

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Michał Adamaszek**

Nr albumu: 197842

# Przestrzenie odwzorowań wymiernych

Praca magisterska  
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem  
**prof. dr hab. Stefana Jackowskiego**  
Instytut Matematyki

Sierpień 2007

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora (autorów) pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

## **Streszczenie**

Udowadniamy, że przestrzeń odwzorowań wymiernych z jednowymiarowej do  $n$ -wymiarowej zespolonej przestrzeni rzutowej jest dobrym homotopijnym przybliżeniem przestrzeni wszystkich odwzorowań ciągłych między tymi przestrzeniami (twierdzenie G. Segala). W tym celu wykorzystujemy specjalnie skonstruowane „pośrednie” przestrzenie odwzorowań i badamy ich topologię. Okazuje się, że pozwalają one poprawnie zastosować technikę wprowadzoną przez Mostovoy’a przy nieudanej próbie przeanalizowania przypadku odwzorowań z dowolnej zespolonej przestrzeni rzutowej.

## **Słowa kluczowe**

odwzorowania wymierne, przestrzenie rzutowe, twierdzenie Segala, rezolwenta symplecticzna, ciąg spektralny Vassilieva

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

### **Według AMS:**

55R80 – Discriminantal varieties, configuration spaces

55P35 – Loop spaces

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

Spaces of rational maps



# Spis treści

|   |    |
|---|----|
| <b>1. Wprowadzenie</b> . . . . .                                  | 5  |
| <b>2. Definicje i zarys dowodu</b> . . . . .                      | 9  |
| 2.1. Przestrzenie odwzorowań . . . . .                            | 9  |
| 2.2. Reprezentacje wielomianowe . . . . .                         | 10 |
| 2.3. Dowód twierdzenia 1 . . . . .                                | 11 |
| <b>3. Ściągalność włókna</b> . . . . .                            | 15 |
| <b>4. Stabilizacja</b> . . . . .                                  | 19 |
| 4.1. Informacje o rezolwencji symplecticznej . . . . .            | 19 |
| 4.2. Krótka dygresja algebroliniowa . . . . .                     | 20 |
| 4.3. Rezolwenta symplecticzna Vassilieva . . . . .                | 20 |
| 4.4. Ciąg spektralny . . . . .                                    | 22 |
| <b>5. Uwagi</b> . . . . .   | 25 |
| 5.1. $ARat$ vs. $Rat$ . . . . .                                   | 25 |
| 5.2. $\mathbb{C}$ vs. $\mathbb{R}$ . . . . .                      | 25 |
| 5.3. $Map^*$ vs. $Map^g$ . . . . .                                | 26 |
| 5.4. Po co $(p, q)$ ? . . . . .                                   | 27 |
| 5.5. Kilka słów o przypadku rzeczywistym . . . . .                | 27 |
| <b>Dodatek – ściągalność włókna w przypadku ogólnym</b> . . . . . | 29 |
| <b>Bibliografia</b> . . . . .                                     | 31 |



# Rozdział 1

## Wprowadzenie

Jeżeli  $X$  i  $Y$  są przestrzeniami topologicznymi z dodatkową strukturą (liniową, różniczkową, zespoloną, algebraiczną...), to można zapytać, czy przestrzeń wszystkich odwzorowań ciągłych  $Map(X, Y)$  i jej podprzestrzeń złożona z odwzorowań zachowujących wybraną strukturę są do siebie topologicznie podobne. W tej pracy interesować nas będzie *homotopijna równoważność* tych przestrzeni. Oto trywialny przykład: jeżeli  $U$  i  $V$  są przestrzeniami liniowo-topologicznymi nad  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$  to włożenie  $Hom(U, V) \hookrightarrow Map(U, V)$  jest homotopijną równoważnością (po prostu dlatego, że zarówno  $Hom(U, V)$  jak i  $Map(U, V)$  są ściągalne). O wiele ciekawsze jest rozważanie struktury różniczkowej: można pokazać, że jeśli  $M$  i  $N$  są różniczkowymi, to włożenie  $Map^\infty(M, N) \hookrightarrow Map(M, N)$  jest słabą homotopijną równoważnością.

