturę na M, obciętą do $\tilde{S}$ i niech $\xi\colon E \to S$ będzie $SO(2)$-wiązką główną baz ortonormalnych wiązki stycznej do S. Niech $\tilde{\theta}$ będzie formą tautologiczną wiązki $\tilde{\xi}$, a θ formą tautologiczną wiązki ξ oraz niech $\tilde{\omega}$ będzie formą koneksji na wiązce $\tilde{\xi}$.

Przekształcenie p indukuje morfizm $\tilde{p}$ wiązki $\tilde{\xi}$ w wiązkę ξ. Podobnie jak w dowodzie poprawności, zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^1 &= \tilde{p}^*\theta^1 \\ \tilde{\theta}^2 &= \tilde{p}^*\theta^2 \\ \tilde{\theta}^3 &= \tilde{\xi}^* V_\flat . \end{aligned} \tag{6}$$

Niech $\alpha \,\epsilon\, \Omega^1(\tilde{S})$ będzie taką formą, że

$$\tilde{\omega} = \tilde{p}^*\omega_{LC} + \tilde{\xi}^*\alpha. \tag{7}$$

Jeżeli przez $\widetilde{\Theta}$ oznaczymy formę torsji koneksji na wiązce $\tilde{\xi}$, a przez Θ oznaczymy (zerową) formę torsji koneksji Levi-Civity na wiązce ξ, to, korzystając z równości (6), dostajemy równania:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Theta}^1 &= \tilde{s}^*\Theta^1 - \tilde{\xi}^*\alpha \wedge \tilde{\theta}^2 = -\tilde{\xi}^*\alpha \wedge \tilde{\theta}^2 \\ \widetilde{\Theta}^2 &= \tilde{s}^*\Theta^2 + \tilde{\xi}^*\alpha \wedge \tilde{\theta}^1 = \tilde{\xi}^*\alpha \wedge \tilde{\theta}^1 \\ \widetilde{\Theta}^3 &= \tilde{\xi}^* dV_\flat . \end{aligned}$$

Założenie, że forma torsji jest całkowicie antysymetryczna i odpowiada funkcji t na $\tilde{S}$, jest równoważne następującym równościom:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Theta}^1 &= t\, \tilde{\theta}^2 \wedge \tilde{\theta}^3 \\ \widetilde{\Theta}^2 &= t\, \tilde{\theta}^3 \wedge \tilde{\theta}^1 \\ \widetilde{\Theta}^3 &= t\, \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2 . \end{aligned}$$

Przyrównując je do poprzednich równań, widzimy, że

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^*\alpha &= t\, \tilde{\theta}^3 \\ \tilde{\xi}^* dV_\flat &= t\, \tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2 , \end{aligned}$$

skąd wnioskujemy równości:

$$\alpha = t\, V_\flat \tag{8}$$

$$dV_\flat = t\, p^* dS, \tag{9}$$

gdzie dS jest formą powierzchni S.

Różniczkując zewnętrznie równanie (9), otrzymujemy, że $dt \wedge p^*dS = 0$. To oznacza, że $dt(V) = 0$, więc funkcja t jest stała wzdłuż włókien przekształcenia p, zatem pochodzi od pewnej funkcji t określonej na S.

Ponieważ potok pola V zachowuje metrykę $\tilde{g}$, to również zachowuje on formę $V_\flat$. Z określenia zbioru $\tilde{S}$, wynika, że możemy go zidentyfikować z podzbiorem otwartym trywialnej $SO(2)$-wiązki głównej nad S. Forma $V_\flat$ przedłuża się do $SO(2)$-niezmienniczej formy, która będzie wówczas formą pewnej koneksji na tej wiązce. Jak wynika z (9), funkcja krzywizny tej koneksji to dokładnie t. Ponadto, wstawiając (8) do (7), dostajemy wzór

$$\tilde{\omega} = \tilde{s}^* \omega_{LC} + t\ \xi^* V_\flat$$

analogiczny do (♦), co pokazuje, że dana koneksja na $\tilde{S}$ może być otrzymana w sposób opisany w konstrukcji. Kończy to dowód twierdzenia. ■

Uwagi

i) W przeprowadzonej konstrukcji, wszystkie krzywe całkowe pola V są okręgami długości 2π. Gdyby przeskalować pole V przez stały czynnik $\frac{1}{\lambda}$, otrzymalibyśmy krzywe całkowe długości $2\pi\lambda$, funkcja torsji by wynosiła $\lambda\ t$, oraz $R_1 = \lambda^2\ t^2 + \kappa$, $R_2 = \lambda\ dt$.

ii) Zamiast $SO(2)$-wiązki głównej $p\colon \tilde{S} \to S$ równie dobrze można by wziąć $\mathbb{R}$-wiązkę główną. Wówczas krzywe całkowe pola V będą prostymi i powiemy, że są one długości ∞.

Stwierdzenie 2.4. *Niech $(M, \circlearrowleft, g, V)$ będzie trójwymiarową, spójną $SO(2)$-geometrią charakterystyczna.*

1. *Jeżeli wszystkie krzywe całkowe pola V są homeomorficzne z okręgiem, to są one równej długości l. Jeżeli ponadto rozmaitość M jest zwarta, to liczba*

$$\frac{1}{2\pi\ l} \int_M \alpha$$

jest całkowita.

2. *Jeżeli wszystkie krzywe całkowe pola V są zupełnymi podprzestrzeniami metrycznymi przestrzeni M, to są one równej długości (skończonej lub nie), oraz geometria na M jest globalnie takiej postaci, jak geometria otrzymana w naszej konstrukcji, z odpowiednią modyfikacją długości włókien, tak jak to jest opisane w Uwagach i) oraz ii).*

Dowód Długość okręgu γ będącego krzywą całkową pola V wyraża się wzorem

$$l(\gamma) = \int_\gamma V_\flat.$$

Z dowodu twierdzenia wynika, że

$$dV_\flat = t\ * V_\flat.$$

Niech γ_1 oraz γ_2 będą dwiema krzywymi całkowymi pola V, oraz niech σ będzie gładką krzywą transwersalną do pola V, łączącą punkt na okręgu γ_1 z punktem na okręgu γ_2

Niech P będzie powierzchnią otrzymaną z σ poprzez działanie potoku pola V. A zatem, jest to immersyjny obraz rozmaitości $S^1 \times [0, 1]$, oraz pole V jest styczne do P. Stąd wynika, że $*V_\flat|_P = 0$.

