Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Sławomir Kolasiński
Nr albumu: 197876

CW-struktura przestrzeni pętli na grupach Lie

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Andrzeja Webera

Listopad 2007

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W początkowych rozdziałach niniejszej pracy przedstawione zostały znane wyniki dotyczące CW-rozkładu przestrzeni pętli ΩG dla zwartej grupy Lie G. Przestrzeń ΩG jest homotopijnie równoważna przestrzeni $\Omega_{alg} G$ przekształceń zapisaujących się w postaci wielomianów Laurenta. Każde takie przekształcenie można utożsamiać z pewną macierzą o współczynnikach w wielomianach Laurenta. W przypadku $G = U_n$ grupa $\Omega_{alg} G$ posiada rozkład Bruhat konstruowany analogicznie jak dla grupy $GL_n(\mathbb{C})$. Okazuje się, że ten sam rozkład można otrzymać utożsamiając $\Omega_{alg} G$ z podzbiorem pewnego nieskończonego Grassmannianu i stosując rozkład na komórki Schuberta. W ostatnim rozdziale przedstawiony jest główny wynik tej pracy. Podany jest dokładny opis przekształceń charakterystycznych CW-rozkładu $\Omega_{alg} SU_2$.

Słowa kluczowe

grupa pętli, grupa Lie, grupa algebraiczna, CW-kompleks, rozkład Bruhat

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

22E65 Infinite-dimensional Lie groups and their Lie algebras
14L40 Other algebraic groups (geometric aspects)

Tytuł pracy w języku angielskim

CW-structure of a space of loops on a Lie group

Spis treści

Wstęp

Przestrzeń *wolnych pętli* ΛG na grupie Lie G to przestrzeń funkcyjna wszystkich gładkich przekształceń z okręgu S^1 w G. Na ΛG jest struktura grupy zadana przez mnożenie punktowe. W ΛG można wyróżnić podgrupę *pętli związanych* ΩG, tj. takich $\omega \in \Lambda G$, że $\omega(1) = 1_G$.

Przestrzenie pętli są najprostszymi przykładami nieskończenie wymiarowych grup Lie. Naturalnym kontekstem, w którym się pojawiają są uproszczone modele kwantowych teorii pola. Innym zastosowaniem grup pętli jest badanie osobliwości pewnych równań różniczkowych zwyczajnych. Nad tymi aspektami nie będziemy się jednak zatrzymywać.

W niniejszej pracy zajmiemy się badaniem struktury ΩG z topologicznego punktu widzenia. Wiadomo (zobacz [Mil59]), że przestrzeń odwzorowań między zwartymi rozmaitościami ma typ homotopijny CW-kompleksu. CW-rozkład przestrzeni ΩG dla zwartej, półprostej grupy G jest znany i został przedstawiony np. w [PS88]. Nie zostały jednak podane dokładnie przekształcenia charakterystyczne tego rozkładu. Autorzy opisali jedynie komórki i udowodnili, że brzegi tych komórek leżą w niżej wymiarowych szkieletach. Dla grupy $G = SU_2$ przekształcenia charakterystyczne dają się wypisać wzorami. Jest to główny wynik opisany w tej pracy.

Rozdział 1 służy tylko ustaleniu notacji i podaniu elementarnych faktów dotyczących przestrzeni pętli. Definiujemy *pętle algebraiczne* jako takie, które zapisują się w postaci wielomianów Laurenta.

$$\Lambda_{alg}G = \left\{ f \in C^\infty(S^1, G) \mid \exists n \; f(z) = \sum_{-n}^{n} A_i z^i \right\} \subseteq C^\infty(S^1, G) = \Lambda G\,.$$

Podobnie jak dla pętli gładkich, w $\Lambda_{alg}G$ możemy wyróżnić podgrupę *algebraicznych pętli związanych.*

$$\Omega_{alg}G = \{ f \in \Lambda_{alg}G \mid f(1) = 1_G \}\ .$$

Dla $G \leqslant U_n$ przestrzenie $\Lambda_{alg}G$ oraz $\Omega_{alg}G$ tworzą grupy. Okazuje się, że $\pi : \Lambda_{alg}G \to \Omega_{alg}G$ dane przez $\pi(f) = f \centerdot f(1)^{-1}$ jest trywialną G-wiązką główną, więc $\Lambda_{alg}G \cong G \times \Omega_{alg}G$.

W rozdziale 2 przedstawione zostały znane wyniki dotyczące homotopijnej równoważności ΩG z podprzestrzenią złożoną z pętli algebraicznych $\Omega_{alg}G$. Wiadomo, że zwarta grupa Lie G oraz jej kompleksyfikacja $G_{\mathbb{C}}$ są homotopijnie równoważne. Wynika stąd, że również ΩG i $\Omega G_{\mathbb{C}}$ są homotopijnie równoważne. Podobnie $\Lambda G \simeq \Lambda G_{\mathbb{C}}$.

W §2.2 definiujemy model $\mathcal{X}^n$ dla $\Lambda_{alg}U_n$. Niech $H = L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ będzie przestrzenią Hilberta. Definiujemy

$$\begin{aligned} H_m &:= \overline{\mathrm{lin}}\{\epsilon_j z^i \mid i \geqslant m,\ j = 1, \dots, n\}\,, \\ Gr(H) &:= \{W \subseteq H \mid \exists m\ H_m \subseteq W \subseteq H_{-m}\}\,, \\ \mathcal{X}^n &:= \{W \in Gr(H) \mid zW \subseteq W\}\ . \end{aligned}$$

Grupa $\Lambda_{alg}U_n$ działa tranzytywnie na $\mathcal{X}^n$ ze stabilizatorem złożonym z pętli stałych. Stąd $\Lambda_{alg}U_n/U_n \cong \mathcal{X}^n$. Działanie to rozszerza się do działania kompleksyfikacji $\Lambda_{alg}GL_n(\mathbb{C})$.

Jeśli $G_{\mathbb{C}}$ jest zespoloną grupą algebraiczną, to grupę elementów odwracalnych $\Lambda_{alg}G_{\mathbb{C}}$ można utożsamiać z $G_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z^{-1}, z])$. Okazuje się, że stabilizatorem działania $GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z])$ na $\mathcal{X}^n$ jest podgrupa $GL_n(\mathbb{C}[z])$. Otrzymujemy w ten sposób dyfeomorfizmy

$$\Omega_{alg}U_n \cong \Lambda_{alg}U_n/U_n \cong \mathcal{X}^n \cong GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z])/GL_n(\mathbb{C}[z])\,.$$

Na koniec rozdziału 2 przytaczamy twierdzenie udowodnione w [PS88], które mówi, że $\Omega_{alg}G$ jest homotopijnie równoważna z ΩG.

W rozdziale 3 konstruujemy CW-rozkład $\Omega_{alg}U_n$ na dwa sposoby przytaczając rozumowania z [Pre80] oraz [PS88]. Przestrzeń $GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z])/GL_n(\mathbb{C}[z]) \cong \Omega_{alg}U_n$ analogicznie jak rozmaitość flag $GL_n(\mathbb{C})/B$ (B to grupa macierzy górnotrójkątnych), posiada rozkład Bruhat. Rozkład ten definiuje CW-strukturę przestrzeni $\Omega_{alg}G$. Co ciekawe ten sam rozkład można otrzymać stosując do przestrzeni $\mathcal{X}^n$, standardowe metody podziału Grassmannianu $Gr(H)$ na komórki Schuberta. Komórki w tym rozkładzie są indeksowane ciągami $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$. Będziemy je oznaczać przez $\Omega_{\underline{k}}$.

Na koniec rozdziału 3 konstruujemy U_n-wiązkę główną $\mathcal{V}^n \to \mathcal{X}^n$ analogicznie jak się to robi dla zwykłego Grassmannianu. Przestrzeń $\mathcal{V}^n$ jest pewnego rodzaju rozmaitością Stiefela, zawierającą układy n ortonormalnych wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$ takich, że $\langle v_i | z^k v_j \rangle = \delta^i_j \delta^0_k$. Powstała wiązka jest izomorficzna z $\Lambda_{alg}U_n \to \Omega_{alg}U_n$, więc w szczególności jest trywialna.

Opis komórek podany w rozdziale 3 pozwoli w rozdziale 4 skonstruować przekształcenia charakterystyczne CW-rozkładu $\Omega_{alg}SU_2$. Modelem $\Omega_{alg}SU_n$ będzie przestrzeń

$$\mathcal{Y}^n := \{W \in \mathcal{X}^n \mid \forall p \ (H_p \subseteq W \subseteq H_{-p} \Rightarrow \dim W/H_p = \dim H_{-p}/W)\}\ .$$

Podobnie jak dla $\mathcal{X}^n$ istnieje tranzytywne działanie $\Lambda_{alg}SU_n$ na $\mathcal{Y}^n$ ze stabilizatorem zawierającym dokładnie pętle stałe. Komórki w rozkładzie Bruhat $\Omega_{alg}SU_n$ są także komórkami rozkładu $\Omega_{alg}U_n$. Będą to dokładnie te komórki $\Omega_{\underline{k}}$, których indeksy $\underline{k}$ sumują się do 0. Dla $\Omega_{alg}SU_2$ mamy zatem tylko komórki o indeksach postaci $(p, -p)$ oraz $(-p, p)$. Komórka $\Omega_{(p,-p)}$ ma wymiar $4p-2$, a $\Omega_{(-p,p)}$ ma wymiar $4p$, więc mamy po jednej komórce w każdym wymiarze parzystym. Niech

$$\mathcal{A} := \left\{ \left(\begin{array}{cc} c & -\bar{b}z \\ bz^{-1} & \bar{c} \end{array} \right) \middle| |c| < 1,\ b = \sqrt{1 - |c|^2} \in \mathbb{R}^+ \right\} \subseteq \Lambda_{alg}SU_2\,,$$
$$\mathcal{B} := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{array} \right) \middle| |a| < 1,\ b = -\sqrt{1 - |a|^2} \in \mathbb{R}^- \right\} \subseteq \Lambda_{alg}SU_2\,.$$

Wówczas $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są homeomorficzne z dyskiem dwuwymiarowym. Okazuje się, że obrazem iloczynu $2p$ czynników $\pi(\mathcal{B}\mathcal{A}\cdots\mathcal{B}\mathcal{A})$ jest komórka $\Omega_{(-p,p)}$, a obrazem $(2p-1)$ czynników $\pi(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}\cdots\mathcal{B}\mathcal{A})$ jest komórka $\Omega_{(p,-p)}$. Ponadto przekształcenia $\psi_{(-p,p)} : (\mathcal{B} \times \mathcal{A})^p \to \Omega_{alg}SU_2$ oraz $\psi_{(p,-p)} : \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{A})^{p-1} \to \Omega_{alg}SU_2$ dane wzorami

$$\psi_{(-p,p)}(B_1, A_1, \ldots, B_p, A_p) = \pi(B_1A_1 \cdots B_pA_p)\,,$$
$$\psi_{(p,-p)}(A_1, B_2, A_2 \ldots, B_{p-1}, A_{p-1}) = \pi(B_1A_1 \cdots B_{p-1}A_{p-1})$$

są homeomorfizmami na swoje obrazy oraz przedłużają się w sposób ciągły na domknięcia swoich dziedzin. Przedłużenie $\psi_{\underline{k}}$ oznaczymy przez $\overline{\psi}_{\underline{k}}$. Główny wynik tej pracy mówi, że obrazem $\psi_{\underline{k}}$ jest komórka $\Omega_{\underline{k}}$, zaś brzeg dziedziny $\overline{\psi}_{\underline{k}}$ jest przekształcany w niżej wymiarowe komórki. W takim razie $\overline{\psi}_{\underline{k}}$ są przekształceniami charakterystycznymi CW-rozkładu $\Omega_{alg}SU_2$.

Uwaga: warto zauważyć, że przestrzenie ΩSU_2 i $\mathbb{CP}^\infty$ nie są homotopijnie równoważne. Obie mają po jednej komórce w każdym wymiarze parzystym ale ich algebry kohomologii różnią się w strukturze multiplikatywnej.

Rozdział 1

Notacja i podstawowe pojęcia

W niniejszej pracy przez $X \cong Y$ będziemy oznaczać izmorfizm obiektów w danej kategorii. Jeśli nie będzie jasne o jakiej kategorii mowa, będzie to wyraźnie zaznaczone. Przez $X = Y$ będziemy rozumieli identyczność dwóch obiektów. Jeśli X i Y będą przestrzeniami topologicznymi, to $X \simeq Y$ będzie oznaczać homotopijną równoważność X i Y.

Niech G będzie grupą Lie, a X dowolną przestrzenią topologiczną. Przez $\mathrm{map}(X, G)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich ciągłych odwzorowań z X w G z topologią zwarto-otwartą. Na $\mathrm{map}(X, G)$ można wprowadzić strukturę grupy przez mnożenie punktowe. W przypadku gdy $X = S^1$ przestrzeń $\mathrm{map}(S^1, G)$ będziemy nazywać *przestrzenią wolnych pętli* na G. Przestrzeń ta nie ma jednak pożądanych przez nas własności. Wygodniej będzie zajmować się homotopijnie równoważną przestrzenią $C^\infty(S^1, G)$ wszystkich pętli gładkich, którą będziemy oznaczać ΛG. Oczywiście ΛG też ma strukturę grupy. Ponadto jeśli G jest zanurzona w $\mathbb{C}^N$, to elementy ΛG są jednostajnymi granicami swoich szeregów Fouriera. Dla $f \in \Lambda G$ można napisać

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_i z^i \,.$$

Okrąg S^1 będziemy traktować jako podzbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ o module 1. Przez ΩG oznaczymy przestrzeń *pętli związanych*, czyli takich $f \in \Lambda G$, że $f(1) = e$, gdzie $e \in G$ jest elementem neutralnym grupy. Pętle związane także tworzą grupę.

Jeśli $G_{\mathbb{C}}$ jest podgrupą $GL_n(\mathbb{C})$, to możemy rozważać podprzestrzenie $\Lambda_{alg} G_{\mathbb{C}} \subseteq \Lambda G_{\mathbb{C}}$ oraz $\Omega_{alg} G_{\mathbb{C}} \subseteq \Omega G_{\mathbb{C}}$ złożone z pętli, które zapisują się w postaci skończonych wielomianów Laurenta.

$$f \in \Lambda_{alg} G_{\mathbb{C}} \iff f(z) = \sum_{-m}^{m} A_i z^i \ \text{ dla pewnych } \ A_i \in M_{n \times n}(\mathbb{C})\,,$$
$$f \in \Omega_{alg} G_{\mathbb{C}} \iff f \in \Lambda_{alg} G_{\mathbb{C}} \text{ oraz } f(1) = I\,.$$

Jeśli G jest podgrupą grupy unitarnej U_n, to f^{-1} zapisuje się jako ($A^\star$ oznacza tu sprzężenie hermitowskie, czyli $A^\star = \overline{A^t}$)

$$f^{-1}(z) = f^\star(z) = \sum_{-m}^{m} A_i^\star z^{-i}\,. \tag{1.1}$$

Mamy zatem strukturę grupy na $\Lambda_{alg} G$ oraz $\Omega_{alg} G$.

W ogólności jeśli $G_{\mathbb{C}}$ jest podgrupą $GL_n(\mathbb{C})$ to elementy $\Lambda G_{\mathbb{C}}$ zapisujące się jako wielomiany Laurenta nie tworzą grupy, gdyż element odwrotny do wielomianu Laurenta nie musi być wielomianem Laurenta. W istocie elementy odwracalne $\Lambda G_{\mathbb{C}}$ to dokładnie takie pętle ω, że $\det \omega$ jest odwracalny w pierścieniu $\mathbb{C}[z^{-1}, z]$.