Sprawy komplikują się po przejściu do różniczkowej zespolonych, których struktura jest dużo bardziej „sztywna” od struktury różniczkowej rzeczywistej. Gromov ([Gro89]) udowodnił tzw. „h-principle”, która stwierdza, że dla pewnych klas różniczkowej zespolonych  $X$  i  $Y$  włożenie  $Hol(X, Y) \hookrightarrow Map(X, Y)$  jest homotopijną równoważnością. Intuicyjnie (nie wdając się w szczegóły) można powiedzieć, że jedno z założeń twierdzenia Gromova wymaga, aby różniczkowa  $X$  miała „dużo” funkcji holomorficzych. Taki warunek spełniają np. domknięte podzbiory w  $\mathbb{C}^N$ , ale nie różniczkowe rzutowe, które nie mają funkcji holomorficzych różnych od stałych.

Dochodzimy w ten sposób do interesującego nas w tej pracy przypadku włożenia

$$Hol(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n) \hookrightarrow Map(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n)$$

### Co było?

Pierwszy krok w kierunku analizy tego przypadku miał miejsce jeszcze przed wynikami Gromova:

**Twierdzenie ([Seg79]) Włożenie**

$$Hol_d(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n) \hookrightarrow Map_d(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n)$$

jest homotopijną równoważnością do wymiaru  $(2n - 1)d$ .<sup>1</sup>

Podstawowa cecha twierdzenia Segala i pokrewnych twierdzeń polega na tym, że wymiar, do którego włożenie indukuje izomorfizm grup homotopii (ew. homologii) rośnie wraz ze stopniem  $d$ . Własność taką uzyskuje się w procesie odpowiednio dobranej stabilizacji.

---

<sup>1</sup>Litera  $d$  oznacza stopień odwzorowania. Po niezbędne formalne definicje odsyłamy do podrozdziału 2.1.

Twierdzenie Segala doczekało się licznych uogólnień na przypadek włożeń  $Hol(\mathbb{C}P^1, Y) \leftrightarrow Map(\mathbb{C}P^1, Y)$  dla różnych bardziej skomplikowanych zespolonych rozmaitości rzutowych  $Y$  (np. Grassmanianów, rozmaitości flag). We wszystkich tych wersjach przestrzenią początkową jest  $\mathbb{C}P^1$ . Segal postulował, że analogiczny wynik powinien być osiągalny także dla wyżej wymiarowych przestrzeni początkowych. Takie uogólnienie zaproponował Mostovoy:

**Uogólnienie ([Mos06]) Włożenie**

$$Hol_d(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n) \leftrightarrow Map_d(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n)$$

jest homotopijną równoważnością do wymiaru

$$(2n - 2m + 1)(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1) - 1$$

gdy  $m < n$  i homologiczną równoważnością w tych samych wymiarach, gdy  $m \leq n$ .

**Co będzie?**

Dowód uogólnienia, zaprezentowany przez Mostovoy'a, zawiera jednak szereg błędów, dostrzeżonych przez A.Kozłowskię oraz autora niniejszej pracy. W toku prac niektóre z nich udało się naprawić, jednak w stopniu nie do końca satysfakcjonującym. Na obecnym etapie wprowadzone poprawki pozwalają „odzyskać” z rozumowania Mostovoy'a dowód następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 1** Dla  $n \geq 3$  i  $d \geq 2$  każde z włożeń

$$Hol_d^*(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n) \leftrightarrow Map_d^*(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n) \text{ i } Hol_d(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n) \leftrightarrow Map_d(\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^n)$$

jest homotopijną równoważnością do wymiaru

$$D(n, d) = T(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1)(n - 2) - 1$$

gdzie  $T(x)$  oznacza najmniejszą liczbę parzystą większą lub równą  $x$ .

które jest osłabioną wersją tw. Segala (otrzymujemy zatem jego alternatywny dowód).

**Uwaga.** Przypadek  $d = 1$  został rozpatrzony w pracy [KoY03] i to dla dowolnych  $m$  i  $n$ . Analogiczny wynik zachodzi wówczas do wymiaru  $D'(m, n, 1) = 4n - 4m$ .