Wówczas, na mocy twierdzenia Stokes'a,

$$l(\gamma_1) - l(\gamma_2) = \int_{\partial P} V_\flat = \int_P dV_\flat = \int_P t * V_\flat = 0.$$

A zatem, długości dowolnych dwóch krzywych całkowych pola V są sobie równe.

Niech l będzie wspólną długością krzywych całkowych pola V. Wówczas potok pola $\frac{2\pi}{l}\,V$ wyznacza działanie okręgu $SO(2)$ na rozmaitości M, oraz M staje się $SO(2)$-wiązką główną nad przestrzenią ilorazową $S = M/SO(2)$. Powtórzenie dowodu „zupełności", gdzie za $\tilde{S}$ bierzemy M, pokazuje teraz, że $SO(2)$-geometria charakterystyczna na M pochodzi w odpowiedni sposób z S.

A zatem,

$$\alpha = T_\flat = -\tilde{\xi}^*(\kappa\ dS) \wedge V_\flat,$$

gdzie κ jest funkcją krzywizny pewnej koneksji na wiązce ξ. Jeżeli M jest zwartą rozmaitością, to liczba $\frac{1}{2\pi}\int_S \kappa\ dS$ jest całkowita i odpowiada klasie Eulera wiązki ξ, oraz $\int_\gamma V_\flat = l$ dla każdego włókna γ wiązki ξ. Stąd wynika, że $\frac{1}{2\pi\ l}\int_M T_\flat$ jest liczbą całkowitą. Dowodzi to pierwszą część stwierdzenia, oraz drugą w przypadku, gdy wszystkie krzywe całkowe pola V są okręgami.

Załóżmy teraz, że wszystkie krzywe całkowe pola V są podprzestrzeniami zupełnymi i że któraś z tych krzywych jest okręgiem. Ponieważ potok pola V zachowuje metrykę, to wynika stąd, że jeśli punkt $x \in M$ jest odległy o ε od krzywej γ, to wszystkie punkty leżące na krzywej całkowej γ_x punktu x są odległe o ε od γ. Skoro krzywa γ_x jest zupełna i jest zawarta w zwartym otoczeniu γ, to też jest zwarta. Tak więc, wszystkie krzywe całkowe pola V są okręgami i ten przypadek już rozpatrzyliśmy.

Tak więc, załóżmy, że wszystkie krzywe całkowe pola V są zupełnymi prostymi. Niech ℓ_1, ℓ_2 będą dwiema takimi krzywymi, oraz niech $x \in \ell_1$. Potok pola V wyznacza działanie $\cdot$ grupy $\mathbb{R}$ na M. Znów, ponieważ potok pola V zachowuje metrykę g, to odległość punktu $t \cdot x$ od krzywej ℓ_2 nie zmienia się gdy t przebiega $\mathbb{R}$. A zatem krzywe ℓ_1 oraz ℓ_2 są „jednostajnie odległe", to znaczy przestrzeń ilorazowa $M/\mathbb{R}$ jest dobrze określoną gładką powierzchnią S, nad którą M jest $\mathbb{R}$-wiązką główną. Powtórzenie dowodu „zupełności", gdzie za $\tilde{S}$ bierzemy M, pokazuje teraz, że $\mathbb{R}$-geometria charakterystyczna na M pochodzi w taki sposób z S, jak to jest opisane w Uwadze ii) . ■

3. Czterowymiarowe $SO(2)$-geometrie charakterystyczne

W przeciwieństwie do przypadku trójwymiarowego, w przypadku czterowymiarowym istnieje nieskończenie wiele nierównoważnych włożeń grupy $SO(2)$ w grupę $SO(4)$. Każde takie włożenie definiuje inną strukturę, przez co tak jednorodny opis, jak w poprzednim rozdziale nie będzie możliwy.

Jak wspomnieliśmy we wstępie, każde włożenie grupy $SO(2)$ w $SO(4)$ jest sprzężone z włożeniem postaci $\sigma^{k,l}$, gdzie k oraz l są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi.

Dla ustalenia uwagi, będziemy zawsze zakładali, że l jest co do modułu mniejsze niż k oraz że liczba k jest dodatnia.

W przypadku trywialnego włożenia $\sigma^{1,0}\colon SO(2) \to SO(4)$, redukcja grupy strukturalnej na rozmaitości M do tak włożonej podgrupy $SO(2)$ może być, analogicznie jak w poprzednim rozdziale, opisana jako piątka $(M, \circlearrowleft, g, V, W)$, gdzie V oraz W są wzajemnie ortogonalnymi polami wersorów stycznych do M.

$\mathcal{S}_{1,1}$-struktury W przypadku włożenia $\sigma^{1,1}\colon SO(2) \to SO(4)$, sytuacja się nieco komplikuje. Przestrzeń jednorodna $SO(4)/\mathcal{S}_{1,1}$ to, jak zaraz pokażemy, $\mathbb{R}P^3 \times S^2$.

Nietrudno zauważyć, że zadanie $\mathcal{S}_{1,1}$-struktury na czterowymiarowej rozmaitości M jest równoważne z wyróżnieniem takich oto obiektów:

- Orientacja $\circlearrowleft$,
- Metryka g,
- Para wzajemnie ortogonalnych, dwuwymiarowych dystrybucji V_1 oraz V_2,
- Izometria τ dystrybucji V_1 na dystrybucję V_2.

Istotnie, jak łatwo widać, grupa przekształceń przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zachowujących taką strukturę, to dokładnie $\mathcal{S}_{1,1}$.

Teraz opiszemy wybór $\mathcal{S}_{1,1}$-struktury jako wybór pewnych form na czterowymiarowej rozmaitości.

Stwierdzenie 3.1. *Grupa $SO(4)$ działa tranzytywnie na przestrzeni $\mathbb{R}P^3 \times S^2$ ze stabilizatorem $\mathcal{S}_{1,1}$.*

Wybór $\mathcal{S}_{1,1}$-struktury na czterowymiarowej rozmaitości M jest równoważny z wyborem trzech unormowanych dwuform na M, z których pierwsze dwie są samodualne i wzajemnie ortogonalne, a trzecia jest antysamodualna.