Zauważmy, że istnieje następujący krótki ciąg dokładny homomorfizmów grup

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega G \arrow[r] & \Lambda G \arrow[r, "ev_1"] & G \arrow[l, dashed, bend left, "c"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

gdzie ev_1 to ewaluacja w jedynce, a c to włożenie na przekształcenia stałe. Z istnienia przekroju $c : G \to \Omega G$ wynika, że $\Omega G \cong \Lambda G / G$. Jeśli $G \leqslant U_n$ to takie samo rozumowanie można zastosować do $\Lambda_{alg} G$ i $\Omega_{alg} G$. Otrzymamy wtedy

$$\Omega_{alg} G \cong \Lambda_{alg} G / G\,. \tag{1.3}$$

Jeśli X i Y są rozmaitościami algebraicznymi, to przez $\mathrm{alg}(X, Y)$ będziemy oznaczać przestrzeń odwzorowań algebraicznych z X w Y. Przez $\mathbb{C}^{\star}$ oznaczamy grupę elementów odwracalnych $\mathbb{C}$. Jako rozmaitość algebraiczna będzie to podzbiór $\mathbb{C}^2$ par (z_1, z_2) spełniających równanie $z_1 z_2 = 1$. Podobnie $GL_n(\mathbb{C})$ jako rozmaitość algebraiczna to podzbiór $\mathbb{C}^{n^2+1}$ opisany przez

$$GL_n(\mathbb{C}) = \Big\{ (z_1, \ldots, z_{n^2}, d) \in \mathbb{C}^{n^2+1} \;\Big|\; \det(z_1, \ldots, z_{n^2}) d = 1 \Big\}\,.$$

Dokładnie tak samo opisuje się $GL_n(R)$ jeśli R jest dowolnym pierścieniem. Jeśli na przykład $R = \mathbb{C}[z^{-1}, z]$, to $GL_n(R)$ składa się z przekształceń $f : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to GL_n(\mathbb{C})$ takich, że zarówno f jak i f^{-1} zapisują się jako wielomiany Laurenta.

Fakt 1.0.1 *Jeśli $G_{\mathbb{C}} \leqslant GL_n(\mathbb{C})$ jest zespoloną grupą algebraiczną, to*

$$\mathrm{alg}(\mathbb{C}^{\star}, G_{\mathbb{C}}) = G_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z^{-1}, z])\,. \tag{1.4}$$

Dowód: Jeśli $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{n^2+1}$ jest wielomianem zmiennych (z_1, z_2), to f można zapisać w postaci macierzowej

$$f(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{N} (A_i, d_i) z^i = \Big(\left(f_{ij}(z_1, z_2)\right)_{n\times n}, d(z_1, z_2) \Big)\,.$$

Po obcięciu do $\mathbb{C}^{\star}$ elementy $\Big((f_{ij})_{n\times n}, d \Big)$ spełniają równania $G_{\mathbb{C}}$, zatem podstawiając $(z_1, z_2) = (z^{-1}, z)$ otrzymamy

$$\left(\Big(f_{ij}(z^{-1}, z) \Big)_{n\times n}, d(z^{-1}, z) \right) \in G_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z^{-1}, z])\,.$$

Z drugiej strony mając $\Big((f_{ij}(z))_{n\times n}, d(z) \Big) \in G_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z^{-1}, z])$ łatwo skonstruować wielomian $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{n^2+1}$. Przykładowo można to zrobić zastępując w f_{ij} i w d wystąpienia z^i przez z_1^i dla $i < 0$, a przez z_2^i dla $i \geqslant 0$. $\square$

Wniosek 1.0.2 *Elementy odwracalne w $\Lambda_{alg} G_{\mathbb{C}}$ to dokładnie te pętle, które są obcięciami przekształceń $f \in \mathrm{alg}(\mathbb{C}^{\star}, G_{\mathbb{C}})$ do okręgu jednostkowego. Zbiór elementów odwracalnych w $\Lambda_{alg} G_{\mathbb{C}}$ można zatem utożsamiać z $G_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z^{-1}, z])$.*

Niech $\overline{\mathbb{C}}$ oznacza sferę Riemanna. Warto w tym miejscu zauważyć, że $G_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z])$ odpowiadają takim pętlom, które rozszerzają się do funkcji holomorficznych na $\mathbb{C}$, zaś $G_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z^{-1}])$ pętlom, które rozszerzają się do funkcji holomorficznych na $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Często wygodnie będzie posługiwać się zbiorem wszystkich szeregów postaci

$$\sum_{i=-m}^{\infty} a_i z^i \ ,$$

który oznaczymy przez $\mathbb{C}[z^{-1}, z]]$. Zauważmy, że $\mathbb{C}[z^{-1}, z]]$ jest po prostu ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{C}[[z]]$.

Zbiory $\mathbb{R}^+$ i $\mathbb{R}^-$ to liczby rzeczywiste dodatnie bez zera i ujemne bez zera odpowiednio. Podobnie $\mathbb{N}^+$ oznaczać będzie zbiór liczb naturalnych różnych od 0.

Na koniec, dla ustalenia notacji, podamy definicje kilku podstawowych grup Lie. Niech $\mathbb{H}$ oznacza algebrę kwaternionów, a $J_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$. Jeśli A jest macierzą o współczynnikach w $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$, to przez $A^\star$ oznaczać będziemy macierz transponowaną i sprzężoną, czyli $\overline{A^t}$. Mamy następujące grupy zwarte:

$$\begin{aligned}
U_n &:= \{g \in GL_n(\mathbb{C} \mid g^\star g = I\} \ , \\
SU_n &:= \{g \in U_n \mid \det g = 1\} \ , \\
Sp_n &:= \{g \in GL_n(\mathbb{H}) \mid g^\star g = I\} \ , \\
SO_n &:= \left\{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det g = 1, g^t g = I\right\}
\end{aligned}$$

oraz ich kompleksyfikacje:

$$\begin{aligned}
GL_n(\mathbb{C}) &:= \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det g = 1\} \ , \\
SL_n(\mathbb{C}) &:= \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det g = 1\} \ , \\
Sp_n(\mathbb{C}) &:= \left\{g \in SL_{2n}(\mathbb{C}) \mid g^t J_{n,n} g = J_{n,n}\right\} \ , \\
SO_n(\mathbb{C}) &:= \left\{g \in SL_n(\mathbb{C}) \mid g g^t = I\right\} \ .
\end{aligned}$$

Rozdział 2

Pętle gładkie i algebraiczne na grupie algebraicznej

Głównym celem tego rozdziału jest przypomnienie znanych wyników dotyczących homotopijnej równoważności przestrzeni pętli gładkich i przestrzeni pętli algebraicznych na grupie Lie. Przytoczymy tu tylko twierdzenia odwołując się do bibliografii i nie podając pełnych dowodów. Pokażemy najpierw, że homotopijnie nie ma różnicy, czy będziemy zajmować się pętlami na grupie zwartej czy na jej kompleksyfikacji. Następnie omówimy model dla $\Omega_{alg}G$ będący podzbiorem pewnego Grassmannianu i podamy twierdzenie o równoważności ΩG i $\Omega_{alg}G$.

2.1. Homotopijna równoważność ΩG i $\Omega G_{\mathbb{C}}$

W dalszym toku rozważań $G_{\mathbb{C}}$ będzie zawsze jedną z klasycznych, liniowych grup algebraicznych (np. $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$, $Sp_n(\mathbb{C})$) zaś G jej maksymalną zwartą podgrupą (np. U_n, SU_n, $SO_n(\mathbb{R})$, Sp_n). Odpowiednio przez $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ będziemy oznaczać algebrę Lie $G_{\mathbb{C}}$, zaś przez $\mathfrak{g}$ algebrę Lie G.

Jeśli $G_{\mathbb{C}}$ jest półprosta to posiada tzw. *rozkład Cartana.* Niech $B : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ będzie formą Killinga algebry $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Inwolucję $\theta : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ taką, że forma

$$B_\theta(X, Y) := -B(X, \theta Y)$$

jest całkowicie dodatnio określona, będziemy nazywać *inwolucją Cartana.* Ogólnie wiadomo, że dla każdej półprostej, zespolonej algebry Lie istnieje inwolucja Cartana. Rozkład $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{p}$ na podprzestrzenie własne θ o wartościach własnych $+1$ i -1 odpowiednio, będziemy nazywać *rozkładem Cartana* algebry Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Jeśli założymy dodatkowo, że $G_{\mathbb{C}}$ ma skończone centrum, to podgrupa $K \leqslant G_{\mathbb{C}}$ odpowiadająca algebrze $\mathfrak{t}$ będzie maksymalną, zwartą podgrupą $G_{\mathbb{C}}$. Twierdzenie o rozkładzie Cartana mówi, że przekształcenie

$$\begin{aligned} K \times \mathfrak{p} &\to G_{\mathbb{C}}\,, \\ (k, X) &\mapsto k \exp X \end{aligned}$$

jest dyfeomorfizmem. Wynika stąd w szczególności, że $G_{\mathbb{C}}$ jest homotopijnie równoważna z K. Dokładniejsze omówienie tego tematu można znaleźć w [Kna96] w rozdziale VI §2 i §3.

Grupy $SL_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$ oraz $Sp_n(\mathbb{C})$ są półproste i mają skończone centra. Grupa $GL_n(\mathbb{C})$ jest dyfeomorficzna z produktem $SL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\star$, więc jest homotopijnie równoważna z przestrzenią $SU_n \times S^1 \cong U_n$.

Pokazaliśmy, że $G_{\mathbb{C}} \simeq G$. Wynika stąd od razu, że przestrzenie $\mathrm{map}(X, G)$ i $\mathrm{map}(X, G_{\mathbb{C}})$ oraz $\mathrm{map}_\star(X, G)$ i $\mathrm{map}_\star(X, G_{\mathbb{C}})$ są homotopijnie równoważne dla dowolnej przestrzeni topologicznej X, czyli w szczególności $\Lambda G \simeq \Lambda G_{\mathbb{C}}$ oraz $\Omega G \simeq \Omega G_{\mathbb{C}}$. Z „homotopijnego punktu widzenia" nie ma zatem różnicy czy będziemy zajmować się pętlami na G czy na $G_{\mathbb{C}}$.

2.2. Przestrzeń $\Omega_{alg}(G)$ jako podzbiór Grassmannianu

Niech $H = L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$. Wybierzmy bazę ortonormalną $H = \overline{\mathrm{lin}}\{z^i \epsilon_j \mid i \in \mathbb{Z},\ j = 1 \dots n\}$, gdzie $\{\epsilon_j \mid j = 1 \dots n\}$ to standardowa baza $\mathbb{C}^n$. Oznaczmy przez H_m podprzestrzeń rozpiętą przez $\{z^i \epsilon_j \mid i \geqslant m,\ j = 1 \dots n\}$. Inaczej mówiąc, elementami H_m są szeregi postaci $\sum_{i=m}^{\infty} a_i z^i$, gdzie $a_i \in \mathbb{C}^n$. Zauważmy, że mnożenie przez z^k jest izometrią w H dla każdego k, oraz że $z^k H_0 = H_k$.

Przez $Gr(H)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich podprzestrzeni $W \subseteq H$ takich, dla których istnieje $m \in \mathbb{Z}$, że $H_m \subseteq W \subseteq H_{-m}$. Każda taka podprzestrzeń W może być traktowana jako element zwykłego Grassmannianu $Gr(H_{-m}/H_m) \cong Gr(\mathbb{C}^{2mn})$. Można więc skonstruować system prosty

$$\mathrm{pt} = Gr(H_0/H_0) \hookrightarrow Gr(H_{-1}/H_1) \hookrightarrow Gr(H_{-2}/H_2) \hookrightarrow Gr(H_{-3}/H_3) \hookrightarrow \cdots$$

i wprowadzić topologię granicy prostej na $Gr(H)$.

Jeśli $G \leqslant U_n$, to $\Lambda_{alg} G$ jest grupą i mamy oczywiste działanie $\Lambda_{alg}(G)$ na H przez mnożenie punktowe. Dokładniej, jeśli $\gamma \in \Lambda_{alg}(G)$ i $v \in H$, to $(\gamma v)(z) = \gamma(z) v(z)$. To działanie indukuje też działanie $\Lambda_{alg} G$ na $Gr(H)$. Jeśli $W \in Gr(H)$ i $W = \overline{\mathrm{lin}}\{v_i\}$ to $\gamma W = \overline{\mathrm{lin}}\{\gamma v_i\}$. Łatwo zobaczyć, że takie działanie jest dobrze zdefiniowane, czyli że $\gamma W \in Gr(H)$. Rozpatrywane przez nas grupy zwarte są oczywiście podgrupami U_n. Ogólnie z twierdzenia *Petera-Weyla* ([CSM95], część II, Twierdzenie 9.4) wynika, że każdą zwartą grupę Lie można traktować jako podgrupę U_k dla pewnego k. Zajmiemy się teraz opisem $\Omega_{alg} U_n$.

Definicja 2.2.1

$$\mathcal{X}^n := \{W \in Gr(H) \mid zW \subseteq W\}\ .$$

Okazuje się, że $\mathcal{X}^n$ jest dobrym modelem dla $\Omega_{alg} U_n$ o czym mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.2 ([Pre80], Twierdzenie 3.1) *Grupa $\Lambda_{alg} U_n$ działa tranzytywnie na $\mathcal{X}^n$. Stabilizatorem H_0 przy tym działaniu jest podgrupa pętli stałych, stąd*

$$\mathcal{X}^n \cong \Lambda_{alg} U_n / U_n\,.$$

Przytoczymy teraz dowód powyższego twierdzenia tak jak został on przeprowadzony w [Pre80]. Szczegóły dowodu będą przydatne w dalszej części tej pracy.

Niech $W \in \mathcal{X}^n$. Przez $W \ominus zW$ oznaczać będziemy ortogonalne dopełnienie zW w W. Niech $x \in S^1$. Przez $ev_x : W \ominus zW \to \mathbb{C}^n$ oznaczać będziemy ewaluację w x, czyli

$$ev_x(f) := f(x)\,.$$

Lemat 2.2.3 ([Pre80], Lemat 3.2) *Dla każdego $x \in S^1$ przekształcenie ev_x jest izomorfizmem i izometrią. W szczególności $W \ominus zW \cong \mathbb{C}^n$.*

Dowód lematu 2.2.3: Pokażemy najpierw, że ev_x jest epimorfizmem. Niech $m \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $H_m \subseteq W \subseteq H_{-m}$. Mnożenie przez z^p jest izometrią liniową w H, więc

$$ev_x(W \ominus zW) = ev_x(z^p W \ominus z^{p+1} W)\,. \tag{2.1}$$

Zauważmy, że

$$W \ominus z^p W = (W \ominus zW) \oplus (zW \ominus z^2 W) \oplus \ldots \oplus (z^{p-1} W \ominus z^p W)\,.$$

Załóżmy, że $ev_x : W \ominus zW \to \mathbb{C}^n$ nie jest epimorfizmem. Wówczas

$$\begin{aligned} ev_x(W \ominus z^{2m+1}W) &= ev_x(W \ominus zW) + ev_x(zW \ominus z^2W) + \ldots + ev_x(z^{2m}W \ominus z^{2m+1}W) \\ &\overset{2.1}{=} ev_x(W \ominus zW)\,. \end{aligned}$$

Zatem $ev_x : W \ominus z^{2m+1}W \to \mathbb{C}^n$ też nie jest epimorfizmem. Otrzymujemy sprzeczność, gdyż $H_m \ominus H_{m+1} \subseteq W \ominus z^{2m+1}W$, a $ev_x : H_m \ominus H_{m+1} \to \mathbb{C}^n$ oczywiście jest epimorfizmem.

Ponieważ $H_m \subseteq W \subseteq H_{-m}$, więc $H_{m+1} \subseteq zW \subseteq H_{-m+1}$. Zatem $W \ominus zW \subseteq H_{-m}$ oraz $W \ominus zW \perp H_{m+1}$. Stąd $W \ominus zW$ jest co najwyżej $2(m+1)n$ wymiarowa. Niech $\{v_1, \ldots, v_N\}$ będzie bazą ortonormalną $W \ominus zW$. Każdy z wektorów v_i zapisuje się jako

$$v_i(z) = \sum_r v_{ir} z^r$$

gdzie v_{ir} są wektorami w $\mathbb{C}^n$. W takim razie

$$\begin{aligned} \langle v_k(x) | v_l(x) \rangle &= \sum_{r,s} \langle v_{kr} | v_{ls} \rangle \, x^{r-s} \\ &= \sum_p x^p \left(\sum_r \left\langle v_{kr} | v_{l(r+p)} \right\rangle \right) \\ &= \sum_p x^p \, \langle v_k | z^p v_l \rangle_H = \delta_k^l\,. \end{aligned}$$

Dostajemy $\|w\|_H^2 = \|w(x)\|^2$ dla każdego $w \in W \ominus zW$. Stąd $ev_x : W \ominus zW \to \mathbb{C}^n$ jest izometrią, zatem jest mono, czyli $\dim(W \ominus zW) = n$. $\square$

Dowód 2.2.2: Niech $f \in \Lambda_{alg} U_n$, wówczas f można przedstawić jako

$$f(z) = \sum_{i=-m}^{m} A_i z^i\,.$$

W takim razie

$$f^{-1}(z) = \sum_{i=-m}^{m} A_i^\star z^{-i}\,.$$

Niech $W \in \mathcal{X}^n$, wtedy istnieje p takie, że $H_p \subseteq W \subseteq H_{-p}$. Zauważmy, że $H_{p+m} \subseteq fW \subseteq H_{-p-m}$. Ponadto $z(fW) = f(zW)$, więc $z(fW) \subseteq fW$. Zatem działanie $\Lambda_{alg} U_n$ na $\mathcal{X}^n$ jest dobrze określone. Pokażemy, że jest ono tranzytywne i że stabilizatorem H_0 jest podgrupa pętli stałych.