W rozdziale 2 zgromadzone są wszystkie niezbędne definicje, a dowód twierdzenia jest zredukowany do dowodów dwóch innych faktów, które są zamieszczone w rozdziałach 3 i 4. Rozdział 5 ma charakter porównawczy – zestawiamy w nim różnice pomiędzy dowodem twierdzenia 1 a rozumowaniem z pracy [Mos06] i wskazujemy błędy w tym rozumowaniu. Dodatek jest rozszerzeniem rozdziału 3 – zawarty w nim wynik dotyczy przypadku ogólnego (dowolna przestrzeń początkowa  $\mathbb{C}P^m$ ) i nie ma bezpośredniego zastosowania w dowodzie.

Tam, gdzie to tylko możliwe, będziemy stosować definicje, oznaczenia i dowodzić lematy mające sens w przypadku ogólnym, to znaczy dla przekształceń  $\mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^n$  przy dowolnych  $m \leq n$ . Nie utrudnia to śledzenia dowodu, a wręcz przeciwnie – umożliwia bardziej przejrzystą prezentację, pozwalającą Czytelnikowi zidentyfikować krytyczne punkty, w których ingerują poszczególne założenia. Liczby  $m$  i  $n$  nie będą pojawiać się w notacji – traktujemy je jako ustalone.



## **Podziękowania**

Praca ta mogła powstać głównie dzięki współpracy z prof. Andrzejem Kozłowskim, któremu bardzo dziękuję za wdrożenie mnie w tematykę odwzorowań wymiernych oraz za podzielenie się swoim doświadczeniem w tej dziedzinie w toku wielu inspirujących dyskusji (toczonych „na żywo” i elektronicznie). Słowa podziękowania za ukierunkowanie moich badań kieruję także do mojego promotora, prof. dr hab. Stefana Jackowskiego.



# Rozdział 2

## Definicje i zarys dowodu

W tym rozdziale zdefiniujemy podstawowe pojęcia związane z przestrzeniami odwzorowań  $\mathbb{C}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

### 2.1. Przestrzenie odwzorowań

*Stopniem (topologicznym)* odwzorowania  $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  nazywamy liczbę  $d$ , która reprezentuje przekształcenie indukowane:

$$\mathbb{Z} \simeq H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^m) \xrightarrow{f_*} H_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$$

Przez  $Map_d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  oznaczamy składową przestrzeni  $Map(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ , złożoną z przekształceń stopnia  $d$ .

Przekształcenie  $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  nazywamy *wymiernym stopnia  $d$* , jeśli można je zapisać w postaci:

$$f([z_0 : \dots : z_m]) = [f_0(z_0, \dots, z_m) : \dots : f_n(z_0, \dots, z_m)] \quad (*)$$

gdzie każde  $f_i$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $d$  o współczynnikach w  $\mathbb{C}$ . Jeśli tak jest, to wielomiany  $f_i$  nie mogą mieć wspólnego nietrywialnego zera<sup>1</sup>. Przestrzeń wszystkich przekształceń wymiernych stopnia  $d$  oznaczamy  $Rat_d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ .

Rozszerzymy teraz pojęcie wielomianu jednorodnego stopnia  $d$ . *Wielomianem typu  $(p, q)$*  (w skrócie  *$(p, q)$ -wielomianem*) nazywamy kombinację liniową jednomianów postaci

$$z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_p} \cdot \overline{z_{j_1} z_{j_2}} \cdots \overline{z_{j_q}}$$

gdzie  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \{0, \dots, m\}$ . Z kolei *A- $(p, q)$ -wielomianem* nazywamy kombinację liniową jednomianów postaci:

$$\overline{z_{j_1} z_{j_1}} \overline{z_{j_2} z_{j_2}} \cdots \overline{z_{j_q} z_{j_q}} \cdot z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_{p-q}}$$

w których każdemu wystąpieniu zmiennej „antyholomorficznej”  $\overline{z_k}$  odpowiada pewne wystąpienie zmiennej „holomorficznej”  $z_k$ .<sup>2</sup> Oczywiście każdy A- $(p, q)$ -wielomian jest  $(p, q)$ -wielomianem.