Dowód Przypomnijmy, jak się pokazuje, że nakryciem uniwersalnym grupy $SO(4)$ jest grupa $Spin(4) = SU(2) \times SU(2) = S^3 \times S^3$. Niech $\mathbb{H} = \{a + j\ b\ |a, b \in \mathbb{C}\}$ będzie (nieprzemiennym) ciałem kwaternionów. Mnożenie określone jest tak, że $j\ j = -1$ oraz $j\ z = \overline{z}\ j$ dla $z \in \mathbb{C}$. Sprzężenie kwaternionów, określone wzorem $\overline{a + j\ b} = \overline{a} - j\ b$, jest antyhomomorfizmem algebr oraz norma zadana przez $\|q\|^2 = q\ \overline{q}$ jest zgodna z operacją mnożenia. Sfera jednostkowa S^3 w przestrzeni kwaternionów jest zatem grupą. Ponadto, działanie $S^3 \times S^3$ na $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ zadane wzorem

$$\sigma(q_1, q_2) \cdot v = q_1\ v\ q_2^{-1} \quad q_1, q_2 \in S^3, v \in \mathbb{H}$$

zachowuje normę $\mathbb{R}^4$, więc wyznacza (dwukrotne) nakrycie $\sigma\colon S^3 \times S^3 \to SO(4)$. Jest to więc nakrycie uniwersalne. Z kolei działanie S^3 na zbiorze kwaternionów „czystych" $im\mathbb{H} = \{ir + jz\ |r \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}$ zadane wzorem

$$\tau(q) \cdot w = q\ w\ q^{-1} \qquad q \in S^3, w \in im\mathbb{H}$$

daje nakrycie uniwersalne $\tau\colon S^3 \to SO(3)$. Ponieważ jest ono dwukrotne, to widać stąd, że $SO(3) = S^3/\{(1,1),(-1,-1)\} = \mathbb{R}P^3$.

Rzutowanie π_1 oraz π_2 grupy $Spin(4) = S^3 \times S^3$ na odpowiednie współrzędne opuszcza się do homomorfizmów λ_1 oraz λ_2 grupy $SO(4)$ w grupę $SO(3)$, co ilustruje poniższy diagram.

$$\begin{tikzcd} S^3 \times S^3 \arrow[r, "\pi_k"] \arrow[d, "\sigma"] & S^3 \arrow[d, "\tau"] \\ SO(4) \arrow[r, "\lambda_k"] & SO(3) \end{tikzcd}$$

Grupa S^3 działa w oczywisty sposób na przestrzeni $SO(3) = \mathbb{R}P^3$:

$$q \cdot (\mathbb{R} \cdot v) = \mathbb{R} \cdot (q\ v) \qquad q \,\epsilon\, S^3, v \,\epsilon\, \mathbb{H}^*.$$

Rozpatrzmy działanie po wspórzędnych grupy $S^3 \times S^3$ na przestrzeni $\mathbb{R}P^3 \times S^2$, gdzie $S^2 \subseteq im\mathbb{H}$ jest sferą jednostkową. Stabilizatorem punktu $(\mathbb{R} \cdot 1, i)$ jest, jak łatwo sprawdzić, zbiór $\widetilde{\mathcal{S}_{1,1}} = \{(\pm 1, z)\ |z \,\epsilon\, S^1 = S^3 \cap \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}\}$. Porównianie wymiarów przestrzeni prowadzi do wniosku, że działanie to jest tranzytywne. Ponieważ

$$\sigma(\pm 1, z) \cdot (a + j\ b) = \pm(a\ z^{-1} + j\ b\ z^{-1}),$$

zatem $\sigma(\pm 1, z)$ jest przekształceniem zadanym przez macierz w postaci klatkowej

$$\begin{pmatrix} \pm z^{-1} & 0 \\ 0 & \pm z^{-1} \end{pmatrix} \qquad z \,\epsilon\, SO(2) = S^1$$

Wynika stąd, że grupa $\widetilde{\mathcal{S}_{1,1}}$ jest dwukrotnym nakryciem grupy $\mathcal{S}_{1,1} \subseteq SO(4)$, z jądrem równym $N = \{(1,1),(-1,-1)\} \subseteq S^3 \times S^3$.

Na mocy twierdzenia 1.3,

$$(S^3 \times S^3)/\widetilde{\mathcal{S}_{1,1}} = \big((S^3 \times S^3)/N\big)\Big/(\widetilde{\mathcal{S}_{1,1}}/N) = SO(4)/\mathcal{S}_{1,1},$$

a lewa strona powyższego ciągu równości jest równa, jak już pokazaliśmy, $\mathbb{R}P^3 \times S^2$. A zatem również $SO(4)/\mathcal{S}_{1,1} = \mathbb{R}P^3 \times S^2$, co dowodzi pierwszej części tezy.

Okazuje się, że homomorfizm $\lambda_1\colon SO(4) \to SO(3)$ można interpretować jako działanie grupy $SO(\mathbb{R}^4)$ indukowane na trójwymiarowej przestrzeni form samodualnych $\Lambda^+(\mathbb{R}^4) = \{\alpha \,\epsilon\, \Lambda^2(\mathbb{R}^4)\ |\ *\,\alpha = \alpha\}$. Podobnie, homomorfizm λ_2 jest indukowany przez działanie na przestrzeni form antysamodualnych $\Lambda^-(\mathbb{R}^4) = \{\alpha \,\epsilon\, \Lambda^2(\mathbb{R}^4)\ |\ *\,\alpha = -\alpha\}$.

Zatem składnik $\mathbb{R}P^3$ działania $SO(4)$ na $\mathbb{R}P^3 \times S^2$, można utożsamić z grupą obrotów $SO\big(\Lambda^+(\mathbb{R}^4)\big)$, zaś drugi składnik, S^2 jest sferą $S\big(\Lambda^-(\mathbb{R}^4)\big)$. Tak więc, wybór $\mathcal{S}_{1,1}$ struktury na czterowymiarowej rozmaitości M jest równoważny wyborowi cięcia wiązki baz wiązki $\Lambda^+(TM)$ oraz cięcia wiązki sfer wiązki $\Lambda^-(TM)$. Stąd wynika druga część tezy. ∎

Analogiczna analiza pokazuje, że $\mathcal{S}_{1,-1}$-struktura jest wyznaczona przez cięcie wiązki baz wiązki $\Lambda^-(TM)$ oraz cięcia wiązki sfer wiązki $\Lambda^+(TM)$.