Jeśli f należy do stabilizatora H_0, to $fH_0 = H_0 = f^{-1}H_0$. Jeśli $fH_0 = H_0$, to f musi być postaci $f(z) = \sum_{i=0}^m A_i z^i$ oraz jeśli $f^{-1}H_0 = H_0$, to $f^{-1}(z) = \sum_{i=-m}^0 A_i^\star z^{-i}$. Zatem $A_i = 0$ dla $i \neq 0$. Utożsamiając pętle stałe z elementami U_n, możemy napisać $f \in U_n$.

Pozostaje pokazać, że działanie jest tranzytywne. Z lematu 2.2.3 wiemy, że ev_1 jest izometrią. Niech $v_i = ev_1^{-1}(\epsilon_i)$, gdzie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ to baza standardowa $\mathbb{C}^n$. Ponieważ ev_1 była izometrią, więc $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę ortonormalną $W \ominus zW$. Połóżmy

$$f_W(z) = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1(z) & \cdots & v_n(z) \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

W każdym punkcie $z \in S^1$ możemy napisać $f_W(z) = (ev_z(v_1), \dots, ev_z(v_n))$. Ponieważ $v_1, \dots, v_n$ jest bazą ortonormalną $W \ominus zW$, a ev_z jest izometrią, więc $f_W(z) \in U_n$ dla każdego $z \in S^1$. W takim razie $f_W \in \Lambda_{alg}U_n$, a nawet $f_W \in \Omega_{alg}U_n$.

Wiemy, że $H_0 = \overline{\text{lin}}\{z^j \epsilon_i \mid j \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, n\}$, więc

$$\begin{aligned} fH_0 &= \overline{\text{lin}}\{f(z^j \epsilon_i) \mid j \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, n\} \\ &= \overline{\text{lin}}\{z^j f(\epsilon_i) \mid j \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, n\} \\ &= \overline{\text{lin}}\{z^j v_i \mid j \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, n\} = W\,. \end{aligned}$$

Tym samym pokazaliśmy, że działanie $\Lambda_{alg}U_n$ na $\mathcal{X}^n$ jest tranzytywne. □

Wniosek 2.2.4 *Stosują równanie 1.3 otrzymujemy*

$$\mathcal{X}^n \cong \Omega_{alg}U_n\,.$$

Niech $M_{\mathbb{C}}$ oznacza grupę elementów odwracalnych w $\Lambda_{alg}(GL_n(\mathbb{C}))$. Z wniosku 1.0.2 wynika, że $M_{\mathbb{C}} = GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z])$. Jasne jest, że $\Lambda_{alg}U_n$ jest podgrupą w $M_{\mathbb{C}}$ oraz, że $M_{\mathbb{C}}$ rozszerza działanie $\Lambda_{alg}U_n$ na H i na $Gr(H)$. Działanie to jest zatem tranzytywne. Stabilizatorem H_0 jest w tym przypadku podgrupa

$$P := \left\{ f \in M_{\mathbb{C}} \mid f(z) = \sum_{i=0}^{m} A_i z^i \text{ i } A_0 \in GL_n(\mathbb{C}) \right\}.$$

Inaczej mówiąc $f \in P$ wtedy i tylko wtedy gdy f rozszerza się do funkcji holomorficznej na dysku jednostkowym $\widetilde{f} : D \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ i $\widetilde{f}(0) \in GL_n(\mathbb{C})$. Zauważmy, że

$$P = GL_n(\mathbb{C}[z])\,.$$

Wniosek 2.2.5 ([Pre80], Wniosek 3.3)

$$M_{\mathbb{C}}/P \cong \mathcal{X}^n \cong \Lambda_{alg}U_n/U_n \cong \Omega_{alg}U_n\,.$$

Na mocy twierdzenie Petera-Weyla dowolną grupę zwartą G można zrealizować jako podgrupę U_n ([CSM95], część II, Twierdzenie 9.4), więc wykorzystując powyższy wniosek można $\Omega_{alg}G$ utożsamić z pewnym podzbiorem $\mathcal{X}^n$. W książce [PS88] §8.6 zostało opisane podobne utożsamienie.

Niech G będzie zwartą, półprostą grupą Lie, a $\mathfrak{g}$ jej algebrą Lie, zaś $G_{\mathbb{C}}$ i $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ niech będą kompleksyfikacjami G oraz $\mathfrak{g}$ odpowiednio. Niech $H^{\mathfrak{g}} = L^2(S^1, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Mamy wtedy działanie $\Lambda_{alg}G_{\mathbb{C}}$ na $H^{\mathfrak{g}}$ przez reprezentację dołączoną. Dokładniej, jeśli $\gamma \in \Lambda_{alg}G_{\mathbb{C}}$ i $f \in H^{\mathfrak{g}}$, to $(\gamma f)(z) = Ad_{\gamma(z)}f(z)$. Dla $u, v \in H^{\mathfrak{g}}$ definiujemy też nawias Lie przez mnożenie punktowe $[u, v](z) = [u(z), v(z)]$.

Definicja 2.2.6 ([PS88], Definicja 8.6.1) Przez $\mathcal{X}^{\mathfrak{g}}$ będziemy oznaczać podzbiór $Gr(H^{\mathfrak{g}})$ składający się z takich $W \subseteq H^{\mathfrak{g}}$, że

- $zW \subseteq W$,
- $\overline{W}^{\perp} = zW$,
- W jest zamknięta na branie nawiasu Lie.

Twierdzenie 2.2.7 ([PS88], Twierdzenie 8.6.2) *Działanie $\Lambda_{alg}G_{\mathbb{C}}$ na $Gr(H^{\mathfrak{g}})$ zachowuje $\mathcal{X}^{\mathfrak{g}}$, czyli jest dobrze określone na $\mathcal{X}^{\mathfrak{g}}$. Jeśli G ma trywialne centrum, to przyporządkowanie $\gamma \mapsto \gamma H_0$ definiuje dyfeomorfizm $\Omega_{alg}G \to \mathcal{X}^{\mathfrak{g}}$.*

Uwaga 2.2.8 *Niech G będzie zwartą, półprostą grupą Lie z trywialnym centrum. Z twierdzenia Petera-Weyla taka grupa jest podgrupą pewnego U_n. W takim razie $\Omega_{alg}G \leqslant \Omega_{alg}U_n$ i można znaleźć podzbiór $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}^n$ odpowiadający $\Omega_{alg}G$. W ogólności nie ma żadnego powodu, by $\mathcal{Z}$ było tożsame z $\mathcal{X}^{\mathfrak{g}}$, mimo że obydwie przestrzenie są dyfeomorficzne z $\Omega_{alg}G$.*

Twierdzenie 2.2.9 ([PS88], Stwierdzenie 8.6.6) *Włożenie $\Omega_{alg}G \to \Omega G$ jest homotopijną równoważnością.*

Uwaga 2.2.10 *Jeśli G jest zwarta i półprosta (np. SU_n) to jej centrum Z musi być podgrupą skończoną. Twierdzenie 2.2.7 mówi, że $X^{\mathfrak{g}} \cong \Omega_{alg}(G/Z)$. Zauważmy, że $G \to G/Z$ jest skończonym nakryciem. Ogólnie dla każdego skończonego nakrycia $p : E \to B$ wiadomo, że pętle ściągalne w B odpowiadają pętlom ściągalnym w E. Niech $(\Omega E)_0$, $(\Omega B)_0$ oznaczają składowe spójności pętli stałych. Wtedy $(\Omega E)_0 \cong (\Omega B)_0$. W takim razie*

$$(X^{\mathfrak{g}})_0 \cong (\Omega_{alg}(G/Z))_0 \simeq (\Omega(G/Z))_0 \cong (\Omega G)_0 \simeq (\Omega_{alg}G)_0$$

Ponieważ $\Omega_{alg}G$ jest grupą, więc wszystkie pozostałe składowe spójności muszą być dyfeomorficzne z $(\Omega_{alg}G)_0$.

Dla nas szczególnie interesujący będzie model $\mathcal{X}^n$ przestrzeni $\Omega_{alg}U_n$, dlatego poświęciliśmy mu więcej miejsca w tym rozdziale.

Rozdział 3

Rozkład Bruhat $\Omega_{alg}U_n$

Celem tego rozdziału jest omówienie analogii między przestrzenią pętli $\Omega_{alg}U_n$, a rozmaitością flag $GL_n(\mathbb{C})/B$. Na początek przedstawimy pobieżnie rozkład Bruhat rozmaitości flag. Dokładniejszy opis tego rozkładu i dowody twierdzeń można znaleźć w [CSM95], część II §4. Następnie przeprowadzimy niemalże identyczną konstrukcję dla $\Omega_{alg}U_n$ traktowanej jako przestrzeń ilorazowa $GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z])/GL_n(\mathbb{C}[z])$. Potem wyprowadzimy ten sam rozkład korzystając z utożsamienia $\Omega_{alg}U_n \cong \mathcal{X}^n$. Na koniec przedstawimy $\mathcal{X}^n$ jako przestrzeń bazową pewnej U_n-wiązki głównej analogicznie jak się to robi dla Grassmannianu.

3.1. Rozkład Bruhat $GL_n(\mathbb{C})$

Definicja 3.1.1 Powiemy, że macierz $w \in GL_n(\mathbb{C})$ jest w *zredukowanej postaci eszelonowej* jeśli

- każda kolumna czytana od góry do dołu kończy się jedynką, poniżej której są zera,
- każdy wiersz czytany od lewej do prawej kończy się jedynką, na prawo od której są zera.

Przykład 3.1.2

$$w = \begin{pmatrix} \star & \star & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Niech $N \leqslant GL_n(\mathbb{C})$ oznacza podgrupę macierzy górnotrójkątnych z jedynkami na przekątnej, $B \leqslant GL_n(\mathbb{C})$ podgrupę macierzy górnotrójkątnych, a $S_n \leqslant GL_n(\mathbb{C})$ podgrupę macierzy permutacji.

Każdą macierz $g \in GL_n(\mathbb{C})$ można doprowadzić do zredukowanej postaci eszelonowej przy pomocy dwóch rodzajów operacji:

- pomnożenie kolumny przez skalar,
- dodanie do kolumny jakiejś kolumny stojącej na lewo przemnożonej przez skalar.

Taki operacje odpowiadają mnożeniu macierzy g przez macierz górnotrójkątną $b \in B$ z prawej strony. Zatem $g = wb$ dla pewnej macierzy w w zredukowanej postaci eszelonowej. Każda taka macierz w jest iloczynem $m = n\pi$, gdzie $n \in N$, a $\pi \in S_n$. Dokładniej, jeśli i-ta kolumna macierzy w kończy się jedynką w miejscu π_i, to π musi realizować permutację $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$. W ten sposób pokazaliśmy

Twierdzenie 3.1.3 ([CSM95], część II, Twierdzenie 4.4) *Dowolna macierz $g \in GL_n(\mathbb{C})$ daje się przedstawić w postaci iloczynu $g = n\pi b$, dla $n \in N$, $b \in B$ i $\pi \in S_n$.*

Dowodzi się też, że π w powyższym rozkładzie jest wyznaczona jednoznacznie. Niech $\widetilde{N}$ będzie podgrupą $GL_n(\mathbb{C})$ macierzy dolnotrójkątnych z jedynkami na przekątnej i niech

$$N_\pi = N \cap \pi \widetilde{N} \pi^{-1} .$$

Można pokazać, że jeśli zażądamy by $n \in N_\pi$, to cały rozkład $g = n\pi b$ będzie wyznaczony jednoznacznie. W takim razie orbita $\pi B \in GL_n(\mathbb{C})/B$ przy działaniu N z lewej strony na $GL_n(\mathbb{C})/B$ jest homeomorficzna z N_π. Niech l_π oznacza długość permutacji π, czyli

$$l_\pi = \operatorname{card} \{(i, j) \mid i < j, \pi_i > \pi_j\} .$$

Wartość l_π to dokładnie ilość wolnych miejsc w macierzy w oznaczonych gwiazdką ($\star$). Stąd $N_\pi \cong \mathbb{C}^{l_\pi}$ i możemy sformułować

Twierdzenie 3.1.4 (rozkład Bruhat) *Grupa $GL_n(\mathbb{C})$ rozkłada się na $n!$ komórek*

$$GL_n(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\pi \in S_n} N\pi B .$$

Przy czym $N\pi B \cong \mathbb{C}^{l_\pi}$.

Dodatkowo wiadomo, że podany rozkład zadaje strukturę CW-kompleksu na rozmaitości flag $GL_n(\mathbb{C})/B$. Wiadomo także, że podobny rozkład istnieje dla każdej reduktywnej (ang. reductive) grupy G nad dowolnym ciałem. Wówczas B jest podgrupą Borela, a rolę S_n pełni grupa Weyla G. Więcej na ten temat można znaleźć w [Kna96].

3.2. Rozkład $\Omega_{alg}U_n$ traktowanej jako $GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z])/GL_n(\mathbb{C}[z])$

Wniosek 2.2.5 mówił, że $\Omega_{alg}U_n \cong M_\mathbb{C}/P = GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z])/GL_n(\mathbb{C}[z])$. Przypomnijmy, że przez $\mathbb{C}[z^{-1}, z]]$ oznaczaliśmy ciało ułamków $\mathbb{C}[[z]]$. Wprowadźmy oznaczenia

$$\overline{M}_\mathbb{C} := GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z]]) , \qquad \overline{P} := GL_n(\mathbb{C}[[z]]) .$$

Na początek pokażemy algorytm wyboru reprezentantów warstw dla $\overline{M}_\mathbb{C}/\overline{P}$. Potem okaże się, że $\overline{M}_\mathbb{C}/\overline{P} \cong M_\mathbb{C}/P$.

Niech $g \in \overline{M}_\mathbb{C}$. Elementami tej macierzy są szeregi Laurenta zawierające tylko skończenie wiele ujemnych potęg z. Każdy taki szereg można zapisać w postaci $z^{-m}q(z)$, gdzie $q \in \overline{P}$ i $q(0) \neq 0$. Wybierzmy element macierzy o największym m. Jeśli jest więcej takich elementów, wybierzemy ten, który stoi najwyżej (o najmniejszym numerze wiersza macierzy). Jeśli nadal jest więcej niż jeden wybór, wybieramy którykolwiek. Domnażając przez coś z $\overline{P}$ z prawej strony możemy zamienić kolumnę, w której znajduje się wybrany element z pierwszą kolumną.

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ z^{-m_1}q_1(z) & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star \end{pmatrix} \in g\overline{P} .$$

W ten sposób w pierwszej kolumnie, patrząc z góry na dół, najpierw są jakieś szeregi postaci $\sum_{-m_1+1}^{\infty} \alpha_i z^i$, potem nasz wybrany element $z^{-m_1}q_1(z)$, a poniżej jakieś szeregi postaci

$\sum_{-m_1}^{\infty} \alpha_i z^i$. Ponieważ $q_1(0) \neq 0$, więc q_1 jest odwracalny w $\mathbb{C}[[z]]$. Pomnóżmy pierwszą kolumnę przez q_1^{-1}.

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ z^{-m_1} & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star \end{pmatrix} \in g\overline{P}\,.$$

W wierszu na prawo od z^{-m_1} są tylko szeregi zaczynające się od wyższych niż $-m_1$ potęg z. Możemy zatem wyzerować te miejsca domnażając przez pewien element z $\overline{P}$ z prawej strony.