<sup>1</sup>Każdy wielomian jednorodny ma trywialne miejsce zerowe  $(0, \dots, 0)$ .

<sup>2</sup>Można powiedzieć, że  $(p, q)$ -wielomiany są funkcjami wielomianowymi zmiennych  $z_i$  i  $\overline{z_i}$  ( $i = 0, \dots, m$ ), podczas gdy A- $(p, q)$ -wielomiany są funkcjami wielomianowymi zmiennych  $z_i$  oraz  $|z_i|^2$ .

Przez analogię do przekształceń wymiernych definiujemy  $(p, q)$ -przekształcenia i  $A$ - $(p, q)$ -przekształcenia  $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  żądając, aby funkcje  $f_i$  w reprezentacji (\*) były, odpowiednio,  $(p, q)$ -wielomianami lub  $A$ - $(p, q)$ -wielomianami. Przestrzenie wszystkich  $(p, q)$ -przekształceń i  $A$ - $(p, q)$ -przekształceń oznaczamy, odpowiednio, przez  $Rat_{p,q}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  oraz  $ARat_{p,q}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ .

Definicja  $(p, q)$ -przekształceń rozszerza definicję przekształceń wymiernych stopnia  $d$ : jak widać  $Rat_{d,0} = Rat_d$ . Można sprawdzić, że każde  $(p, q)$ -przekształcenie jest stopnia topologicznego  $d = p - q$ . Zachodzą następujące inkluzje:

$$\begin{array}{ccccccccccc} Rat_d & = & Rat_{d,0} & \subset & Rat_{d+1,1} & \subset & \dots & \subset & \bigcup_{q \geq 0} Rat_{d+q,q} & \subset & Map_d \\ \parallel & & \parallel & & \cup & & \dots & & \cup & & \parallel \\ Rat_d & = & ARat_{d,0} & \subset & ARat_{d+1,1} & \subset & \dots & \subset & \bigcup_{q \geq 0} ARat_{d+q,q} & \subset & Map_d \end{array} \quad (**)$$

Wyjaśnienia wymagają jedynie inkluzje „poziome”. Każde  $(p, q)$ -przekształcenie  $f = [f_0 : \dots : f_n]$  jest jednocześnie  $(p+1, q+1)$ -przekształceniem, gdyż można go zapisać w postaci:

$$f([z_0 : \dots : z_m]) = [f_0(z_0, \dots, z_m) \cdot \sum_{i=0}^m z_i \bar{z}_i : \dots : f_n(z_0, \dots, z_m) \cdot \sum_{i=0}^m z_i \bar{z}_i]$$

Ta sama operacja (domnożenie współrzędnych przez  $\sum z_i \bar{z}_i$ ) zachowuje własność bycia  $A$ - $(p, q)$ -wielomianem, więc wyznacza inkluzję także w dolnym rzędzie diagramu.

Każde przekształcenie holomorficzne przestrzeni rzutowych jest wymierne ([GrH78, rozdział 1.3]) i odwrotnie:  $Hol_d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) = Rat_d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ , zatem badanie przestrzeni odwzorowań holomorficzych sprowadza się do badania przestrzeni odwzorowań wymiernych.

W każdej przestrzeni rzutowej wybierzmy punkt wyróżniony  $* = [1 : 0 : \dots : 0]$ . Jeżeli przez  $Spc$  oznaczmy dowolną z przestrzeni  $Map_d$ ,  $Rat_d$ ,  $Rat_{p,q}$  i  $ARat_{p,q}$ , to możemy zdefiniować przestrzeń:

$$Spc^* = \{f \in Spc : f(*) = *\}$$

złożoną z odwzorowań zachowujących punkt bazowy. Dla przestrzeni  $Spc^*$  mają miejsce zawierania analogiczne do (\*\*).