3.1. Czterowymiarowe rozmaitości dopuszczające $SO(2)$-struktury

Rzeczą, która także odróżnia przypadek czterowymiarowy od trójwymiarowego jest to, że na 4-rozmaitości mogą istnieć topologiczne przeszkody ku istnieniu $SO(2)$-struktury. W tej części opiszemy warunki konieczne i dostateczne do istnienia takich struktur. Niezwykle przydatnym twierdzeniem tu będzie

Twierdzenie Pontrjagina. *Jeżeli M jest 4-wymiarowym kompleksem komórkowym, którego czwarta grupa kohomologii $H^4(M;\mathbb{Z})$ nie ma 2-torsji, to klasa izomorfizmu $SO(n)$-wiązki głównej ($n \geq 3$) nad M jest wyznaczona przez jej klasy charakterystyczne $w_2 \in H^2(M;\mathbb{Z}_2)$, $p_1 \in H^4(M;\mathbb{Z})$ oraz jedna z klas $e \in H^4(M;\mathbb{Z})$ lub $w_4 \in H^4(M;\mathbb{Z}_2)$, w zależności od tego, czy $n = 4$, czy też $n > 4$.*

Dowód [Pon45],[DW59] ■

Niech teraz M będzie czterowymiarową, orientowalną rozmaitością. W szczególności, powyższe twierdzenie zachodzi dla rozmaitości M. Niech p i q będą dwiema dowolnymi liczbami całkowitymi.

Twierdzenie 3.2. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by wiązka styczna orientowalnej, czterowymiarowej rozmaitości M miała $\mathcal{S}_{p,q}$ strukturę, jest by istniał element $x \in H^2(M;\mathbb{Z})$, który spełnia następujące równości:*

i) $w_2(M) \equiv (p+q) \cdot x \mod 2$

ii) $p_1(M) = (p^2+q^2) \cdot x \smile x$

iii) $e(M) = pq \cdot x \smile x$

Dowód Istnienie $\mathcal{S}_{p,q}$-struktury na wiązce stycznej jest równoważne temu, by istniała liniowa wiązka zespolona ℓ taka, że $TM \cong \ell^p \oplus \ell^q$.

Niech $x \in H^2(M;\mathbb{Z})$ i niech ℓ będzie zespoloną wiązką liniową nad M odpowiadającą klasie x przy izomorfizmie

$$c_1 \colon Vect_1^{\mathbb{C}}(M) \to H^2(M;\mathbb{Z}),$$

oraz niech $\eta = \ell^p \oplus \ell^q$.

Z następującego rachunku:

$$\begin{aligned} c(\eta) &= c(\ell^p \oplus \ell^q) = c(\ell^p) \smile c(\ell^q) \\ &= (1 + p \cdot c_1(\ell)) \smile (1 + q \cdot c_1(\ell)) \\ &= 1 + (p+q) \cdot x + pq \cdot x^2 \end{aligned}$$

wnioskujemy zależności

$$\begin{aligned} w_2(\eta) &= c_1(\eta) \mod 2 = (p+q) \cdot x \mod 2 \\ p_1(\eta) &= c_1(\eta)^2 - 2c_2(\eta) = (p^2+q^2) \cdot x^2 \\ e(\eta) &= c_2(\eta) = pq \cdot x^2. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Pontrjagina wynika więc, że wiązka $\eta = \ell^p \oplus \ell^q$ jest izomorficzna z wiązką TM wtedy i tylko wtedy, gdy x spełnia warunki *i), ii)* oraz *iii)*. ■

3.2. Klasyfikacja czterowymiarowych, jednorodnych $SO(2)$-geometrii charakterystycznych

Będziemy stosować dokładnie te same metody, co w przypadku trójwymiarowym. Podobnie jak tam, osobno rozpatrzymy przypadek przestrzeni jednorodnych postaci G/H, gdzie G jest pięciowymiarową grupą, a H jej jednowymiarową podgrupą, i osobno przypadek, gdy sama przestrzeń jednorodna jest grupą czterowymiarową. Jedynymi narzędziami, tak jak poprzednio, są tu twierdzenia 1.1, 1.2 oraz wniosek z twierdzenia 1.3.

3.2.1. Nietrywialna reprezentacja izotropii

Załóżmy, że M jest jednorodną $\mathcal{S}_{p,q}$-geometrią postaci G/H, gdzie G jest pięciowymiarową grupą Liego, a H jej jednowymiarową podgrupą domkniętą oraz p i q są dwiema względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Na mocy twierdzenia 1.2, możemy założyć, że przekształcenie Λ wyznaczające koneksję Γ jest zerowe. Wówczas, na mocy twierdzenia 1.1, zachodzą wzory:

$$T_o(X,Y) = -[X,Y]_{\mathfrak{m}} \tag{T}$$

$$R_o(X,Y) = -\tilde{\lambda}([X,Y]_{\mathfrak{h}}) \qquad dla\ X,Y \in T_oM \simeq \mathfrak{m}. \tag{R}$$

Niech wektory (e_1, e_2, e_3, e_4) stanowią bazę ortonormalną przestrzeni $T_oM \simeq \mathfrak{m}$, oraz niech h będzie tak dobranym wektorem bazowym przestrzeni $\mathfrak{h}$, że jego działanie na $\mathfrak{m}$ w bazie (e_1, e_2, e_3, e_4) jest postaci $\sigma^{p,q}$.

Zakładając, że tensor torsji jest całkowicie antysymetryczny i odpowiada formie $t_1\ e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + t_2\ e^1 \wedge e^2 \wedge e^4 + t_3\ e^1 \wedge e^3 \wedge e^4 + t_4\ \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4$, oraz że część wertykalna nawiasu Liego jest wyznaczona przez dwuformę $\eta = \sum\ \alpha_{i,j} e^i \wedge e^j$, z twierdzenia 1.1 oraz tożsamości Jacobiego dostajemy pewne równania, które dadzą się rozwiązać.

W przypadku $p,\ q \neq 0$ okazuje się, że jedyne rozwiązania tych równań są trywialne, to znaczy torsja jest oraz forma η są zerowe. Przestrzeń jednorodna wtedy to jest $(\mathcal{S}_{p,q} \ltimes \mathbb{R}^4)/\mathcal{S}_{p,q}$, to znaczy $\mathbb{R}^4$ wraz z płaską $\mathcal{S}_{p,q}$-geometrią.

Natomiast w przypadku $(p,q) = (1,0)$ z równań tych wynika, że $t_3 = 0, t_4 = 0$ oraz $\alpha_{i,j} = 0$ dla $\{i,j\} \neq \{1,2\}$. Dalej więc będziemy badać te rozwiązania, zakładając, że $(p,q) = (1,0)$ oraz działanie wektora h na $\mathfrak{m}$ w bazie (e_1, e_2, e_3, e_4) dane jest przez macierz J (a właściwie jej rozszerzenie do macierzy 4×4). Niech $\alpha = \alpha_{1,2}$.