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ z^{-m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star \end{pmatrix} \in g\overline{P}\,.$$

Można teraz ponownie wybrać element macierzy zaczynający się od najmniejszej potęgi z i powtórzyć całą procedurę. Jeśli powtórzymy tę procedurę n razy, dostaniemy

$$\begin{pmatrix} \star & z^{-m_2} & 0 & \cdots & 0 \\ z^{-m_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \star & \cdots & z^{-m_n} \end{pmatrix} \in g\overline{P} \tag{3.1}$$

gdzie $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_n$. Wykonując operacje na kolumnach można w każdym wierszu zlikwidować wyższe potęgi z na lewo od wybranego miejsca. Otrzymujemy ostatecznie

$$\widetilde{g} := \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=-m_1+1}^{-m_2-1} a_i z^i & z^{-m_2} & 0 & \cdots & 0 \\ z^{-m_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{i=-m_1}^{-m_n-1} b_i z^i & \sum\limits_{i=-m_2}^{-m_n-1} c_i z^i & \sum\limits_{i=-m_3}^{-m_n-1} d_i z^i & \cdots & z^{-m_n} \end{pmatrix} \in g\overline{P}\,. \tag{3.2}$$

Rozważmy przekształcenie $\vartheta : M_{\mathbb{C}}/P \to \overline{M}_{\mathbb{C}}/\overline{P}$ dane przez $\vartheta(gP) = g\overline{P}$. Dla każdej macierzy $g \in g\overline{P}$ znaleźliśmy $\widetilde{g} \in M_{\mathbb{C}}$ zawierającą tylko skończone sumy i taką, że $\vartheta(\widetilde{g}P) = \widetilde{g}\overline{P} = g\overline{P}$. Zatem ϑ jest „na". Niech $g, h \in M_{\mathbb{C}}$ i załóżmy, że $g\overline{P} = \vartheta(gP) = \vartheta(hP) = h\overline{P}$. Wtedy $h^{-1}g \in \overline{P}$ ale wiemy także, że $h^{-1}g \in M_{\mathbb{C}}$. Zauważmy, że $M_{\mathbb{C}} \cap \overline{P} = P$, więc $h^{-1}g \in P$. W takim razie $hP = gP$ co pokazuje, że ϑ jest różnowartościowe. Mamy więc bijekcję między $\overline{M}_{\mathbb{C}}/\overline{P}$ i $M_{\mathbb{C}}/P$.

Mnożenie macierzy $g \in M_{\mathbb{C}}$ z lewej przez coś z P odpowiada braniu kombinacji liniowych kolumn macierzy ze współczynnikami z $\mathbb{C}[z]$. W takim razie w warstwie gP jest tylko jedna macierz w postaci 3.2. Mamy zatem jednoznaczny sposób na wybór reprezentantów warstw $M_{\mathbb{C}}/P$.

Niech $B \leqslant P$ będzie zdefiniowana jako

$$B := \left\{ \sum_{i=0}^{m} A_i z^i \mid A_i \in M_{n\times n}(\mathbb{C}), A_0 \text{ jest dolnotrójkątna} \right\}.$$

Rozpatrzmy działanie grupy B na $M_{\mathbb{C}}/P$ z lewej strony. Reprezentant orbity BgP będzie miał postać

$$\begin{pmatrix} 0 & z^{-m_2} & \cdots & 0 \\ z^{-m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z^{-m_n} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Każdemu wykładnikowi $-m_i$ w tej macierzy możemy przyporządkować numer wiersza j_i w którym on występuje. Wtedy orbity działania B na $M_{\mathbb{C}}/P$ będą indeksowane zbiorami par postaci $\{(-m_1, j_1), \ldots, (-m_n, j_n)\}$. Porządkując taki zbiór względem drugiej współrzędnej (numeru wiersza) otrzymamy indeksowanie orbit ciągami $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, gdzie $k_i = -m_{j_i}$. Macierz postaci 3.3 będziemy oznaczać przez $\lambda_{\underline{k}}$, a orbitę

$$\Omega_{\underline{k}} := B\lambda_{\underline{k}}P\,.$$

Oczywiste jest, że $\bigcup_{\underline{k}\in\mathbb{Z}^n} \Omega_{\underline{k}} = M_{\mathbb{C}}/P$. Zauważmy, że $\Omega_{\underline{k}}$ jest homeomorficzne z $\mathbb{C}^{l_{\underline{k}}}$, gdzie $l_{\underline{k}}$ to sumaryczna ilość współczynników występujących w macierzy postaci 3.2. Nietrudno policzyć, że

$$l_{\underline{k}} = \sum_{i<j} |k_i - k_j| - \nu(\underline{k}) \tag{3.4}$$

gdzie $\nu(\underline{k})$ to ilość takich par $i < j$, że $k_i > k_j$.

3.3. Rozkład $\Omega_{alg}U_n$ traktowanej jako podzbiór Grassmannianu

Ten sam rozkład $\Omega_{alg}U_n$ jaki został przedstawiony w poprzednim paragrafie jest opisany w [Pre80] oraz [PS88] lecz został osiągnięty innym sposobem. Przedstawimy teraz ten sposób. Polega on na zastosowaniu do przestrzeni $\mathcal{X}^n$ standardowych metod rozkładu Grassmannianu na komórki Schuberta opisanych np. w [MS74].

Przypomnijmy, że $\Omega_{alg}U_n \cong \mathcal{X}^n$, gdzie $\mathcal{X}^n = \{W \in Gr(H) \mid zW \subseteq W\}$. Przy definiowaniu niektórych pojęć wygodniej będzie posługiwać się przestrzenią $\widetilde{H} = L^2(S^1, \mathbb{C})$ niż $H = L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$. Ustalmy więc izomorfizm-izometrię między H i $\widetilde{H}$. Wektorowi bazowemu $\epsilon_i z^j \in H$ przyporządkujemu wektor $z^{nj+i-1} \in \widetilde{H}$. Będziemy też pisać $\widetilde{H}_m$ na oznaczenie podprzestrzeni rozpiętej przez $\{z^i \mid i \geqslant m\}$ (*uwaga:* przy opisanym wyżej izomorfizmie H_m odpowiada $\widetilde{H}_{mn}$, a nie na $\widetilde{H}_m$). Przestrzeń $\mathcal{X}^n$ jako podzbiór $Gr(\widetilde{H})$ opisuje się teraz warunkiem $\mathcal{X}^n = \{W \in Gr(\widetilde{H}) \mid z^n W \subseteq W\}$.

Definicja 3.3.1 Niech

$$f = \sum_{-N}^{N} f_k z^k \in \widetilde{H}\,.$$

Korangą[1] f nazwiemy najmniejszą liczbę k taką, że $f_k \neq 0$. Będziemy ją oznaczać przez corank f.

Niech

$$S^W = \{s \in \mathbb{Z} \mid \text{W zawiera element korangi s}\}\,.$$

Ponieważ istnieje takie m, że $\widetilde{H}_m \subseteq W \subseteq \widetilde{H}_{-m}$, wiec S^W jest ograniczony z dołu i zawiera wszystkie liczby naturalne od pewnego miejsca. Można to wyrazić pisząc

$$\operatorname{card}(S^W \div \mathbb{N}) < \infty\,. \tag{3.5}$$

[1] W książce [PS88] używane jest pojęcie „*co-order*”.

Ponieważ $z^n W \subseteq W$, więc

$$S^W + n \subseteq S^W\,. \tag{3.6}$$

Niech $S^W_\star = S^W \setminus (S^W + n)$. Zauważmy, że

1. $\operatorname{card} S^W_\star \leqslant n$ ponieważ jeśli $l \in S^W_\star$, to $l + mn \notin S^W_\star$ dla $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, więc w $S^W_\star$ jest co najwyżej po jednej liczbie z każdej klasy modulo n,
2. $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}\ \exists l \in S^W\ \ (k \equiv l (\mathrm{mod}\ n))$ ponieważ inaczej liczby postaci $mn + k$ dla $m \in \mathbb{N}$ nie należałyby do S^W, więc $S^W \div \mathbb{N}$ byłby nieskończony.

Pokazaliśmy, że $S^W_\star$ zawiera dokładnie n liczb całkowitych – po jednej w każdej klasie modulo n. Porządkując zbiór S^W można go zapisać w postaci

$$S^W = \{nk_1, nk_2 + 1, \dots, nk_n + n - 1\}\,. \tag{3.7}$$

Dla dowolnej n-tki liczb całkowitych $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ niech $S^{\underline{k}}$ oznacza taki podzbiór $\mathbb{Z}$, że $S^{\underline{k}}_\star = \{nk_1, nk_2 + 1, \dots, nk_n + n - 1\}$. Oznaczmy

$$\mathcal{X}_{\underline{k}} := \{W \in \mathcal{X}^n \mid S^W = S^{\underline{k}}\}\,.$$

Twierdzenie 3.3.2 ([PS88], Twierdzenie 8.4.5) *Dla dowolnego $\underline{k}$ przestrzeń $\mathcal{X}_{\underline{k}}$ jest homeomorficzna z $\mathbb{C}^{l_{\underline{k}}}$, gdzie $l_{\underline{k}}$ jest zdefiniowane wzorem 3.4. Ponadto*

$$\bigsqcup_{\underline{k} \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{X}_{\underline{k}} = \mathcal{X}^n\,.$$

Dowód można znaleźć w [PS88].

Elementy S^W to miejsca „skoków” wymiarów przestrzeni $\widetilde{H}_i \cap W$. Jeśli $W \in \mathcal{X}_{\underline{k}}$ to zawiera wektory $v_1, \dots, v_n$ zaczynające się (względem naturalnego uporządkowania bazy H) w miejscach $\epsilon_1 z^{k_1}$, $\epsilon_2 z^{k_2}$, ..., $\epsilon_n z^{k_n}$ i takie, że przestrzeń $\mathrm{lin}\{z^i v_j \mid i \in \mathbb{N},\ j = 1 \dots n\}$ jest liniowo gęsta w W.

Przykład 3.3.3 $n = 3$, $m = 2$, $\underline{k} = (1, 2, -2)$, $W = \overline{\mathrm{lin}}\{z^i v_1, z^j v_2, z^l v_3 \mid i, j, l \in \mathbb{N}\}$

	z^{-2}			z^{-1}			z^0			z^1			z^2			
	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	
$v_1 =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\cdots$
$v_2 =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b_1	b_2	$\cdots$
$v_3 =$	0	0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	$\cdots$

Mamy $H_2 \subseteq W \subseteq H_{-2}$. Biorąc kombinacje liniowe (być może nieskończone) wektorów $z^i v_j$ można znaleźć wektory w_1, w_2, w_3 postaci

	z^{-2}			z^{-1}			z^0			z^1			z^2			
	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	
$w_2 =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\star$	0	0	0	0	$0\cdots$
$w_3 =$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$0\cdots$
$w_1 =$	0	0	1	$\star$	$\star$	0	$\star$	$\star$	0	0	$\star$	0	0	0	0	$0\cdots$

(3.8)

takie, że $W = \overline{\mathrm{lin}}\{z^i w_1, z^j w_2, z^l w_3 \mid i, j, l \in \mathbb{N}\}$. Ilość gwiazdek ($\star$) w powyższej tabelce wyznacza wymiar komórki $\mathcal{X}_{\underline{k}}$. Ze wzoru 3.4 łatwo policzyć, że $l_{\underline{k}} = 6$. Kolejność wektorów

w_i zmieniliśmy tak by kolejne wektory zaczynały się coraz dalej. Wpiszmy je w kolumny macierzy

$$\begin{pmatrix} \star z^{-1} + \star & z & 0 \\ \star z^{-1} + \star + \star z & \star & z^2 \\ z^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z]) \,.$$

Otrzymaliśmy reprezentację pewnego elementu $\Omega_{\underline{k}}$ w postaci 3.2.

Zauważmy, że wektory w_1, w_2, w_3 w przykładnie 3.3.3 były wyznaczone jednoznacznie. Ogólnie jeśli $W \in \mathcal{X}_{\underline{k}}$ to istnieje dokładnie jeden układ wektorów $w_1, \ldots, w_n$ w postaci 3.8. Wówczas $W = \overline{\mathrm{lin}}\{z_j w_i \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Definicja 3.3.4 Niech $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ oraz $W \in \mathcal{X}_{\underline{k}}$. Niech $\sigma \in S_n$ będzie permutacją porządkującą indeks $\underline{k}$, czyli $k_{\sigma_1} \leqslant k_{\sigma_2} \leqslant \cdots \leqslant k_{\sigma_n}$. Układ wektorów $(w_1, \ldots, w_n)$ będziemy nazywać *bazą charakterystyczną* W jeśli

1. pierwszy niezerowy współczynnik w_i stoi przy $\epsilon_{\sigma_i} z^{k_{\sigma_i}}$ i jest równy 1. Zatem w_i zapisuje się jako
$$w_i(z) = \epsilon_{\sigma_i} z^{k_{\sigma_i}} + \cdots \,,$$
2. dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant n$ i każdego $l \in \mathbb{N}$ mamy
$$\left\langle w_j | z^l \left(\epsilon_{\sigma_i} z^{k_{\sigma_i}} \right) \right\rangle = 0 \,.$$

Dla dowolnego indeksu $\underline{k}$ istnieje dokładnie jedna permutacja $\sigma \in S_n$, która porządkuje ten indeks niemalejąco i zachowuje kolejność powtarzających się elementów. Niech $\tau = \sigma^{-1}$. Wtedy $k_{\sigma_1} \leqslant \cdots \leqslant k_{\sigma_n}$ oraz jeśli istnieją $0 < i < j \leqslant n$ takie, że $k_i = k_j$, to $\tau_i < \tau_j$. Wpiszmy wektory bazy charakterystycznej $w_1, \ldots, w_n$ w kolumny macierzy A_W. Niech A'_W będzie macierzą otrzymaną z A_W przez poprzestawianie wierszy zgodnie z permutacją σ.

$$A_W = \begin{pmatrix} - & \xi_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \xi_n & - \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A'_W = \begin{pmatrix} - & \xi_{\sigma_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \xi_{\sigma_n} & - \end{pmatrix} .$$

Macierz A'_W jest dolnotrójkątną, więc $\det A'_W = \prod z^{k_i}$. Stąd $\det A_W = (\operatorname{sgn} \sigma) \prod z^{k_i}$.

Definicja 3.3.5 Permutację σ będziemy nazywać *permutacją charakterstyczną* indeksu $\underline{k}$.

Zauważmy, że operacje wykonywane w przykładzie 3.3.3 na wektorach v_1, v_2, v_3, by dostać wektory w_1, w_2, w_3 odpowiadały dokładnie operacjom opisanym w §3.2 by przejść od macierzy $g \in \overline{M}_{\mathbb{C}}$ do macierzy $\widetilde{g} \in M_{\mathbb{C}}$. Okazuje się, że opisane rozkłady $\Omega_{alg} U_n$ i $\mathcal{X}^n$ odpowiadają sobie wzajemnie.

Stwierdzenie 3.3.6 *Homeomorfizm $F : M_{\mathbb{C}}/P \to \mathcal{X}^n$ zadany przez $F(fP) = fH_0$ zachowuje rozkłady obydwu przestrzeni, tzn.*

$$fP \in \Omega_{\underline{k}} \iff fH_0 \in \mathcal{X}_{\underline{k}} \,.$$

Dowód: ($\Rightarrow$) Niech $fP \in \Omega_{\underline{k}}$. Wykorzystując opisany w §3.2 algorytm, można znaleźć reprezentanta f' warstwy fP w postaci 3.2. Połóżmy $w_i = f'(\epsilon_i)$. Ponieważ $H_0 = \overline{\text{lin}}\{z^j\epsilon_i \mid j \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n\}$, więc

$$\begin{aligned} f'H_0 &= \overline{\text{lin}}\{f'(z^j\epsilon_i) \mid j \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n\} \\ &= \overline{\text{lin}}\{z^j f'(\epsilon_i) \mid j \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n\} \\ &= \overline{\text{lin}}\{z^j w_i \mid j \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Układ wektorów $w_1, \ldots, w_n$ jest postaci 3.8, więc

$$S_\star^{f'H_0} = \{n(\operatorname{corank} w_i) + (i-1) \mid i = 1, \ldots, n\} = S_\star^{\underline{k}}.$$

Stąd $f'H_0 \in \mathcal{X}_{\underline{k}}$, czyli także $fH_0 \in \mathcal{X}_{\underline{k}}$

($\Leftarrow$) Jeśli $fH_0 \in \mathcal{X}_{\underline{k}}$, to znajdziemy bazę charakterstyczną fH_0. Oznaczmy wektory tej bazy przez $w_1, \ldots, w_n$. Niech $f'(z) = (w_1, \ldots, w_n) \in M_{\mathbb{C}}$. Wówczas $f'H_0 = fH_0$. Ponieważ F jest homeomorfizmem, otrzymujemy $fP = f'P$. Macierz f' jest postaci 3.2, więc $f'P \in \Omega_{\underline{k}}$. □

Przypomnijmy, że $W \ominus zW$ oznaczało ortogonalne dopełnienie zW w W. Zauważmy, że znaleziona powyżej baza nie jest bazą ortogonalną. Nie jest też bazą $W \ominus zW$. W pracy [Pre80] znalazł się drobny błąd. Jest tam (w uwagach po wniosku 3.3) napisane, że zbiór $S_\star^W$ dostajemy badając przecięcia $W \ominus zW$ kolejno z przestrzeniami $\widetilde{H}_i$. Nie jest to prawdą.