## 2.2. Reprezentacje wielomianowe

Reprezentacją wielomianową odwzorowania nazywamy krotkę wyznaczających je wielomianów.<sup>3</sup> Z uwagi na dowolność wyboru stałej multiplikatywnej reprezentacja  $(p, q)$ -odwzorowania za pomocą krotki  $(p, q)$ -wielomianów nie jest jednoznaczna:

$$\forall c \in \mathbb{C}^* [f_0 : \dots : f_n] = [cf_0 : \dots : cf_n]$$

Jednakże jeśli  $(p, q)$ -odwzorowanie  $f$  spełnia warunek  $f(*) = *$ , to istnieje reprezentacja  $f = [f_0 : \dots : f_n]$  w której współczynnik przy  $z_0^p \bar{z}_0^q$  jest równy 1 w wielomianie  $f_0$ , zaś 0 w pozostałych wielomianach  $f_i$ ,  $i \geq 1$ . Każdą taką reprezentację nazwiemy *unormowaną*. To samo dotyczy  $A$ - $(p, q)$ -odwzorowań.

Niech  $V_{p,q}$  będzie przestrzenią liniową wszystkich  $A$ - $(p, q)$ -wielomianów w których współczynnik przy  $z_0^p \bar{z}_0^q$  jest równy 0 oraz niech

$$W_{p,q} = (z_0^p \bar{z}_0^q + V_{p,q}) \oplus \underbrace{V_{p,q} \oplus \dots \oplus V_{p,q}}_n$$

<sup>3</sup>Samotnie występujące słowo „wielomian” może oznaczać, w zależności od kontekstu, wielomiany typu  $(d, 0)$ ,  $(p, q)$  lub  $A$ - $(p, q)$ . Nie powinno to prowadzić do nieporozumień.

Wymiary tych przestrzeni oznaczmy przez  $n_{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} V_{p,q} = \binom{m+q}{q} \binom{m+d}{d} - 1$  oraz  $N_{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} W_{p,q} = (n+1)n_{p,q}$ .

Definiujemy  $\overline{ARat}_{p,q}^*$  jako zbiór tych krotek  $(f_0, \dots, f_n) \in W_{p,q}$ , które nie mają wspólnych nietrywialnych zer. Mamy naturalne odwzorowanie

$$\begin{aligned} \overline{ARat}_{p,q}^* &\xrightarrow{\pi_{p,q}} ARat_{p,q}^* \\ (f_0, \dots, f_n) &\longrightarrow [f_0 : \dots : f_n] \end{aligned}$$

które na mocy wcześniejszych uwag jest epimorfizmem.

Niech teraz  $f \in Rat_{p,q}^*$ . Rozważmy największe  $k$ , dla którego  $f \in Rat_{p-k, q-k}^*$ . Reprezentacja unormowana  $f$  jako  $(p-k, q-k)$ -odwzorowania jest jednoznaczna: dwie takie reprezentacje miałyby wspólny czynnik, co oznaczałoby, że  $f$  jest  $(p-k', q-k')$ -odwzorowaniem dla pewnego  $k' > k$ , wbrew definicji  $k$ . Tę jedyną reprezentację unormowaną  $(f_0, \dots, f_n)$  nazywamy reprezentacją *minimalną*. Wszystkie  $(p, q)$ -reprezentacje  $f$  są postaci

$$(f_0 \cdot h, \dots, f_n \cdot h)$$

dla pewnego  $(k, k)$ -wielomianu  $h$  bez nietrywialnego zera.

**Przykład:**  $(3, 2)$ -odwzorowanie  $f : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$  dane wzorem

$$f([z_0 : z_1]) = [z_0^3 \overline{z_0}^2 + 3z_0^2 z_1 \overline{z_0} \overline{z_1} : z_0^2 z_1 \overline{z_0} \overline{z_1} + z_0 z_1^2 \overline{z_0} \overline{z_1} + 3z_0 z_1^2 \overline{z_1}^2 + 3z_1^3 \overline{z_1}^2]$$

jest w istocie  $(2, 1)$ -odwzorowaniem o minimalnej reprezentacji

$$f([z_0 : z_1]) = [z_0^2 \overline{z_0} : z_0 z_1 \overline{z_1} + z_1^2 \overline{z_1}]$$

a każda unormowana  $(3, 2)$ -reprezentacja  $f$  jest postaci

$$f([z_0 : z_1]) = [z_0^2 \overline{z_0} \cdot h(z_0, z_1) : (z_0 z_1 \overline{z_1} + z_1^2 \overline{z_1}) \cdot h(z_0, z_1)]$$

dla pewnego  $(1, 1)$ -wielomianu  $h(z_0, z_1) = z_0 \overline{z_0} + a z_0 \overline{z_1} + b z_1 \overline{z_0} + c z_1 \overline{z_1}$  bez nietrywialnego zera.