A zatem tabliczka mnożenia w algebrze Liego $\mathfrak{g}$ grupy G wygląda tak:

$$\begin{array}{rcl}
[e_1, e_2] &=& t_1\ e_3 + t_2\ e_4 + \alpha\ h, \\
[e_1, e_3] &=& -t_1\ e_2, \\
[e_1, e_4] &=& -t_2\ e_2, \\
[e_2, e_3] &=& t_1\ e_1, \\
[e_2, e_4] &=& t_2\ e_1, \\
[e_1, h] &=& e_2, \\
[e_2, h] &=& -e_1, \\
[e_3, e_4] &=& 0, \\
[e_3, h] &=& 0, \\
[e_4, h] &=& 0.
\end{array}$$

Krzywizna Z powyższych równości oraz równości (R), wynika, że

$$R_o = -\alpha \; e^1 \wedge e^2 \otimes J.$$

W poniższym spisie przypadków podane są podstawienia, które prowadzą do bazy standardowej którejś ze wcześniej napotkanych algebr Liego. Wektory rozpinające podalgebrę przemienną będą oznaczane symbolami r, r_1, r_2. Standardowe wektory bazowe algebr $\mathfrak{so}(3)$ oraz $\mathfrak{so}(2,1)$ oznaczam przez f_1, f_2, f_3. Baza algebry Liego grupy $G_{1.2}$ składa się z wektorów v_1, v_2, v_3, v_4.

Przypadek 1: $t_1^2 + t_2^2 \neq \alpha$.
Niech μ będzie takie, że $\mu^2(\alpha - t_1^2 - t_2^2) = \pm 1 = \varepsilon$. Podstawiając

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu \; e_1, \\ f_2 &= \mu \; e_2, \\ f_3 &= \frac{1}{\alpha - t_1^2 - t_2^2} \; (\alpha \; h + t_1 \; e_3 + t_2 \; e_4), \\ r_1 &= e_4 - t_2 \; h, \\ r_2 &= e_3 - t_1 \; h, \end{aligned}$$

dostajemy standardową bazę algebry $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^2$ bądź $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbb{R}^2$, w zależności od znaku ε. Wówczas $h = f_3 - \frac{1}{t_1^2+t_2^2-\alpha} \, (t_2 \; r_1 + t_1 \; r_2)$. Gdy $(t_1, t_2) \neq (0,0)$, można tak wybrać bazę $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ podalgebry $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathfrak{g}$, by $h = f_3 + \tilde{r}_1$.

Przypadek 2: $t_1^2 + t_2^2 = \alpha, \; \alpha \neq 0$.
Załóżmy, że $t_1 \neq 0$. Przypadek $t_2 \neq 0$ jest symetryczny. Podstawmy

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1, \\ v_2 &= e_2, \\ v_3 &= (t_1^2 + t_2^2) \; h + t_1 \; e_3 + t_2 \; e_4, \\ v_4 &= h, \\ r &= e_4 + t_2 \; h. \end{aligned}$$

Wektory (v_1, v_2, v_4, v_4) rozpinają wówczas podalgebrę algebry $\mathfrak{g}$, która jest izomorficzna z algebrą Liego grupy $G_{1.2}$, oraz r rozpina centrum $\mathfrak{g}$. A zatem grupa G jest lokalnie izomorficzna z grupą $G_{1.2} \times \mathbb{R}$.

Przypadek 3: $\alpha, \; t_1, \; t_2 = 0$.
Wówczas wybrana baza (e_1, e_2, e_3, e_4, h) jest standardową bazą algebry Liego grupy $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^4$, oraz jej podgrupa H odpowiadająca podalgebrze $\mathfrak{h}$ to standardowo włożone $SO(2)$.

3.2.2. Trywialna reprezentacja izotropii

Będziemy postępować dokładnie tak jak w paragrafie 2.1.2. W tym przypadku, przestrzeń jednorodna jest grupą Liego G. Niech $\mathfrak{s}_{p,q}$ oznacza algebrę Liego grupy $\mathcal{S}_{p,q} \subseteq SO(4)$. Na mocy twierdzenia 1.1, koneksja Γ odpowiada pewnemu przekształceniu $\Lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{s}_{p,q} \subseteq \mathfrak{gl}(4)$, za którego pomocą torsja wyraża się wzorem

$$T_e(X,Y) = \Lambda(X) \cdot Y - \Lambda(Y) \cdot X - [X,Y]. \qquad (\bigstar)$$

Twierdzenie 1.1 daje również postać tensora krzywizny, które, uwzględniwszy powyższe równanie, przyjmuje postać

$$R_e(X,Y) = \Lambda T(X,Y). \tag{(R)}$$

Załóżmy, że forma torsji jest antysymetryczna, więc jest postaci

$$-T_\flat = t_1\ e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + t_2\ e^1 \wedge e^2 \wedge e^4 + t_3\ e^1 \wedge e^3 \wedge e^4 + t_4\ \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4.$$

Z kolei Λ jest pewnym funkcjonałem o wartościach w $\mathfrak{s}_{p,q} \simeq \mathbb{R}$, którego współczynniki w wybranej bazie oznaczmy przez $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Równanie (★) oraz tożsamości Jacobiego dają znów pewne ograniczenia na współczynniki $t_1, t_2, t_3, t_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

W przypadku, gdy p oraz q są niezerowymi liczbami, równania te implikują, że $\Lambda = 0$, a współczynniki t_i mogą być dowolne.

W przypadku, gdy $p = 1$ i $q = 0$, dostajemy dodatkowo rozwiązanie, w którym $T = 0$ i Λ jest dowolne oraz rozwiązanie, w którym $t_3, t_4, \lambda_1, \lambda_2 = 0$, a reszta jest dowolna.

Możliwe rozwiązania równań podsumowuje poniższa tabelka:

$(p,q) : p \perp q, \lvert q\rvert < \lvert p\rvert$	$\Lambda \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{s}_{p,q}$	$T_\flat \in \Lambda^3(\mathfrak{g})$
dowolne	$\Lambda = 0$	*dowolne*
$(p,q) = (1,0)$	*dowolne*	$T = 0$
$(p,q) = (1,0)$	$\Lambda = (\lambda_3\ e^3 + \lambda_4\ e^4) \otimes J$	$-T_\flat = \star(t_1\ e^4 - t_2\ e^3)$

Przypadek 1: $\Lambda = 0$.
Klasyfikacja wszystkich możliwych algebr Liego w pierwszym przypadku, w którym nawias Liego jest całkowicie antysymetryczny w pewnej metryce, wydaje się trudna. Natomiast nietrudno wykazać, że dowolna zwarta i półprosta algebra Liego wraz z metryką zadaną przez formę Killinga spełnia ten warunek (patrz [Zwe05]). Na mocy (R), krzywizna tu wychodzi zerowa.