Przykład 3.3.7 $n = 2$, $m = 1$, $W \ominus zW = \text{lin}\{w_1, w_2\}$, $S_\star^W = \{-2, 3\}$, $\underline{k} = (-1, 1)$

$\widetilde{H}$	z^{-2}	z^{-1}	z^0	z^1	z^2	z^3
H	$\epsilon_1 z^{-1}$	$\epsilon_2 z^{-1}$	$\epsilon_1 z^0$	$\epsilon_2 z^0$	$\epsilon_1 z^1$	$\epsilon_2 z^1$
$w_1 =$	1	0	0	-1	0	0
$w_2 =$	0	0	1	0	0	1

Badając przecięcia $\text{lin}\{w_1, w_2\} \cap \widetilde{H}_i$ wykryjemy „skoki" wymiaru w miejscach 0 oraz -2. Zgodnie z uwagą Pressley'a powinniśmy więc przypisać W zbiór $\{-2, 0\}$. Wiemy jednak, że $S_\star^W = \{-2, 3\}$.

3.4. $\mathcal{X}^n$ jako przestrzeń bazowa U_n-wiązki głównej

Lemat 2.2.3 mówi, że $W \ominus zW \cong \mathbb{C}^n$. Jeśli $\{v_1, \ldots, v_n\}$ jest bazą ortonormalną $W \ominus zW$, to $W = \overline{\text{lin}}\{z^i v_j \mid i \in \mathbb{N},\ j = 1 \ldots n\}$. Jest zatem wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między przestrzeniami $W \ominus zW$ oraz W. Zauważmy, że wektory bazy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ muszą spełniać warunki $\langle z^k v_i | v_j \rangle = 0$ dla każdych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz każdego $k \in \mathbb{N}^+$.

Definicja 3.4.1 Niech δ_i^j oznacza deltę Kroneckera. Definiujemy przestrzeń

$$\mathcal{V}^n := \left\{(v_1, \ldots, v_n) \in H \mid \forall k \in \mathbb{N}\ \forall i, j\ \langle z^k v_i | v_j \rangle = \delta_i^j \delta_k^0 \right\}.$$

Skonstruujemy teraz przekształcenie $p : \mathcal{V}^n \to \mathcal{X}^n$. Jeśli $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{V}^n$, to

$$p(\mathbf{v}) = \overline{\text{lin}}\{z^j v_i \mid i = 1 \ldots n,\ j \in \mathbb{N}\}. \tag{3.9}$$

Jeśli $W = p(\mathbf{v})$, to $\{v_1, \ldots, v_n\}$ jest bazą ortonormalną $W \ominus zW$. Włóknem p nad W są wszystkie bazy ortonormalne $W \ominus zW$. Niech $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{V}^n$. Ustawmy wektory z $\mathbf{v}$ w kolumnach macierzy $A_{\mathbf{v}}$. Z lematu 2.2.3 wiemy, że ewaluacja w dowolnym punkcie S^1 jest izometrią zadającą izomorfizm $W \ominus zW$ oraz $\mathbb{C}^n$, więc $A_{\mathbf{v}} \in \Lambda_{alg}U_n$. Rozważmy teraz działanie grupy U_n na $A_{\mathbf{v}}$ przez mnożenie punktowe z prawej strony. Niech $g \in U_n$

$$(A_{\mathbf{v}}g)(z) = A_{\mathbf{v}}(z)g\,.$$

Oczywiście $A_{\mathbf{v}}g \in \Lambda_{alg}U_n$. Zapiszmy $A_{\mathbf{v}}g$ w postaci sumy

$$(A_{\mathbf{v}}g)(z) = \left(\sum_i A_i z^i\right) g = \sum_i (A_i g) z^i$$

gdzie $A_i \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Widać, że kolumny macierzy $A_{\mathbf{v}}g$ są kombinacjami liniowymi kolumn $A_{\mathbf{v}}$, więc rozpinają tą samą przestrzeń $W \ominus zW$. Korzystając ponownie z lematu 2.2.3 otrzymamy, że kolumny macierzy $A_{\mathbf{v}}g$ tworzą układ ortonormalny. W takim razie kolumny $A_{\mathbf{v}}g$ są elementami $\mathcal{V}^n$ i mamy dobrze zdefiniowane działanie U_n na $\mathcal{V}^n$. Zadaliśmy w ten sposób strukturę U_n-wiązki głównej na $p : \mathcal{V}^n \to \mathcal{X}^n$.

Zauważmy, że przyporządkowanie $\mathbf{v} \mapsto A_{\mathbf{v}}$ zadaje zanurzenie $\mathcal{V}^n \hookrightarrow \Lambda_{alg}U_n$. Weźmy teraz element $\gamma \in \Lambda_{alg}U_n$. Można go zapisać w postaci macierzowej wyróżniając kolumny $\gamma = (v_1, \ldots, v_n)$. Wiemy, że $\langle v_i(z)|v_j(z)\rangle = \delta_i^j$ dla każdego $z \in S^1$. W takim razie

$$\langle z^k v_i|v_j\rangle = \int_{S^1} w^k \langle v_i(w)|v_j(w)\rangle dw = \int_{S^1} w^k \delta_i^j dw = \delta_i^j \delta_k^0\,.$$

Pokazaliśmy, że $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{V}^n$, czyli $\mathcal{V}^n \cong \Lambda_{alg}U_n$. Otrzymujemy przemienny diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}^n \arrow[r, "\vartheta", "\cong"'] \arrow[d, "p"] & \Lambda_{alg}U_n \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{X}^n \arrow[r, "\eta", "\cong"'] & \Omega_{alg}U_n
\end{tikzcd}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\vartheta(\mathbf{v}) &= A_{\mathbf{v}}\,, \\
p(\mathbf{v}) &= \overline{\mathrm{lin}}\{z^j v_i \mid i = 1 \ldots n,\ j \in \mathbb{N}\}\,, \\
\eta(W) &= (ev_1^{-1}(\epsilon_1), \ldots, ev_1^{-1}(\epsilon_n)) \quad \text{dla } ev_1 : W \ominus zW \to \mathbb{C}^n\,, \\
\pi(\gamma) &= \gamma \centerdot \gamma(1)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\Lambda_{alg}U_n \to \Omega_{alg}U_n$ było wiązką trywialną, a powyższy diagram jest przemienny, więc $\mathcal{V}^n \to \mathcal{X}^n$ też jest wiązką trywialną oraz (ϑ, η) zadaje izomorfizmem U_n-wiązek głównych.

Rozdział 4

Struktura $\Omega_{alg}SU_2$

Zajmiemy się teraz bliżej przestrzenią pętli na SU_2. Najpierw opiszemy podprzestrzeń $\mathcal{Y}^n \subseteq \mathcal{X}^n$ odpowiadającą $\Omega_{alg}SU_n \subseteq \Omega_{alg}U_n$. Następnie przejdziemy do badania $\Omega_{alg}SU_2$. Przestrzeń ta ma po jednej komórce w każdym parzystym wymiarze. Komórkę $2n$-wymiarową sparametryzujemy produktem n dysków D^2. Na koniec pokażemy, że te parametryzacje przedłużają się do ciągłych przekształceń na domknięciach swoich dziedzin i w ten sposób definiują przekształcenia charakterystyczne CW-rozkładu $\Omega_{alg}SU_2$.

4.1. Model $\Omega_{alg}SU_n$ jako podzbiór $\mathcal{X}^n$

W §3.2 pokazaliśmy, że każdemu $W \in \mathcal{X}^n$ można przyporządkować indeks $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$. Zbiór wszystkich W o danym indeksie $\underline{k}$ oznaczaliśmy przez $\mathcal{X}_{\underline{k}}$.

Lemat 4.1.1 *Załóżmy, że $W \in \mathcal{X}_{\underline{k}}$ oraz $H_p \subseteq W \subseteq H_{-p}$. Wtedy*

$$\sum_i k_i = 0 \iff \dim W/H_p = \dim H_{-p}/W \,.$$

Dowód: Niech $w_1, \ldots, w_n$ będzie bazą charakterystyczną W, a σ permutacją charakterystyczną $\underline{k}$ tak jak to było zdefiniowane w §3.3. Niech $\tau = \sigma^{-1}$, wtedy w_{τ_i} zaczyna się w miejscu $\epsilon_i z^{k_i}$.

$$w_{\tau_i} = \epsilon_i z^{k_i} + \cdots \,.$$

Zauważmy, że dla $j \geqslant p - k_i$ wektor $z^j w_i$ leży w H_p. Ponieważ $W = \overline{\mathrm{lin}}\{z^j w_i \mid j \in \mathbb{N}\}$, więc

$$W/H_p = \mathrm{lin}\left\{ z^j w_i H_p \mid i = 1, \ldots, n;\ 0 \leqslant j < p - k_i \right\} \,.$$

Stąd wymiar W/H_p wyraża się wzorem

$$\dim W/H_p = \sum_{i=1}^{n} (p - k_i) = np - \sum_{i=1}^{n} k_i \,.$$

Ponieważ $H_p \subseteq W \subseteq H_{-p}$, więc wymiar H_{-p}/W jest równy

$$\dim H_{-p}/W = \dim H_{-p}/H_p - \dim W/H_p = 2np - np + \sum_{i=1}^{n} k_i = np + \sum_{i=1}^{n} k_i \,.$$

W takim razie

$$\dim H_{-p}/W = \dim W/H_p \iff np + \sum_{i=1}^{n} k_i = np - \sum_{i=1}^{n} k_i \iff \sum_{i=1}^{n} k_i = 0\,.$$

$\square$

W paragrafie §3.3 pokazaliśmy, że jeśli $w_1, \ldots, w_n$ jest bazą charakterystyczną W, to umieszczając wektory w_i w kolumnach macierzy A_W otrzymamy macierz w postaci 3.2. Ponadto $\det A_W = (\operatorname{sgn}\sigma) \prod z^{k_i}$, gdzie σ to permutacja charakterystyczna $\underline{k}$. Rozważania te dowodzą następującego lematu.

Lemat 4.1.2 *Niech $W \in \mathcal{X}_{\underline{k}}$. Wtedy*

$$\sum_i k_i = 0 \iff \det A_W = \operatorname{sgn}\sigma\,.$$

Do zdefiniowania dobrego modelu $\Omega_{alg}SU_n$ będziemy potrzebowali jeszcze jednego lematu. Przypomnijmy, że $\lambda_{\underline{k}}$ oznaczało pętlę w U_n postaci 3.3, a $\Omega_{\underline{k}}$ było zdefiniowane jako $B\lambda_{\underline{k}}P$.

Lemat 4.1.3 *Jeśli $f \in \Omega_{alg}U_n \cong M_{\mathbb{C}}/P$ oraz $fP \in \Omega_{\underline{k}}$, to f jest homotopijna z $\lambda_{\underline{k}}$.*

Dowód: Jeśli $fP \in \Omega_{\underline{k}}$, to fP przedstawia się jako $fP = b\lambda_{\underline{k}}P$ dla pewnego $b \in B$. Jeśli istnieje ścieżka w $M_{\mathbb{C}}/P$ łącząca fP z $\lambda_{\underline{k}}P$, to po przejściu przez homeomorfizm $M_{\mathbb{C}}/P \cong \Omega_{alg}U_n$ ścieżka ta będzie łączyć f z $\lambda_{\underline{k}}$ w $\Omega_{alg}U_n$. Wystarczy zatem pokazać, że B jest łukowo spójne. Niech $b \in B$, wówczas mamy ścieżkę w B

$$t \mapsto b\left((1-t)z\right) \qquad (t \in [0,1], z \in S^1)$$

łączącą b z pewną macierzą dolnotrójkątną $b(0) \in GL_n(\mathbb{C})$. Macierze dolnotrójkątne tworzą łukowo spójny podzbiór $GL_n(\mathbb{C})$, więc B jest także łukowo spójne. $\square$

Lemat 4.1.4 *Przestrzeń $\Omega_{alg}U_n$ ma $\mathbb{Z}$ składowych spójności. Ponadto jeśli $f \in \Omega_{\underline{k}}$ oraz $\kappa = k_1 + \cdots + k_n$ to pętla f jest homotopijna z $\lambda_{(\kappa,0,\ldots,0)}$.*

Dowód: Jeśli f i g leżą w tej samej składowej spójności $\Omega_{alg}U_n$, to $\det f$ i $\det g$ są homotopijne, więc mają ten sam stopień topologiczny. Dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ istnieje $f \in \Omega_{alg}U_n$ taka, że $\det f$ ma stopień k. Możemy na przykład wziąć macierz diagonalną $f(z) = \operatorname{diag}(z^k, 1, \ldots, 1)$. Zatem $\Omega_{alg}U_n$ ma co najmniej $\mathbb{Z}$ spójnych składowych. Pozostaje stwierdzić, że jeśli $\det f$ i $\det g$ mają ten sam stopień topologiczny, to są homotopijne przez pętle algebraiczne. Niech $f \in \Omega_{\underline{k}}$. Z lematu 4.1.3 wiemy, że f jest homotopijne z $\lambda_{\underline{k}}$. Pokażemy, że $\lambda_{\underline{k}}$ jest homotopijne z $\lambda_{\underline{k}'}$, gdzie $\underline{k}' = (k_1 + k_n, k_2, \ldots, k_{n-1}, 0)$. Skonstruujemy homotopię $t \mapsto \omega^t$. Niech ω^t będzie macierzą $\left(\omega^t_{ij}\right)_{n\times n}$ różniąca się od macierzy diagonalnej $\lambda_{\underline{k}}$ w następujących miejscach

$$\omega^t_{11}(z) = (1-t)z^{k_1} + tz^{k_1+k_n}\,, \qquad \omega^t_{1n}(z) = \sqrt{t(1-t)}(z^{k_1+k_n} - z^{k_1})\,,$$
$$\omega^t_{n1}(z) = \sqrt{t(1-t)}(z^{k_n} - 1)\,, \qquad \omega^t_{nn}(z) = (1-t)z^{k_n} + t\,.$$

Pętle ω^t leżą w $\Omega_{alg}U_n$ dla każdego t. Powtarzając tę konstrukcję n razy otrzymamy homotopię między $\lambda_{\underline{k}}$ i $\lambda_{(\kappa,0,\ldots,0)}$, gdzie $\kappa = k_1 + \cdots + k_n$. $\square$

Uwaga 4.1.5 *Powyższy dowód można też przeprowadzić korzystając z twierdzenia 2.2.9. Z istnienia rozwłóknienia*

$$SU_n \longrightarrow U_n \xrightarrow{\det} S^1 \tag{4.1}$$

wynika istnienie homotopijnego rozwłóknienia

$$\Omega SU_n \longrightarrow \Omega U_n \xrightarrow{\Omega \det} \Omega S^1 \cong \mathbb{Z}\,. \tag{4.2}$$

Wiadomo, że $\pi_1(U_n) = \mathbb{Z}$, więc $\pi_0(\Omega U_n) = \pi_1(U_n) = \mathbb{Z}$. Podobnie $\pi_0(\Omega SU_n) = \pi_1(SU_n) = 0$, więc ΩSU_n jest spójna. Zatem z istnienia homotopijnego rozwłóknienia 4.2 wynika, że spójne składowe ΩU_n są indeksowane stopniem topologicznym wyznacznika. Z twierdzenia 2.2.9 wiemy, że ΩU_n i $\Omega_{alg} U_n$ są homotopijnie równoważne, więc spójne składowe $\Omega_{alg} U_n$ także są indeksowane stopniem wyznacznika.