### 2.3. Dowód twierdzenia 1

Przedstawimy teraz dowód twierdzenia 1. Mamy diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{ARat}_{d,0}^* & \xrightarrow{\cdot \sum z_i \overline{z_i}} & \overline{ARat}_{d+1,1}^* & \xrightarrow{\cdot \sum z_i \overline{z_i}} & \dots & & \\ \downarrow \pi_{d,0} & & \downarrow \pi_{d+1,1} & & & & \\ Rat_d^* & = & ARat_{d,0}^* & \subset & ARat_{d+1,1}^* & \subset & \dots \subset \bigcup_{q \geq 0} ARat_{d+q,q}^* \subset Map_d^* \end{array}$$

którego podstawowym budulcem jest kwadrat:

$$\begin{array}{ccc} \overline{ARat}_{p,q}^* & \xrightarrow{\cdot \sum z_i \overline{z_i}} & \overline{ARat}_{p+1,q+1}^* \\ \downarrow \pi_{p,q} & & \downarrow \pi_{p+1,q+1} \\ ARat_{p,q}^* & \subset & ARat_{p+1,q+1}^* \end{array}$$

**Lemat A (Stabilizacja)** *Jeśli  $m = 1$ ,  $n \geq 3$  i  $(p, q) \neq (1, 0)$ , to przekształcenie*

$$\overline{ARat}_{p,q}^* \xrightarrow{\cdot \sum z_i \bar{z}_i} \overline{ARat}_{p+1,q+1}^*$$

*jest homologiczną równoważnością do wymiaru  $D(n, d)$  (gdzie  $d = p - q$ ).*

**Dowód** tego lematu podamy w rozdziale 4. □

**Lemat B (Ściągalność włókien)** *Dla dowolnych  $m, n, p, q$  włókna przekształcenia  $\pi_{p,q}$  są ściągalne.*

**Dowód** tego lematu podamy w rozdziale 3. □

Z lematu B pragniemy wyciągnąć następujący:

**Wniosek** *Przekształcenie  $\pi_{p,q}$  jest homotopijną równoważnością.*

Niestety, nie jest prawdą, że każda surjekcja o ściąganych włóknach jest homotopijną równoważnością. Tym niemniej argument taki pojawiał się już w podobnych kontekstach ([Mos01]) i wydaje się, że w tym konkretnym przypadku jest to prawda, ze względu na dodatkowe własności przekształcenia  $\pi_{p,q}$  i przestrzeni  $ARat_{p,q}^*$ . Przyjmijmy zatem prawdziwość tego wniosku (który, ściśle rzecz biorąc, jest jeszcze hipotezą).

Wobec tego, przy założeniach lematu A każde z włożeń  $ARat_{p,q}^* \hookrightarrow ARat_{p+1,q+1}^*$  jest homologiczną równoważnością do wymiaru  $D(n, d)$  ( $d = p - q$ ), a zatem także włożenie  $Rat_d^* \hookrightarrow \bigcup_{q \geq 0} ARat_{d+q,q}^*$  ma tę własność (korzystamy z przemienności homologii z granicami prostymi). Do tego mamy:

**Twierdzenie (Część stabilna)** *Dla  $m = 1$  włożenie  $\bigcup_{q \geq 0} ARat_{d+q,q}^* \hookrightarrow Map_d^*$  jest słabą homotopijną równoważnością.*

**Dowód.** Twierdzenie to, w wersji dla  $m = 1$  i włożenia  $\bigcup_{q \geq 0} Rat_{d+q,q}^* \hookrightarrow Map_d^*$  jest treścią Proposition 3 w [Mos06]. Tym niemniej, wszystkie pojawiające się tam odwzorowania są w istocie A-odwzorowaniami, zatem dowód przenosi się bez zmian na obecny przypadek. □