Przypadek 2: $T = 0$, $(p,q) = (1,0)$, $\Lambda \neq 0$.
Wówczas łatwo policzyć, że algebra $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna z algebrą $\mathfrak{t}(2) \times \mathbb{R}$, gdzie $\mathfrak{t}(2)$ oznacza algebrę Liego górnotrójkątnych macierzy 2×2. Tensor krzywizny w tym przypadku również jest zerowy.

Przypadek 3: $(p,q) = (1,0), \Lambda = (\lambda_3\ e^3 + \lambda_4\ e^4) \otimes J, -T_\flat = \star(t_1\ e^4 - t_2\ e^3)$.
W przypadku generycznym, wychodzi $SO(3) \times \mathbb{R}$ lub $SO(2,1) \times \mathbb{R}$. Przypadki szcszególne to grupy $Heis \times \mathbb{R}$, $Eucl(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$ oraz wcześniej opisana grupa $G_{1.2}$. Tensor krzywizny jest postaci $R = (\lambda_3 t_1 + \lambda_4 t_2) e^1 \wedge e^2 \otimes J$.

Twierdzenie 3.3. *Niech (p,q) będzie parą względnie pierwszych liczb pierwszych. Załóżmy, że dana jest niezmiennicza $\mathcal{S}_{p,q}$-koneksja charakterystyczną na czterowymiarowej, riemannowskiej przestrzeni jednorodnej M. Wówczas zachodzi jedna z następujących możliwości*

- *geometria M jest trywialna (płaska),*
- *przestrzeń M jest grupą Liego z całkowicie antysymetrycznymi stałymi struktury,*
- $\{p,q\} = \{1,0\}$ *oraz przestrzeń M jest lokalnie izomorficzna z którąś z poniższych przestrzeni jednorodnych z odpowiednią $\mathcal{S}_{1,0}$-geometrią (dokładniejszy ich opis, wraz z opisem torsji oraz krzywizny, znajduje się wcześniej w tym rozdziale).*

	Przestrzeń jednorodna	*Parametry:* $t_1, t_2, \alpha \in \mathbb{R}$
1.1$_<$	$(SO(3) \oplus \mathbb{R}^2)/\mathcal{S}$	$t_1, t_2 \neq 0,\ \alpha < t_1^2 + t_2^2$
1.1$_>$	$(SO(2,1) \oplus \mathbb{R}^2)/\mathcal{S}$	$t_1, t_2 \neq 0,\ \alpha > t_1^2 + t_2^2$
1.1$^0_<$	$(SO(3) \oplus \mathbb{R}^2)/(\mathbb{1} \oplus SO(2))$	$\alpha < 0$
1.1$^0_>$	$(SO(2,1) \oplus \mathbb{R}^2)/(\mathbb{1} \oplus SO(2))$	$\alpha > 0$
1.2	$(G_{1.2} \times \mathbb{R})/SO(2)$	$(t_1, t_2) \neq (0,0)$
	Grupa	*Parametry:* $\Lambda \in \mathfrak{g}^* \otimes J,\ T_\flat \in \Lambda^3(\mathfrak{g}^*) \setminus \{0\}$
2.1	$T(2) \times \mathbb{R}$	$\Lambda \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$
2.2 a)	$SO(3) \times \mathbb{R}$	$t_1\lambda_3 + t_2\lambda_4 < t_1^2 + t_2^2$
2.2 b)	$SO(2,1) \times \mathbb{R}$	$t_1\lambda_3 + t_2\lambda_4 > t_1^2 + t_2^2$
2.3	$Heis \times \mathbb{R}$	$t_1 = \lambda_3, t_2 = \lambda_4$
2.4	$Eucl(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$	$\lambda_3 = t_1, t_2 = 0$
2.5	$G_{1.2}$	$t_1\lambda_3 + t_2\lambda_4 = t_1^2 + t_2^2, t_2 \neq 0$

4. $SO(2)$-geometrie charakterystyczne w wyższych wymiarach

4.1. Jednoznaczność istnienia $SO(2)$-koneksji charakterystycznej

Udowodnimy następujące twierdzenie, z którego wynika, że jeśli dana jest rozmaitość wraz z $SO(2)$-strukturą, to dopuszcza ona najwyżej jedną $SO(2)$-koneksję charakterystyczną.

Twierdzenie 4.1. *Niech $\mathcal{S}$ będzie jednowymiarową podgrupą Liego grupy $SO(n)$, oraz niech M będzie n-wymiarową, zorientowaną rozmaitością riemannowską wraz z pewną $\mathcal{S}$-strukturą. Wówczas, jeżeli na M istnieje $\mathcal{S}$-koneksja charakterystyczna, to jest ona wyznaczona jednoznacznie.*

Dowód Załóżmy, że ∇^1 oraz ∇^2 są dwiema $\mathcal{S}$-koneksjami charakterystycznymi. Niech V będzie przestrzenią styczną do rozmaitości M w dowolnym jej punkcie x. Tensor $\alpha = (\nabla^1 - \nabla^2)_x$ jest całkowicie antysymetryczny (tw. 1.4) oraz należy do przestrzeni $V^* \otimes \mathfrak{s}$, gdzie $\mathfrak{s} \subseteq \Lambda^2 V^* \simeq \mathfrak{so}(n)$ jest algebrą Liego grupy $\mathcal{S}$, rozpiętą przez pewną formę $S \in \Lambda^2 V^*$. A zatem, $\alpha \in \Lambda^3 V^* \cap V^* \otimes S$ jest postaci $X_\flat \otimes S$ dla pewnego wektora $X \in V$, gdzie $X_\flat = g(X, \,\cdot\,)$. Załóżmy, że $X \neq 0$. Dla dowolnych wektorów $Y, Z \in V$, zachodzi równość

$$\alpha(X,Y,Z) = g(X,X)\ S(Y,Z) = -g(X,Y)\ S(X,Z).$$

Ponieważ forma S jest niezerowa, więc istnieją Y, Z takie, że $S(Y,Z) \neq 0$. Wtedy $S(X,Z)$ też musi być różne od zera i, wstawiając $Y = X$ do powyższej równości, dostajemy, że $\alpha(X,X,Z) \neq 0$, co jest sprzecznością z antysymetrią α. A zatem $X = 0$, więc także $\alpha = 0$, co dowodzi, że koneksje ∇^1 oraz ∇^2 są równe w każdym punkcie x rozmaitości M. ∎

4.2. Przykłady niejednorodnych $SO(2)$-geometrii charakterystycznych w wyższych wymiarach

W tym rozdziale będziemy rozpatrywać $SO(2)$-struktury na rozmaitościach o dowolnym wymiarze, zadane przez najprostsze włożenie $SO(2) \hookrightarrow SO(n)$. Zadanie takiej struktury na n-wymiarowej rozmaitości jest oczywiście równoważne z określeniem metryki g, orientacji $\circlearrowleft$ oraz $n-2$ pól unormowanych i wzajemnie ortogonalnych $V_3, V_4, \ldots, V_n$. Konstrukcja trójwymiarowych $SO(2)$-geometrii charakterystycznych uogólnia się do tej sytuacji w następujący sposób.