Lemat 4.1.6 *Niech $f : S^1 \to S^1$ będzie przekształceniem algebraicznym (tzn. wielomianem Laurenta). Jeśli f jest stopnia topologicznego k, to $f(z) = cz^k$ dla pewnego $c \in S^1$.*

Dowód: Funkcję f można przedstawić jako

$$f(z) = z^{-k} p(z)$$

gdzie p jest pewnym wielomianem.

$$p(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i z^i\,.$$

Funkcję p możemy traktować jako przekształcenie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Można tak wybrać k, by $p(0) \neq 0$. Zauważmy, że

$$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = |f(z)| = |z^{-k}||p(z)| = |p(z)| \quad \Rightarrow \quad p(S^1) \subseteq S^1\,.$$

Niech

$$\widetilde{p}(z) = \sum_{i=0}^{N} \overline{a}_i z^i\,.$$

Zauważmy, że dla $|z| = 1$ mamy $\widetilde{p}(z^{-1}) = \overline{p(z)}$. Niech $g(z) = p(z)\widetilde{p}(z^{-1})$. Wówczas g jest meromorficzne (jest pewną funkcją wymierną). Ponadto

$$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad g(z) = 1\,.$$

Widzimy, że g jest stałe na okręgu jednostkowym, więc musi być stałe na całym $\mathbb{C}$, czyli $g \equiv 1$. Jeśli tylko $\widetilde{p}$ nie jest funkcją stałą, to $\widetilde{p}(z^{-1}) \to \infty$ dla $|z| \to 0$. Zatem $p(z) \to 0$ dla $|z| \to 0$ i stąd $p(0) = 0$ co stoi w sprzeczności z założeniem, że $p(0) \neq 0$. W takim razie $\widetilde{p}$ musi być funkcją stałą, i stąd p też musi być stałe. W takim razie $p(z) = c$ oraz $f(z) = cz^{-k}$.

Pokazaliśmy, że jedyne przekształcenia algebraiczne zachowujące okrąg jednostkowy to funkcje postaci $f(z) = cz^k$, a takie przekształcenia są wyznaczone przez swój stopień topologiczny. $\square$

Definicja 4.1.7

$$\mathcal{Y}^n := \{W \in \mathcal{X}^n \mid \forall p\, (H_p \subseteq W \subseteq H_{-p} \Rightarrow \dim W/H_p = \dim H_{-p}/W)\}\,.$$

Przestrzeń $\mathcal{Y}^n$ będzie nam służyć jako model $\Omega_{alg} SU_n$. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1.8

$$SL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z])/SL_n(\mathbb{C}[z]) \cong \mathcal{Y}^n \cong \Lambda_{alg}SU_n/SU_n \cong \Omega_{alg}SU_n\,.$$

Dowód: Będziemy postępować jak w dowodzie 2.2.2. Pokażemy, że

$$\mathcal{Y}^n \cong \Lambda_{alg}SU_n/SU_n\,.$$

Istnienie pozostałych homeomorfizmów wynika analogicznie jak w §2.2.

Rozpatrzmy działanie $\Lambda_{alg}U_n$ na $\mathcal{X}^n$ (zdefiniowane w §2.2) ograniczone do $\Lambda_{alg}SU_n$. Niech $W \in \mathcal{Y}^n$. Z lematów 4.1.2 oraz 4.1.1 wynika, że

$$W \in \mathcal{Y}^n \iff \det A_W = \operatorname{sgn}\sigma\,.$$

Niech $f \in \Lambda_{alg}SU_n$. Macierz A_W można traktować jako element $GL_n(\mathbb{C}[z^{-1}, z])$. Ponieważ f z definicji zapisuje się jako suma $f = \sum A_i z^i$, gdzie $A_i \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, więc mamy naturalne działanie f na A_W dane przez mnożenie macierzy. Dla pokazania, że działanie $\Lambda_{alg}SU_n$ na $\mathcal{X}^n$ zachowuje podzbiór $\mathcal{Y}^n \subseteq \mathcal{X}^n$, wystarczy zauważyć, że dla każdego $W \in \mathcal{Y}^n$ zachodzi równość $A_{fW} = fA_W$. Istotnie jeśli $w_1, \dots, w_n$ jest bazą charakterystyczną W, to

$$A_{fW} = \begin{pmatrix} | & & | \\ fw_1 & \cdots & fw_n \\ | & & | \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} | & & | \\ w_1 & \cdots & w_n \\ | & & | \end{pmatrix} = fA_W\,.$$

W takim razie $\det A_{fW} = \det(fA_W) = \det f \det A_W = \operatorname{sgn}\sigma$, więc $fW \in \mathcal{Y}^n$.

Pozostaje wykazać, że rozpatrywane działanie jest tranzytywne. Niech $W \in \mathcal{Y}^n$ oraz $v_i = ev_1^{-1}(\epsilon_i)$ dla $i = 1, \dots, n$. Układ wektorów $v_1, \dots, v_n$ tworzy bazę ortonormalną $W \ominus zW$. Definiujemy $f_W(z) = (v_1(z), \dots, v_n(z))$. Wiemy już, że $f_W \in \Omega_{alg}U_n$. Trzeba jeszcze wykazać, że $\det(f_W) = 1$. Wiemy, że $f_W(1) = I$, więc $\det f_W(1) = 1$. Wiemy ponadto, że $\det f_W$ jest algebraicznym przekształceniem $S^1 \to S^1$, więc z lematu 4.1.6 musi być postaci $(\det f_W)(z) = z^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Ponieważ $f_W H_0 = W \in \mathcal{X}_{\underline{k}}$, więc ze stwierdzenia 3.3.6, $f_W P \in \Omega_{\underline{k}}$. W takim razie z lematu 4.1.3 f_W leży w tej samej spójnej składowej $\Omega_{alg}U_n$, co $\lambda_{\underline{k}}$. Z lematu 4.1.4 wynika, że $\det f_W$ ma ten sam stopień topologiczny co $\det \lambda_{\underline{k}} = z^{k_1+\cdots+k_n} = 1$, czyli f_W ma stopień 0. Zatem $(\det f_W) \equiv 1$, czyli $f_W \in \Omega_{alg}SU_n$. □

4.2. Opis komórek $\Omega_{alg}SU_2$

Zajmiemy się teraz rozkładem komórkowym $\Omega_{alg}SU_2$. Ponieważ indeksy $\underline{k}$ komórek muszą się sumować do zera, więc mamy w tym przypadku po jednej komórce w każdym wymiarze zespolonym, tj. $\Omega_{(0,0)} \cong \mathrm{pt}$, $\Omega_{(1,-1)} \cong \mathbb{C}$, $\Omega_{(-1,1)} \cong \mathbb{C}^2$ itd. Ogólnie $\Omega_{(m,-m)} \cong \mathbb{C}^{2m-1}$ oraz $\Omega_{(-m,m)} \cong \mathbb{C}^{2m}$. Niech $p : \mathcal{V}^2 \to \mathcal{X}^2$ będzie przekształceniem zdefiniowanym wzorem 3.9. Oznaczmy $\mathcal{Y} := \mathcal{Y}^2 \subseteq \mathcal{X}^2$. Ponadto niech $\mathcal{U} := p^{-1}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{V}^2$. Z definicji $\mathcal{U}$ zawiera bazy ortonormalne przestrzeni $W \ominus zW$ dla $W \in \mathcal{Y}$. Dla spójności oznaczeń niech $\mathcal{Y}_{\underline{k}} := \mathcal{X}_{\underline{k}}$ dla $\underline{k}$ sumującego się do zera. Przeciwobraz komórki $\mathcal{Y}_{\underline{k}} \subseteq \mathcal{Y}$ przy p będziemy oznaczać przez $\mathcal{U}_{\underline{k}} := p^{-1}(\mathcal{Y}_{\underline{k}})$.

Analogicznie jak w §3.4 mamy przemienny diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\vartheta", "\cong"'] \arrow[d, "p"] & \Lambda_{alg}SU_2 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{Y} \arrow[r, "\eta", "\cong"'] & \Omega_{alg}SU_2 \end{tikzcd} \quad . \tag{4.3}$$

Każda macierz $A \in \Lambda_{alg}SU_2$ ma postać

$$A = \begin{pmatrix} f(z) & -\overline{g(z)} \\ g(z) & \overline{f(z)} \end{pmatrix} . \tag{4.4}$$

Niech $v = \begin{pmatrix} f(z) \\ g(z) \end{pmatrix}$. Wprowadźmy oznaczenie

$$\check{v} := \begin{pmatrix} -\overline{g(z)} \\ \overline{f(z)} \end{pmatrix} .$$

Każdy element $(v_1, v_2) \in \mathcal{U}$ musi spełniać $v_2 = \check{v}_1$, ma zatem postać $(v, \check{v})$. Zauważmy, że dla par postaci $(v_1, v_2) = (v, \check{v})$ zachodzi $\langle z^k v_1 | v_2 \rangle = 0$ oraz $\langle z^k v_2 | v_1 \rangle = 0$ dla dowolnego k. Niech $H' := \operatorname{lin}\{z^j \epsilon_i \mid j \in \mathbb{Z}, i = 1, 2\}$, a δ_i^j będzie deltą Kroneckera. Możemy teraz podać bezpośredni opis przestrzeni $\mathcal{U}$.

$$\mathcal{U} = \left\{ (v, \check{v}) \in H' \times H' \mid \langle z^k v | v \rangle = \delta_k^0 \right\} . \tag{4.5}$$

Niech $f(z) = \sum a_i z^i$ oraz $g(z) = \sum c_i z_i$. Wtedy $\overline{f(z)} = \sum \overline{a}_{-i} z^i$ zaś $-\overline{g(z)} = \sum -\overline{c}_{-i} z^i$. W takim razie jeśli $A \in \Omega_{(-m,m)}$ i jest dana wzorem 4.4, to odpowiadająca jej baza ortonormalna $(v, \check{v}) \in \mathcal{U}$ musi wyglądać tak

H	$\epsilon_1 z^{-m}$	$\epsilon_2 z^{-m}$	$\epsilon_1 z^{-m+1}$	$\epsilon_2 z^{-m+1}$	$\cdots$	$\epsilon_1 z^{m-1}$	$\epsilon_2 z^{m-1}$	$\epsilon_1 z^m$	$\epsilon_2 z^m$
$v =$	a_{-m}	c_{-m}	a_{-m+1}	c_{-m+1}	$\cdots$	a_{m-1}	c_{m-1}	a_m	c_m
$\check{v} =$	$-\overline{c}_m$	$\overline{a}_m$	$-\overline{c}_{m-1}$	$\overline{a}_{m-1}$	$\cdots$	$-\overline{c}_{-m+1}$	$\overline{a}_{-m+1}$	$-\overline{c}_{-m}$	$\overline{a}_{-m}$

gdzie $a_{-m} \neq 0$. Niech

$$A_j := \begin{pmatrix} a_j & -\overline{c}_{-j} \\ c_j & \overline{a}_{-j} \end{pmatrix} .$$

Wtedy $A = \sum A_j z^j$. Korzystając z tego, że $\det A = 1$ możemy napisać

$$\begin{aligned} 1 = \det A = \det \left(\sum_{j=-m}^{m} A_j z^j \right) &= \det \left(z^{-m} \sum_{j=0}^{2m} A_{j-m} z^j \right) \\ &= z^{-2m} \det \left(\sum_{j=0}^{2m} A_{j-m} z^j \right) = z^{-2m} \left(\det A_{-m} + \sum_{j=1}^{2m} \xi_j z^j \right) \end{aligned}$$

gdzie ξ_j są pewnymi liczbami zespolonymi. Zatem

$$z^{2m} = \det A_{-m} + \cdots .$$

Porównując współczynniki wielomianów otrzymujemu $\det A_{-m} = 0$. Zauważmy, że zachodzi równość $\det A_{-m} = \overline{\det A_m}$.

Wniosek 4.2.1

$$\det A_{-m} = 0 = \det A_m .$$

Niech $W = p(v, \check{v})$. Wtedy $W \ominus zW = \mathrm{lin}\{v, \check{v}\}$. Ponieważ $\det A_m = 0$, więc rząd A_m jest równy 1, czyli kolumny A_m są liniowo zależne. W takim razie istnieje liczba $r \in \mathbb{C}$ taka, że

$$(a_m, c_m) + r(-\overline{c}_{-m}, \overline{a}_{-m}) = (0, 0)\,.$$

Niech $u = v + r\check{v}$. Wtedy u jest postaci (*uwaga:* a_i, c_i oznaczają teraz jakieś inne liczby niż poprzednio):

H	$\epsilon_1 z^{-m}$	$\epsilon_2 z^{-m}$	$\epsilon_1 z^{-m+1}$	$\epsilon_2 z^{-m+1}$	$\cdots$	$\epsilon_1 z^{m-1}$	$\epsilon_2 z^{m-1}$	$\epsilon_1 z^{m}$	$\epsilon_2 z^{m}$
$u =$	a_{-m}	c_{-m}	a_{-m+1}	c_{-m+1}	$\cdots$	a_{m-1}	c_{m-1}	0	0

Możemy założyć, że $\|u\| = 1$. Ponieważ $u \in W \ominus zW$, więc $(u, \check{u}) \in \mathcal{U}$ i ma postać

H	$\epsilon_1 z^{-m}$	$\epsilon_2 z^{-m}$	$\epsilon_1 z^{-m+1}$	$\epsilon_2 z^{-m+1}$	$\cdots$	$\epsilon_1 z^{m-1}$	$\epsilon_2 z^{m-1}$	$\epsilon_1 z^{m}$	$\epsilon_2 z^{m}$
$u =$	a_{-m}	c_{-m}	a_{-m+1}	c_{-m+1}	$\cdots$	a_{m-1}	c_{m-1}	0	0
$\check{u} =$	0	0	$-\overline{c}_{m-1}$	$\overline{a}_{m-1}$	$\cdots$	$-\overline{c}_{-m+1}$	$\overline{a}_{-m+1}$	$-\overline{c}_{-m}$	$\overline{a}_{-m}$

(4.6)

gdzie $a_{-m} \neq 0$. Jeśli zażądamy dodtakowo, by $a_{-m} \in \mathbb{R}^+$, to baza $(u, \check{u})$ będzie wyznaczona jednoznacznie. Wybór takiej bazy definiuje nam ciągłą iniekcję

$$s_{(-m,m)} : \mathcal{Y}_{(-m,m)} \to \mathcal{U}_{(-m,m)}\,.$$

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić gdy $A \in \Omega_{(m,-m)}$, czyli $W \in \mathcal{Y}_{(m,-m)}$. Wtedy znajdziemy bazę $W \ominus zW$ postaci

H	$\epsilon_1 z^{-m}$	$\epsilon_2 z^{-m}$	$\epsilon_1 z^{-m+1}$	$\epsilon_2 z^{-m+1}$	$\cdots$	$\epsilon_1 z^{m-1}$	$\epsilon_2 z^{m-1}$	$\epsilon_1 z^{m}$	$\epsilon_2 z^{m}$
$u =$	0	c_{-m}	a_{-m+1}	c_{-m+1}	$\cdots$	a_{m-1}	c_{m-1}	0	0
$\check{u} =$	0	0	$-\overline{c}_{m-1}$	$\overline{a}_{m-1}$	$\cdots$	$-\overline{c}_{-m+1}$	$\overline{a}_{-m+1}$	$-\overline{c}_{-m}$	0

(4.7)

gdzie $c_{-m} \neq 0$. Jeśli zażądamy, by $c_{-m} \in \mathbb{R}^+$, to znów taka baza będzie wyznaczona jednoznacznie. Definiuje nam to ciągłą iniekcję

$$s_{(m,-m)} : \mathcal{Y}_{(m,-m)} \to \mathcal{U}_{(m,-m)}\,.$$

W ten sposób dla każdej komórki $\mathcal{Y}_{\underline{k}}$ znaleźliśmy przekrój $p : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ nad tą komórką. Umiemy zatem podnosić każdą komórkę z osobna.