Z dotychczasowych przesłanek wnosimy, że dla  $m = 1$ ,  $n \geq 3$  i  $d \geq 2$  włożenie  $Rat_d^* \hookrightarrow Map_d^*$  jest homologiczną równoważnością do wymiaru  $D(n, d)$ . Co więcej, mamy następujący:

**Fakt.** *Dla  $m = 1$  i  $n \geq 2$  przestrzenie  $Rat_d^*$  i  $Map_d^*$  są jednopójne.*

**Dowód.** Mamy  $\pi_1(Map_d^*) = \pi_1(\Omega^2 \mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \pi_3(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0$  dla  $n \geq 2$ . Z kolei przestrzeń  $Rat_d^*$  jest homeomorficzna z przestrzenią  $\overline{ARat}_{d,0}^*$ , której dopełnieniem w  $W_{d,0}$  jest zbiór krotek wielomianów mających wspólne nietrywialne zero:

$$\Sigma_d = \{(f_0, \dots, f_n) \in W_{d,0} : \exists z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^m f_i(z) = 0\}$$

Rozważmy „rozmaitość incydencji”  $Z_d \subset \Sigma_d \times \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ :

$$Z_d = \{(f_0, \dots, f_n, z) : f_j(z) = 0 \text{ dla każdego } j = 0, \dots, n\}$$

Jest to zespolony zbiór algebraiczny wymiaru  $N_{p,q} + m - (n + 1)$ . Jego obrazem przy rzutowaniu  $Z_d \rightarrow W_{d,0}$  (które jest przekształceniem algebraicznym) jest  $\Sigma_d$ . Wymiar tego zbioru wynosi zatem co najwyżej  $N_{p,q} + m - (n + 1)$ , a zatem jego kowymiar zespolony w  $W_{d,0}$  to co najmniej  $n - m + 1 = n \geq 2$ . Dopełnienie takiego zbioru w przestrzeni afinicznej jest jednospójne.  $\square$

Na mocy twierdzenia Whiteheada wnioskujemy więc, że w interesującym nas przypadku izomorfizm grup homologii pociąga izomorfizm grup homotopii, co kończy dowód twierdzenia 1 dla odwzorowań zachowujących punkt wyróżniony.

Warunek zachowywania punktu bazowego ma charakter techniczny i łatwo się od niego uwolnić, stosując automorfizm  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , który przeprowadza  $*$  na dowolny inny wybrany punkt  $*'$ . Dowód twierdzenia 1 dla odwzorowań swobodnych otrzymujemy teraz, stosując lemat o pięciu do porównania długich ciągów dokładnych grup homotopii rozwłóknień:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Map}_d^* & \longrightarrow & \text{Map}_d & \xrightarrow{ev} & \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ \text{Rat}_d^* & \longrightarrow & \text{Rat}_d & \xrightarrow{ev} & \mathbb{C}\mathbb{P}^n \end{array}$$

Dolny ciąg jest rozwłóknieniem, a nawet wiązką lokalnie trywialną. Dowód tego faktu można znaleźć w [AKY07].

Powołując się, w części stabilnej, na wynik z pracy [Mos06], zredukowaliśmy dowód Twierdzenia 1 do dowodu lematów A i B. Każdemu z nich poświęcony jest jeden z następnych rozdziałów.





## Rozdział 3

# Ściągalność włókna

Ten rozdział poświęcony jest dowodowi lematu B z rozdziału 2.3:

**Lemat B (Ściągalność włókien)** *Dla dowolnych  $m, n, p, q$  włókna przekształcenia*

$$\overline{ARat_{p,q}^*} \xrightarrow{\pi_{p,q}} ARat_{p,q}^* \\ (f_0, \dots, f_n) \longrightarrow [f_0 : \dots : f_n]$$

są ściągane.

Rozpocznijmy od lematów kombinatorycznych:

**Lemat 3.1** *Jeśli  $P$  jest  $(p, q)$ -wielomianem, zaś  $Q$  jest  $(p', q')$ -wielomianem i iloczyn  $P \cdot Q$  jest  $A$ -wielomianem, to zachodzi jeden z warunków:*

- 1)  $P$  i  $Q$  są  $A$ -wielomianami
- 2) jeden z wielomianów jest podzielny przez każdą zmienną  $z_i$ , która psuje warunek  $A$  w drugim wielomianie

(Mówimy, że zmienna  $z_i$  psuje warunek  $A$  w wielomianie, jeśli w którymś z jego składników  $\bar{z}_i$  występuje w potęgze wyższej niż  $z_i$ .)