Konstrukcja Niech $n \geq 3$ będzie liczbą naturalną. Niech $(S, \circlearrowleft, g)$ będzie zorientowaną powierzchnią riemannowską oraz dla $i = 3, \cdots n$, niech $p_i \colon \tilde{S}_i \to S$ będzie dowolną $SO(2)$-wiązką główną nad S wraz z koneksją Γ_i. Przez $t_i \,\epsilon\, C^\infty(S)$ oznaczmy funkcję krzywizny koneksji Γ_i.

Niech $\tilde{S} = \tilde{S}_3 \times_S \ldots \times_s \tilde{S}_n$. Jest to wiązka główna nad S z grupą strukturalną $\bigoplus_{i=3}^n SO(2)$.

Na rozmaitości $\tilde{S}$ określone są standardowe pola wertykalne $V_3, \ldots, V_n$ odpowiadające odpowiadające wektorom bazowym $0 \oplus \ldots \oplus J \oplus \ldots \oplus 0$ algebry $\bigoplus_{i=3}^n \mathfrak{so}(2)$. Na wiązce wertykalnej wiązki $\tilde{S}$ określmy metrykę taką, by pola V_i były wzajemnie ortogonalne i unormowane. Natomiast na przestrzeni horyzontalnej koneksji $\Gamma = \Gamma_3 \oplus \ldots \oplus \Gamma_n$ określamy metrykę przez przeciągnięcie metryki g z powierzchni S. W ten sposób określiliśmy metrykę $\tilde{g}$ na $\tilde{S}$.

Podobnie, standardowa orientacja na $\mathbb{R}^2 \oplus \bigoplus_{i=3}^n \mathfrak{so}(2)$ indukuje orientację rozmaitości $\tilde{S}$.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{E}, \tilde{\omega}) \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\tilde{\xi}"] & (E, \omega_{LC}) \arrow[d, "\xi"] \\
(\tilde{S}, \circlearrowleft, \tilde{g}, V_3, \ldots, V_n) \arrow[r, "p"] & (S, \circlearrowleft, g)
\end{tikzcd}$$

W ten sposób otrzymujemy $SO(2)$-strukturę $(\tilde{S}, \circlearrowleft, \tilde{g}, V_3, \ldots, V_n)$, która wyznacza $SO(2)$-wiązkę główną $\tilde{\xi} \colon \tilde{E} \to \tilde{S}$ baz z nią zgodnych. Natomiast struktura riemannowska na S wyznacza $SO(2)$-wiązkę główną $\xi \colon E \to S$ ortonormalnych baz zorientowanych wiązki stycznej do S. Przekształcenie $p \colon \tilde{S} \to S$ indukuje morfizm $\tilde{p}$ wiązki $\tilde{E}$ w wiązkę E, poprzez przyporządkowanie bazie $(X, Y, V_3, \ldots, V_n)$ przestrzeni T_xM bazy (p_*X, p_*Y) przestrzeni $T_{p(x)}S$.

Niech
$$\alpha = t_3\ (V_3)_\flat + \ldots + t_n\ (V_n)_\flat$$
będzie jednoformą formą na $\tilde{S}$, gdzie t_i jest funkcją krzywizny koneksji Γ_i.

Niech $\omega_{LC} \,\epsilon\, \Omega^1(E)$ będzie formą koneksji Levi-Civity powierzchni S, oraz $\kappa \,\epsilon\, C^\infty(S)$ funkcją krzywizny tej koneksji. Forma $\tilde{p}^*\omega_{LC}$ jest formą koneksji na wiązce $\tilde{\xi}$, a zatem także forma
$$\tilde{\omega} = \tilde{p}^*\omega_{LC} + \tilde{\xi}^*\alpha,$$
gdyż $\tilde{\xi}^*\alpha$ jest formą tensorialną. Będziemy rozpatrywać właśnie tę koneksję na wiązce $\tilde{\xi}$, która jest wyznaczona przez formę $\tilde{\omega}$ (dokładniej, przez $\tilde{\omega} \otimes J$).

Funkcje p^*t_i na $\tilde{S}$ oraz $\tilde{\xi}^*p^*t_i$ na $\tilde{E}$ indukowane przez t_i oznaczmy dla uproszczenia również symbolem t_i, analogicznie dla κ. Niech dS oznacza formę powierzchni rozmaitości S.

Twierdzenie 4.2. *Tak określona $SO(2)$-geometria na rozmaitości $\tilde{S}$ ma całkowicie antysymetryczną torsję równą $p^*dS \wedge \alpha$.*

Dowód jest zupełnie analogiczny do dowodu w przypadku trójwymiarowym.

Dowód Niech $\tilde{\theta} \,\epsilon\, \Omega^1(\tilde{E}) \otimes \mathbb{R}^n$ będzie formą tautologiczną na wiązce $\tilde{\xi}$. Oznacza to, że gdy $X \,\epsilon\, T_u\tilde{E}$, to wektor $\tilde{\xi}_*X$ w bazie u ma współrzędne $\tilde{\theta}^1(X), \ldots, \tilde{\theta}^n(X)$. A zatem, ponieważ dla $i \geq 3$, i-ta współrzędna wektora $\tilde{\xi}_*X$ w dowolnej bazie to $g(\tilde{\xi}_*X, V_i) = (V_i)_\flat(\tilde{\xi}_*X)$, więc
$$\tilde{\xi}^*(V_i)_\flat = \tilde{\theta}^i. \tag{1}$$

Jeżeli zaś $\theta \,\epsilon\, \Omega^1(P_0) \otimes \mathbb{R}^2$ jest formą tautologiczną na wiązce ξ, to z określenia przekształcenia $\tilde{p}$ wynika, że
$$\tilde{p}^*\theta = \pi_2 \circ \tilde{\theta}, \tag{2}$$

gdzie $\pi_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ jest rzutowaniem na dwie pierwsze współrzędne.