Motywacją dalszych rozważań jest wynik opisany w pracy [Bot58]. Nich K będzie spójną i zwartą grupą Lie, $s : S^1 \to K$ homomorfizmem grup. Przez K_s oznaczymy centralizator obrazu s w K, a przez K^s przestrzeń ilorazową K/K_s. Rozważmy przekształcenie $K \to \Omega K$ dane wzorem $x \mapsto \big[z \mapsto xs(z)x^{-1}s^{-1}(z)\big]$. Jest ono stałe na K_s, więc indukuje przekształcenie $g^s : K^s \to \Omega K$. Homologie $H_\star(\Omega K)$ tworzą tzw. pierścień Pontryagina, gdzie mnożenie jest indukowane przez mnożenie w grupie ΩK. Przy pewnych dodatkowych założeniach o s, Bott udowodnił, że obraz $g^s_\star : H_\star(K^s) \to H_\star(\Omega K)$ generuje cały pierścień $H_\star(\Omega K)$. Niech $\bar{K}^s := g^s(K^s)$. Wynik Botta pozwala przypuszczać, że każdy element ΩK daje się przedstawić, jako iloczyn elementów z $\bar{K}^s$. Podążymy tym tropem, choć nie będziemy się sztywno trzymać opisanej tu procedury.

Wiemy już, że $\Omega_{alg} SU_2$ ma po jednej komórce w każdym parzystym wymiarze. Przyjrzymy się bliżej komórce 2-wymiarowej i 4-wymiarowej oraz iloczynom elementów tych komórek. Niech $(u, \check{u}) \in \mathcal{U}_{(1,-1)}$ będzie postaci 4.7.

H	$\epsilon_1 z^{-1}$	$\epsilon_2 z^{-1}$	$\epsilon_1 z^{0}$	$\epsilon_2 z^{0}$	$\epsilon_1 z^{1}$	$\epsilon_2 z^{1}$
$u =$	0	b	c	d	0	0
$\check{u} =$	0	0	$-\overline{d}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	0

gdzie $b \in \mathbb{R}^+$. Z równania 4.5 wynika, że u musi spełniać równanie $\langle zu|u\rangle = 0$, czyli $b\overline{d} = 0$. Ponieważ założyliśmy, że $b \in \mathbb{R}^+$, więc $d = 0$. Przechodząc przez homeomorfizm $\mathcal{U} \xrightarrow{\vartheta} \Lambda_{alg}SU_2$ otrzymujemy macierz

$$\begin{pmatrix} c & -\overline{b}z \\ bz^{-1} & \overline{c} \end{pmatrix} . \tag{4.8}$$

Daje nam to opis podniesienia komórki $\Omega_{(1,-1)}$ do $\Lambda_{alg}SU_2$.

Definicja 4.2.2

$$\mathcal{A} := \vartheta\left(s_{(1,-1)}\left(\mathcal{Y}_{(1,-1)}\right)\right) = \left\{ \begin{pmatrix} c & -\overline{b}z \\ bz^{-1} & \overline{c} \end{pmatrix} \middle| |c| < 1,\ b = \sqrt{1-|c|^2} \in \mathbb{R}^+ \right\} .$$

Niech teraz $(u, \check{u}) \in \mathcal{U}_{(-1,1)}$ będzie postaci 4.6.

H	$\epsilon_1 z^{-1}$	$\epsilon_2 z^{-1}$	$\epsilon_1 z^0$	$\epsilon_2 z^0$	$\epsilon_1 z^1$	$\epsilon_2 z^1$
$u =$	a	b	c	d	0	0
$\check{u} =$	0	0	$-\overline{d}$	$\overline{c}$	$-\overline{b}$	$\overline{a}$

gdzie $a \in \mathbb{R}^+$. Ponadto musi być spełnione równanie $\langle zu|u\rangle = 0$, czyli $a\overline{c}+b\overline{d} = 0$. Przechodząc przez homeomorfizm ϑ otrzymujemy macierz

$$\begin{pmatrix} az^{-1}+c & -\overline{b}z - \overline{d} \\ bz^{-1}+d & \overline{a}z+\overline{c} \end{pmatrix} . \tag{4.9}$$

Niestety iloczyn macierzy pochodzących z $\mathcal{A}$ nie jest postaci 4.9. Dokładniej, iloczyn dwóch macierzy postaci 4.8 nadal jest postaci 4.8 i leży w 2-wymiarowej komórce. Zauważmy jednak, że każdą macierz postaci 4.9 spełniającą $a\overline{c} + b\overline{d} = 0$ można przedstawić jako iloczyn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \gamma & -\overline{\delta} \\ \delta & \overline{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta}z \\ \beta z^{-1} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\overline{\delta}\beta z^{-1} + \alpha\gamma & -\gamma\overline{\beta}z - \overline{\alpha}\overline{\delta} \\ \overline{\gamma}\beta z^{-1} + \alpha\delta & -\delta\overline{\beta}z + \overline{\alpha}\overline{\gamma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} az^{-1}+c & -\overline{b}z - \overline{d} \\ bz^{-1}+d & \overline{a}z+\overline{c} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Wówczas

$$a\overline{c} + b\overline{d} = -\overline{\delta}\beta\overline{\alpha\gamma} + \overline{\gamma}\beta\overline{\alpha}\overline{\delta} = 0 .$$

Stosunek $[a : b]$ jest taki sam jak stosunek $[-\overline{\delta} : \overline{\gamma}]$. Jeśli założymy, że $\delta \in \mathbb{R}^-$, $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ oraz że $a \neq 0$, to znając a i b będziemy mogli odzyskać γ i δ. Mianowicie

$$\text{jeśli } \frac{b}{a} = \xi \quad \text{to} \quad \gamma = \frac{\overline{\xi}}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \qquad \delta = \frac{-1}{\sqrt{1+|\xi|^2}} .$$

Pokazaliśmy, że mając a, b, c i d takie, że $a \neq 0$ oraz $a\overline{c} + b\overline{d} = 0$ możemy odzyskać cały rozkład 4.10. Będzie on jednoznaczny jeśli założymy dodatkowo, że $\delta \in \mathbb{R}^-$.

Definicja 4.2.3

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \middle| |a| < 1,\ b = -\sqrt{1-|a|^2} \in \mathbb{R}^- \right\} .$$

Jasne jest, że przestrzenie $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są homeomorficzne z dyskiem dwuwymiarowym D^2. Poza tym mamy naturalne włożenia tych przestrzeni w $\Lambda_{alg}SU_2$.

$$\alpha : \mathcal{A} \hookrightarrow \Lambda_{alg}SU_2\,,$$
$$\beta : \mathcal{B} \hookrightarrow \Lambda_{alg}SU_2\,.$$

Zdefiniujmy przekształcenia

$$\phi_{(-p,p)} : (\mathcal{B} \times \mathcal{A})^p \to \Lambda_{alg}SU_2\,,$$
$$\phi_{(p,-p)} : \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{A})^{p-1} \to \Lambda_{alg}SU_2$$

wzorami

$$\phi_{(-p,p)}(B_1, A_1, \ldots, B_p, A_p) = \beta(B_1)\alpha(A_1)\cdots\beta(B_p)\alpha(A_p)\,,$$
$$\phi_{(p,-p)}(A_1, B_2, A_2, \ldots, B_p, A_p) = \alpha(A_0)\beta(B_1)\alpha(A_1)\cdots\beta(B_n)\alpha(A_n)\,.$$

W dalszych rozważaniach będziemy traktować $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jako podprzestrzenie $\Lambda_{alg}SU_2$ i zapomnimy o przekształceniach α i β.

Definicja 4.2.4 Niech

$$M = \begin{pmatrix} f(z) & -\overline{g(z)} \\ g(z) & \overline{f(z)} \end{pmatrix} \in \Lambda_{alg}SU_2\,.$$

Powiemy, że M jest *typu* ***BA*** jeśli

$$f(z) = az^{-p-1} + \cdots + cz^p \quad g(z) = bz^{-p-1} + \cdots + dz^p \qquad \text{oraz } a \in \mathbb{R}^+,\ p \in \mathbb{N}\,.$$

Powiemy, że M jest *typu* ***A*** jeśli

$$f(z) = az^{-p} + \cdots + cz^p \quad g(z) = bz^{-p-1} + \cdots + dz^p \qquad \text{oraz } b \in \mathbb{R}^+,\ p \in \mathbb{N}\,.$$

Zauważmy, że każda macierz $M \in \mathcal{A}$ jest typu **A**. Niech π będzie zdefiniowane jak w 4.3. Jeśli M jest typu **A**, to $\pi(M) \in \Omega_{(p,-p)}$, a jeśli M jest typu **BA**, to $\pi(M) \in \Omega_{(-p,p)}$. Macierze typu **BA** odpowiadają elementom $\mathcal{U}$ postaci 4.6, a macierze typu **A** elementom postaci 4.7. Wykazaliśmy, już że każdą komórkę $\mathcal{Y}_{\underline{k}} \subseteq \mathcal{Y}$ można podnieść do $\mathcal{U}$ wybierając układ wektorów postaci 4.6 lub 4.7.

Wniosek 4.2.5 *Niech $\omega \in \Omega_{alg}SU_2$. Wówczas we włóknie $\pi^{-1}(\omega)$ jest tylko jedna macierz typu **A** lub typu **BA**.*

Lemat 4.2.6
*Jeśli $M \in \Lambda_{alg}SU_2$ jest macierzą typu **BA**, to istnieje dokładnie jedna macierz $B \in \mathcal{B}$ taka, że $M = B\widetilde{M}$ oraz $\widetilde{M}$ jest typu **A**. Ponadto jeśli $\pi(M) \in \Omega_{(-p,p)}$, to $\pi(\widetilde{M}) \in \Omega_{(p,-p)}$*
*Jeśli $M \in \Lambda_{alg}SU_2$ jest macierzą typu **A** oraz $M \notin \mathcal{A}$, to istnieje dokładnie jedna macierz $A \in \mathcal{A}$ taka, że $M = A\widetilde{M}$ oraz $\widetilde{M}$ jest typu **BA**. Ponadto jeśli $\pi(M) \in \Omega_{(p+1,-p-1)}$, to $\pi(\widetilde{M}) \in \Omega_{(-p,p)}$*

Dowód: Niech M będzie typu **BA** taka, że $\pi(M) \in \Omega_{(-p,p)}$.

$$M = \begin{pmatrix} f(z) & -\overline{g(z)} \\ g(z) & \overline{f(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az^{-p} + \cdots + cz^{p-1} & -\overline{d}z^{-p+1} - \cdots - \overline{b}z^p \\ bz^{-p} + \cdots + dz^{p-1} & \overline{c}z^{-p+1} + \cdots + \overline{a}z^p \end{pmatrix} \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}^+\,.$$

Niech $\gamma \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathbb{R}^-$ będą takie, że $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ oraz $\overline{\gamma} a + \overline{\delta} b = 0$. Innymi słowy mamy równość stosunków $[b : a] = -[\overline{\gamma} : \overline{\delta}]$. Powyższe warunki definiują liczby γ i δ jednoznacznie. Niech

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & -\overline{\delta} \\ \delta & \overline{\gamma} \end{pmatrix} \in \mathcal{B} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\gamma} & \overline{\delta} \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1}M = \begin{pmatrix} \overline{\gamma} f + \overline{\delta} g & -\overline{\gamma g} + \overline{\delta f} \\ -\delta f + \gamma g & \delta \overline{g} + \gamma \overline{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{\gamma} a + \overline{\delta} b) z^{-p} + \cdots + (\overline{\gamma} c + \overline{\delta} d) z^{p-1} & \ldots \\ (-\delta a + \gamma b) z^{-p} + \cdots + (-\delta c + \gamma d) z^{p-1} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Wiemy, że $\overline{\gamma} a = -\overline{\delta} b$ oraz $\delta \in \mathbb{R}^-$ i $a \in \mathbb{R}^+$. W takim razie $\operatorname{corank}(\overline{\gamma} f + \overline{\delta} g) > -p$. Ponadto

$$\overline{-\delta a + \gamma b} = -\delta a + \overline{\gamma} \overline{b} = a^{-1} \left(-\delta a^2 + \overline{\gamma} a \overline{b} \right) = a^{-1} \left(-\delta a^2 - \overline{\delta} b \overline{b} \right) = -\frac{\delta}{a} \left(a^2 + |b|^2 \right) \in \mathbb{R}^+.$$

Wynika stąd, że $\widetilde{M} := B^{-1} M$ jest typu **A** oraz $\pi(\widetilde{M}) \in \Omega_{(p,-p)}$. Macierz B była wyznaczona jednoznacznie przez stosunek $[-\overline{\delta} : \overline{\gamma}]$. To kończy dowód pierwszej części lematu.

Druga część dowodu będzie wymagać głębszej analizy macierzy typu **A**. Niech M będzie typu A taka, że $\pi(M) \in \Omega_{(p+1,-p-1)}$.

$$M = \begin{pmatrix} f(z) & -\overline{g(z)} \\ g(z) & \overline{f(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{-p} z^{-p} + \cdots + a_p z^p & -\overline{b}_p z^{-p} - \cdots - \overline{b}_{-p-1} z^{p+1} \\ b_{-p-1} z^{-p-1} + \cdots + b_p z^p & \overline{a}_p z^{-p} + \cdots + \overline{a}_{-p} z^p \end{pmatrix}.$$

gdzie $b_{-p-1} \in \mathbb{R}^+$. Odpowiadająca tej macierzy baza $(u, \check{u}) \in \mathcal{U}$ ma postać

	z^{-p-1}		z^{-p}		$\cdots$	z^{p-1}		z^p		z^{p+1}	
$u =$	0	b_{-p-1}	a_{-p}	b_{-p}	$\cdots$	a_{p-1}	b_{p-1}	a_p	b_p	0	0
$\check{u} =$	0	0	$-\overline{b}_p$	$\overline{a}_p$	$\cdots$	$-\overline{b}_{-p+1}$	$\overline{a}_{-p+1}$	$-\overline{b}_{-p}$	$\overline{a}_{-p}$	$-\overline{b}_{-p-1}$	0

Wektor u musi spełniać równania $\langle z^k u | u \rangle = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}^+$.

$$\langle z^{2p+1} u | u \rangle = b_{-p-1} \overline{b}_p = 0 \quad \Rightarrow \quad b_p = 0.$$

Niech $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ będą takie, że $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ oraz $\alpha b_{-p-1} - \beta a_{-p} = 0$. Innymi słowy mamy równość stosunków $[a_{-p} : b_{-p-1}] = [\alpha : \beta]$. Powyższe warunki definiują liczby α i β jednoznacznie. Niech

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} z \\ \beta z^{-1} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} z \\ -\beta z^{-1} & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{M} := A^{-1} M = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} f + \overline{\beta} z g & -\overline{\alpha g} + \overline{\beta} z \overline{f} \\ -\beta z^{-1} f + \alpha g & \beta z^{-1} \overline{g} + \alpha \overline{f} \end{pmatrix}.$$

Uwzględniając równości $b_p = 0$ oraz $-\beta a_{-p} + \alpha b_{-p-1} = 0$ otrzymujemy

$$\overline{\alpha} f + \overline{\beta} z g = (\overline{\alpha} a_{-p} + \overline{\beta} b_{-p-1}) z^{-p} + \cdots + (\overline{\alpha} a_p + \overline{\beta} b_{p-1}) z^p,$$
$$-\beta z^{-1} f + \alpha g = (-\beta a_{-p+1} + \alpha b_{-p}) z^{-p} + \cdots + (-\beta a_p + \alpha b_{p-1}) z^{p-1}.$$

Wiemy, że $b, \beta \in \mathbb{R}^+$ oraz $\beta a_{-p} = \alpha b_{-p-1}$, więc

$$\overline{\alpha} a_{-p} + \overline{\beta} b_{-p-1} = \beta^{-1} \left(\overline{\alpha} \beta a_{-p} + \beta^2 b_{-p-1} \right) = \frac{b_{-p-1}}{\beta} \left(|\alpha|^2 + \beta^2 \right) \in \mathbb{R}^+.$$

Macierzy $\widetilde{M}$ odpowiada pewna baza $(v, \check{v}) \in \mathcal{U}$. Niech $\xi_i := \overline{\alpha} a_i + \overline{\beta} b_{i-1}$ oraz $\zeta_i := -\beta a_{i+1} + \alpha b_i$. Baza $(v, \check{v})$ zapisuje się jako

	z^{-p-1}		z^{-p}		$\cdots$	z^{p-1}		z^p		z^{p+1}	
$v =$	0	0	ξ_{-p}	ζ_{-p}	$\cdots$	ξ_{p-1}	ζ_{p-1}	ξ_p	0	0	0
$\check{v} =$	0	0	0	$\overline{\xi}_p$	$\cdots$	$-\overline{\zeta}_{-p+1}$	$\overline{\xi}_{-p+1}$	$-\overline{\zeta}_{-p}$	$\overline{\xi}_{-p}$	0	0

Jeślibyśmy wiedzieli, że $\xi_p = 0$, to $\widetilde{M}$ byłaby typu **BA** oraz $\pi(\widetilde{M}) \in \Omega_{(-p,p)}$. Wiemy, że $\xi_{-p} \in \mathbb{R}^+$ w szczególności $\xi_{-p} \neq 0$. Jeśli $\xi_p \neq 0$ to wtedy

$$\det \begin{pmatrix} \xi_p & -\overline{\zeta}_{-p} \\ 0 & \overline{\xi}_{-p} \end{pmatrix} \neq 0$$

co stoi w sprzeczności z wnioskiem 4.2.1. W takim razie $\xi_p = 0$ i macierz $\widetilde{M}$ jest typu **BA**. Macierz A jest wyznaczona jednoznacznie przez stosunek współczynników $[a_{-p} : b_{-p-1}]$. □

Twierdzenie 4.2.7
*Jeśli M jest macierzą typu **BA**, $\pi(M) \in \Omega_{(-p,p)}$ oraz $p \geqslant 1$, to istnieje jednoznaczna reprezentacja M w postaci iloczynu*

$$M = B_1 A_1 \cdots B_p A_p \tag{4.11}$$

gdzie $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$
*Jeśli M jest macierzą typu **A**, $\pi(M) \in \Omega_{(p,-p)}$ oraz $p \geqslant 1$, to istnieje jednoznaczna reprezentacja M w postaci iloczynu*

$$M = A_1 B_2 A_2 \cdots B_p A_p \tag{4.12}$$

gdzie $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$

Dowód: Indukcja ze względu na wymiar komórki, w której leży $\pi(M)$. Zakładaliśmy, że $p \geqslant 1$, więc indukcję zaczynamy od komórki 2-wymiarowej $\Omega_{(1,-1)}$. Jeśli $\pi(M) \in \Omega_{(1,-1)}$, to $M \in \mathcal{A}$, więc M już jest w postaci 4.12. Załóżmy, że M jest typu A i leży w podniesieniu $(4p+2)$-wymiarowej komórki, czyli $\pi(M) \in \Omega_{(p+1,-p-1)}$. Z lematu 4.2.6 wynika, że istnieje jednoznaczny rozkład $M = A\widetilde{M}$ dla $A \in \mathcal{A}$ oraz $\pi(\widetilde{M}) \in \Omega_{(-p,p)}$. Z założenia indukcyjnego $\widetilde{M}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci 4.11. Podobnie postępujemy gdy M jest typu **BA** i $\pi(M) \in \Omega_{(-p,p)}$. Wtedy z lematu 4.2.6 mamy jednoznaczny rozkład $M = B\widetilde{M}$, gdzie $B \in \mathcal{B}$, a $\pi(\widetilde{M}) \in \Omega_{(p-1,-p+1)}$. Z założenia indukcyjnego $\widetilde{M}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci 4.12. □

Dla skrócenia zapisu wprowadźmy oznaczenia

$$\mathfrak{Dom}_{(-p,p)} := (\mathcal{B} \times \mathcal{A})^p, \qquad \mathfrak{Dom}_{(p,-p)} := \mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{A})^{p-1}. \tag{4.13}$$

Wniosek 4.2.8 *Niech*

$$\psi_{\underline{k}} := \pi \circ \phi_{\underline{k}} : \mathfrak{Dom}_{\underline{k}} \to \Omega_{alg} SU_2 .$$

Obrazem $\psi_{\underline{k}}$ jest $\Omega_{\underline{k}}$. Ponadto $\psi_{\underline{k}}$ są ciągłymi bijekcjami na swoje obrazy.

Dowód: Twierdzenie 4.2.7 mówi, że $\phi_{\underline{k}}$ są różnowartościowe oraz, że obrazem $\phi_{\underline{k}}$ są wszystkie macierze typu **A** lub typu **BA** leżące w przeciwobrazie $\pi^{-1}(\Omega_{\underline{k}})$. W takim razie $\psi_{\underline{k}}$ jest „na" $\Omega_{\underline{k}}$. Z wniosku 4.2.5 wynika, że w każdym włóknie jest tylko jedna macierz typu **A** lub typu **BA**, więc $\psi_{\underline{k}}$ są różnowartościowe. □

Przestrzenie $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są podzbiorami $\Lambda_{alg} SU_2$, więc można je domknąć w $\Lambda_{alg} SU_2$. Przekształcenia $\phi_{\underline{k}}$ są zdefiniowane przez mnożenie pewnej ilości elementów z $\Lambda_{alg} SU_2$ i w naturalny sposób rozszerzają się na domknięcia swoich dziedzin. Zatem $\psi_{\underline{k}}$ też rozszerzają się na domknięcia swoich dziedzin.

$$\overline{\psi}_{\underline{k}} : \overline{\mathfrak{Dom}}_{\underline{k}} \to \Omega_{alg} SU_2 \,.$$

W brzegu $\mathcal{A}$ tak samo jak i w brzegu $\mathcal{B}$ znajdują się macierze diagonalne.

$$\mathcal{D} := \partial \mathcal{A} = \partial \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \overline{c} \end{pmatrix} \;\middle|\; |c| = 1 \right\} .$$

Lemat 4.2.9

$$\mathcal{D}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{D} \quad oraz \quad \mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D} \,.$$

Dowód: Niech $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ oraz $D \in \mathcal{D}$. Znajdziemy takie $A' \in \mathcal{A}$ oraz $B' \in \mathcal{B}$, by $DA = A'D^{-1}$ oraz $DB = B'D^{-1}$. Połóżmy

$$A' := DAD = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \overline{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\overline{b}z \\ bz^{-1} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 a & -\overline{b}z \\ bz^{-1} & \overline{c}^2 \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

oraz

$$B' := DBD = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \overline{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \overline{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 a & -\overline{b} \\ b & \overline{c}^2 \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{B} \,.$$

Takie definicje od razu dają $B'D^{-1} = DB$ oraz $A'D^{-1} = DA$. □

Niech $\Omega^{(j)}$ oznacza j-wymiarowy szkielet $\Omega_{alg} SU_2$, czyli

$$\Omega^{(j)} = \bigcup \left\{ \Omega_{\underline{k}} \mid l_{\underline{k}} \leqslant j \right\} \,.$$

Lemat 4.2.10 *Obcięcie $\overline{\psi}_{\underline{k}}$ do $\partial \overline{\mathfrak{Dom}}_{\underline{k}}$ definiuje przekształcenie*

$$\partial \overline{\mathfrak{Dom}}_{\underline{k}} \cong S^{l_{\underline{k}}-1} \to \Omega^{(l_{\underline{k}}-1)} \,.$$

Dowód: Musimy pokazać, że obraz brzegu $\partial \overline{\mathfrak{Dom}}_{\underline{k}}$ przy $\overline{\psi}_{\underline{k}}$ leży w komórkach wymiaru co najwyżej $l_{\underline{k}} - 1$. Niech $A_i \in \overline{\mathcal{A}}$, $B_j \in \overline{\mathcal{B}}$ dla $i, j = 1, \ldots, p$. Niektóre z macierzy A_i, B_j mogą być diagonalne. Te, które nie są diagonalne muszą leżeć we wnętrzu $\mathcal{A}$ lub we wnętrzu $\mathcal{B}$. Załóżmy, że co najmniej jedna z A_i, B_j jest diagonalna. Wtedy $(B_1, A_1, \ldots, B_p, A_p) \in \partial \overline{\mathfrak{Dom}}_{(-p,p)}$. Z lematu 4.2.9 wiemy, że wszystkie diagonalne macierze występujące w iloczynie $B_1 A_1 \cdots B_p A_p$ możemy przesunąć w prawo otrzymując

$$B_1 A_1 \cdots B_p A_p = B'_1 A'_1 \cdots B'_q A'_q D$$

gdzie $q \leqslant p$ oraz

$$D \in \mathcal{D} \,, \quad B'_1 \in \mathcal{B} \cup \{I\} \,, \quad B'_j \in \mathcal{B} \text{ dla } j = 2, \ldots, q \,, \quad A'_i \in \mathcal{A} \text{ dla } i = 1, \ldots, q \,.$$

Jeśli tylko $B'_1 \neq I$, to $q < p$. Jeśli $B'_1 = I$, to może się zdarzyć, że $q = p$ ale iloczyn po prawej stronie równości i tak będzie krótszy niż ten po lewej. Załóżmy, że $B'_1 \neq I$, więc $q < p$. Wtedy $\overline{\psi}_{(-p,p)}(B_1, A_1, \ldots, B_p, A_p) = \pi(B_1 A_1 \cdots B_p A_p) = \pi(B'_1 A'_1 \cdots B'_q A'_q D)$. Ponieważ π jest rzutowaniem $\Lambda_{alg} SU_2 \to \Lambda_{alg} SU_2 / SU_2$, a $D \in SU_2$ jest pętlą stałą, więc $\pi(B'_1 A'_1 \cdots B'_q A'_q D) = \pi(B'_1 A'_1 \cdots B'_q A'_q)$. Stąd

$$\overline{\psi}_{(-p,p)}(B_1, A_1, \ldots, B_p, A_p) = \psi_{(-q,q)}(B'_1 A'_1 \cdots B'_q A'_q) \,.$$

Z wniosku 4.2.8 wiemy, że obrazem $\psi_{(-q,q)}$ jest $\Omega_{(-q,q)}$. Ponieważ $q < p$, więc wymiar $\Omega_{(-q,q)}$ jest mniejszy niż $l_{(-p,p)}$.

Jeśli $B_1' = I$, to $q \leqslant p$ i otrzymujemy

$$\overline{\psi}_{(-p,p)}(B_1, A_1, \ldots, B_p, A_p) = \psi_{(q-1,-q+1)}(A_1' B_2' A_2' \cdots B_q' A_q') \in \Omega_{(q-1,-q+1)}\,.$$

Ponownie wymiar $\Omega_{(q-1,-q+1)}$ jest mniejszy niż $l_{(-p,p)}$. Identyczne rozumowanie stosuje się do $\overline{\psi}_{(p,-p)}$. □

Pokazaliśmy już w 4.2.8, że $\psi_{\underline{k}}$ zadają ciągłe bijekcje $\mathfrak{Dom}_{\underline{k}} \to \Omega_{\underline{k}}$. Ponadto z lematu 4.2.10 wynika, że obraz brzegu $\partial\overline{\mathfrak{Dom}_{\underline{k}}}$ ma puste przecięcie z obrazem wnętrza $\mathfrak{Dom}_{\underline{k}}$.

$$\overline{\psi}_{\underline{k}}(\partial\overline{\mathfrak{Dom}_{\underline{k}}}) \cap \psi_{\underline{k}}(\mathfrak{Dom}_{\underline{k}}) = \emptyset\,.$$

Udowodnimy teraz prosty topologiczny fakt, z którego wynika, że $\psi_{\underline{k}}$ jest homeomorfizmem na swój obraz.

Stwierdzenie 4.2.11 *Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną, K przestrzenią zwartą, $U \subseteq K$ otwartym podzbiorem, zaś $\overline{\varphi} : K \to X$ ciągłym odwzorowaniem. Oznaczmy przez $\varphi : U \to \overline{\varphi}(U)$ obcięcie $\overline{\varphi}$ do U. Załóżmy, że $\overline{\varphi}$ spełnia warunki:*

1. *$\varphi : U \to \varphi(U)$ jest bijekcją,*
2. *$\overline{\varphi}(K \setminus U) \cap \varphi(U) = \emptyset$.*

Wówczas $\varphi : U \to \varphi(U)$ jest homeomorfizmem.

Dowód: Ponieważ φ jest ciągłe i różnowartościowe, więc wystarczy pokazać, że jest otwarte. Ponieważ φ jest bijekcją, więc jest otwarte wtedy i tylko wtedy gdy jest domknięte. Pokażemy, że jest domknięte. Domknięte podzbiory U to przecięcia domkniętych podzbiorów K z U, więc jeśli $F \subseteq U$ jest domknięty, to istnieje $\widetilde{F} \subseteq K$ domknięty i taki, że $\widetilde{F} \cap U = F$. Zbiór $\widetilde{F} \subseteq K$ jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego, więc jest zwarty. Zatem $\overline{\varphi}(\widetilde{F}) \subseteq X$ też jest zwarty jako ciągły obraz zbioru zwartego, czyli jest domknięty w X. Zauważmy, że $\widetilde{F} \setminus F \subseteq K \setminus U$ oraz $F \subseteq U$, więc

$$\overline{\varphi}(\widetilde{F}) = \overline{\varphi}(\widetilde{F} \setminus F) \sqcup \varphi(F)\,.$$

(symbol $\sqcup$ oznacza sumę rozłączną) gdyż $\overline{\varphi}(K \setminus U) \cap \varphi(U) = \emptyset$. W takim razie

$$\varphi(F) = \overline{\varphi}(\widetilde{F}) \cap \varphi(U)\,.$$

Zbiór $\overline{\varphi}(\widetilde{F})$ był domknięty w X, więc $\varphi(F)$ jest domknięty w $\varphi(U)$ wprost z definicji topologii podprzestrzeni. □

Wniosek 4.2.12 *Odwzorowanie $\psi_{\underline{k}} : \mathfrak{Dom}_{\underline{k}} \to \Omega_{\underline{k}}$ jest homeomorfizmem.*

Przypomnijmy, że przez $\Omega^{(j)}$ oznaczaliśmy j-wymiarowy szkielet $\Omega_{alg}SU_2$. Przestrzeń $\overline{\mathfrak{Dom}_{\underline{k}}}$ jest homeomorficzna z $\overline{D}^{2l_{\underline{k}}}$. W takim razie dla każdej komórki $\Omega_{\underline{k}}$ znaleźliśmy ciągłe przekształcenie $\overline{\psi}_{\underline{k}} : \overline{D}^{2l_{\underline{k}}} \to \Omega_{alg}SU_2$ spełniające

1. obcięcie do wnętrza dysku $\overline{\psi}_{\underline{k}}\Big|_{D^{2l_{\underline{k}}}}$ zadaje homeomorfizm $D^{2l_{\underline{k}}} \xrightarrow{\cong} \Omega_{\underline{k}}$,
2. obcięcie do brzegu dysku $\overline{\psi}_{\underline{k}}\Big|_{\partial D^{2l_{\underline{k}}}}$ zadaje przekształcenie $S^{2l_{\underline{k}}-1} \longrightarrow \Omega^{(2l_{\underline{k}}-1)}$.

Wniosek 4.2.13 *Odwzorowania $\overline{\psi}_{\underline{k}}$ zadają przekształcenia charakterystyczne CW-rozkładu przestrzeni $\Omega_{alg}SU_2$.*

Bibliografia

[Ada69] J. F. Adams, *Lectures on Lie Groups*, W.A. Benjamin, Inc., New York 1969

[Bot58] R. Bott, „The space of loops on a Lie group" w *The Michigan Mathematical Journal* vol. 5, 1958, s. 35-61

[CSM95] R. Carter, G. Segal, I. Macdonald, *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge 1995

[Gin90] V. A. Ginzburg, „Sheaves on a loop group, and Langlands duality" w *Functional Analysis and Its Applications* vol. 24 num. 4, Springer New York, 1990, s. 326–327

[Kna96] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser Boston, Boston 1996

[Mil59] J. Milnor, „On spaces having the homotopy type of a CW-complex" w *Transactions of the American Mathematical Society* vol. 90, 1959, s. 272-280

[Mit86] S. A. Mitchell, „A Filtration of the Loops on $SU(N)$ by Schubert Varieties" w *Mathematische Zeitschrift* vol. 193, Springer Berlin, 1986, s. 347-362

[MS74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1974

[Pre80] A. Pressley, „Decomposition of the Space of Loops on a Lie Group" w *Topology* vol. 19, Pergamon Press Ltd., 1980, s. 65–79

[PS88] A. Pressley, G.Segal, *Loop Groups*, Oxford University Press, New York 1988