Dla $i = 3, \ldots, n$, forma $(V_i)_\flat \otimes J$ jest przeciągnięciem formy koneksji Γ_i na wiązce p_i. Skoro założyliśmy, że koneksja ta ma krzywiznę t_i, to $d(V_i)_\flat = p^*(t_i\, dS)$. Ponieważ $\tilde{\xi}^* d(V_i)_\flat = d\tilde{\theta}^i$, więc

$$d\tilde{\theta}^i = t_i\, \tilde{\xi}^* p^* dS. \tag{3}$$

Założenie, że κ jest krzywizną Gaussa powierzchni S może być inaczej sformułowane tak:

$$d\omega_{LC} = \kappa\, \xi^* dS,$$

skąd wynika równość

$$\tilde{p}^* d\omega_{LC} = \kappa\, \tilde{\xi}^* p^* dS, \tag{4}$$

Kolejna równość wynika z założenia, że ω_{LC} jest koneksją Levi-Civity na wiązce ξ:

$$\Theta = d\theta + (\omega_{LC} \otimes J) \wedge \theta = 0.$$

A zatem, korzystając z (2),

$$\pi_2\, d\tilde{\theta} + (\tilde{p}^* \omega_{LC} \otimes J) \wedge \tilde{\theta} = 0. \tag{5}$$

Z równości (3), (4), (5) oraz definicji formy koneksji, torsji i krzywizny na wiązce $\tilde{\xi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \tilde{p}^* \omega_{LC} + \tilde{\xi}^* \alpha, \\ \widetilde{\Theta} &= d\tilde{\theta} + (\tilde{\omega} \otimes J) \wedge \tilde{\theta}, \\ \widetilde{\Omega} &= d\tilde{\omega} \otimes J \end{aligned}$$

wynika łatwo, że

$$\begin{aligned} \widetilde{\Theta} &= \begin{pmatrix} \tilde{\theta}^2 \wedge \tilde{\xi}^* \alpha \\ \tilde{\xi}^* \alpha \wedge \tilde{\theta}^1 \\ t_3\, \tilde{\xi}^* p^* dS \\ \vdots \\ t_n\, \tilde{\xi}^* p^* dS \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\Omega} &= \tilde{\xi}^* \Big((\kappa + \sum_{i=3}^{n} t_i^2)\ p^* dS + \sum_{i=3}^{n} dt_i \wedge (V_i)_\flat \Big) \otimes J. \end{aligned}$$

To oznacza, że tensor torsji jest całkowicie antysymetryczny i odpowiada formie $p^* dS \wedge \alpha$. Kończy to dowód poprawności konstrukcji. ■

Literatura

[Aly05] Mikhail Alyurov. Aloff-wallach spaces: Volumes, curvatures, injectivity radii, 2005.

[AS58] W. Ambrose and I.M. Singer. On homogeneous Riemannian manifolds. *Duke Math. J.*, 25:647–669, 1958.

[Ber55] M. Berger. Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétès à conexion affine et des variétès riemanniennes. *Bull. Soc. Math. France*, 283:279–330, 1955.

[BN] M. Bobieński and P. Nurowski. Irreducible $SO(3)$-geometry in dimension five. *J. Reine. Angew. Math. (to appear)*.

[Bry87] R. Bryant. Metrics with exceptional holonomy. *Ann. of Math.*, 126:525–576, 1987.

[BS89] R. Bryant and S. Salamon. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy. *Duke Math. J.*, 58:829–850, 1989.

[CMS94] F. M. Cabrera, M. D. Monar, and A. F. Swann. Classification of G_2-Structures, 1994.

[DW59] Albrecht Dold and Hassler Whitney. Classification of oriented sphere bundles over a 4-complex. *Annals of Mathematics*, 69:667–677, 1959.

[FI02] Thomas Friedrich and Stefan Ivanov. Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory. *ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICS*, 6:303, 2002.

[GB72] A. Gray and R. B. Brown. Riemannian manifolds with holonomy group $Spin(9)$. *Differential Geometry*, pages 41–59, 1972.

[GHR] S. Gates, C. Hull, and M. Roček. Twisted multiplets and new supersymmetric nonlinear sigma models. *Nuclear Physics B*, 248:157–186.

[GPS97] G. W. Gibbons, G. Papadopoulos, and K. S. Stelle. HKT and OKT geometries on soliton black hole moduli spaces. *Nuclear Physics B*, 508:623, 1997.

[Hit74] N. Hitchin. Harmonic spinors. *Adv. in Math.*, 14:1–55, 1974.

[HO56] J. Hano and H. Ozeki. On the holonomy groups of linear connections. *Nagoya Math. J.*, 10:97–100, 1956.

[HP92] P. S. Howe and G. Papadopoulos. Finiteness and anomalies in (4,0) supersymmetric sigma models. *Nuclear Physics B*, 381:360, 1992.

[HP96] P. S. Howe and G. Papadopoulos. Twistor spaces for HKT manifolds. *Physics Letters B*, 379:80, 1996.

[IP01] S. Ivanov and G. Papadopoulos. Vanishing theorems and string backgrounds. *Classical and Quantum Gravity*, 18:1089, 2001.

[Joy96] D. Joyce. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. *J. Diff. Geom.*, 43:291–328, 1996.

[KN69] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry.* Interscience Publishers, New York, 1969.

[KV85] O. Kowalski and L. Vanhecke. Four-dimensional naturally reductive homogeneous spaces. *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino, Fasc. Speciale*, pages 223–232, 1985.

[KV87] O. Kowalski and L. Vanhecke. Classification of five-dimensional naturally reductive spaces. *Quart. J. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 37:445–463, 1987.

[MS74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic classes.* Princeton University Press, Princeton, 1974.

[Pap00] G. Papadopoulos. Brane solitons and hypercomplex structures, 2000.

[Pon45] L. Pontrjagin. Classification of some skew products. NS 47:322–325, 1945.

[Str86] A. Strominger. Superstrings with torsion. *Nucl. Phys.*, B 274:253, 1986.

[TV83] F. Tricerri and L. Vanhecke. *Homogeneous Structures on Riemannian Manifolds*. Cambridge University Press, 1983.

[Zwe05] B. Zweibach. Notes on lie algebras, 2005.