**Dowód.** Wybierzmy dowolny indeks  $i \in \{0, \dots, m\}$ . Każdy  $(p, q)$ -jednomian ma postać

$$z_i^\alpha \bar{z}_i^\beta \cdot \prod_{j \neq i} z_j^{\alpha_j} \bar{z}_j^{\beta_j}$$

Wartość  $\gamma = \alpha - \beta$  nazwiemy  $z_i$ -przewyższeniem jednomianu. Niech  $\gamma_P$  i  $\gamma_Q$  będą najmniejszymi  $z_i$ -przewyższeniami jednomianów w wielomianach  $P$  i  $Q$ , odpowiednio, oraz niech  $P'$  i  $Q'$  będą sumami tych jednomianów w  $P$  i  $Q$ , których  $z_i$ -przewyższenia wynoszą dokładnie  $\gamma_P$  i  $\gamma_Q$ . Iloczyn  $P' \cdot Q'$  składa się wyłącznie z jednomianów o  $z_i$ -przewyższeniu  $\gamma_P + \gamma_Q$  i na mocy założenia o minimalności wszystkie pozostałe składniki wielomianu  $P \cdot Q$  mają większe  $z_i$ -przewyższenia. Skoro  $P \cdot Q$  jest  $A$ -wielomianem, to  $\gamma_P + \gamma_Q \geq 0$ , a stąd już wynika teza.  $\square$

**Lemat 3.2** *Jeśli  $f_0, \dots, f_n$  są  $(p, q)$ -wielomianami bez nietrywialnego wspólnego zera, a  $h$  jest  $(p', q')$ -wielomianem bez nietrywialnego zera, oraz  $f_0 \cdot h, \dots, f_n \cdot h$  są  $A$ -wielomianami, to także  $f_0, \dots, f_n$  i  $h$  są  $A$ -wielomianami.*

**Dowód.** Stosujemy lemat 3.1: gdyby któryś z  $f_j$  nie był A-wielomianem, to  $h$  byłby podzielny przez pewną zmienną  $z_i$ , a zatem miałby nietrywialne zero. Z kolei gdyby  $h$  nie był A-wielomianem, to wszystkie  $f_j$  byłyby podzielne przez tę zmienną  $z_i$ , która psuje warunek A w wielomianie  $h$ , a zatem miałyby nietrywialne wspólne zero. W obu przypadkach uzyskujemy sprzeczność, co kończy dowód.  $\square$

Przestrzeń  $ARat_{p,q}^*$  ma wstępującą filtrację:

$$\emptyset \subset ARat_{p-q,0}^* \subset ARat_{p-q+1,1}^* \subset \dots \subset ARat_{p-1,q-1}^* \subset ARat_{p,q}^*$$

Zbadamy typ homeomorficzny włókna  $\pi_{p,q}^{-1}(f)$  dla  $f \in ARat_{p-d,q-d}^* \setminus ARat_{p-d-1,q-d-1}^*$ . W tym celu zdefiniujemy następującą przestrzeń:

**Definicja 3.3** Przez  $F_m^d$  oznaczamy przestrzeń wszystkich wielomianów jednorodnych stopnia  $d$  zmiennych  $x_0, \dots, x_m$  o współczynnikach w  $\mathbb{C}$ , w których współczynnik przy  $x_0^d$  jest równy 1 i które nie mają zer w zbiorze  $(\mathbb{R}_{\geq 0})^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{C}^{m+1}$ .

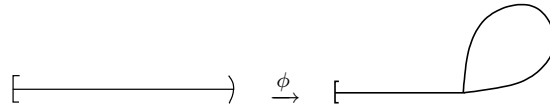
**Lemat 3.4** Jeśli  $f \in ARat_{p-d,q-d}^* \setminus ARat_{p-d-1,q-d-1}^*$  to  $\pi_{p,q}^{-1}(f)$  jest homeomorficzne z  $F_m^d$ .

**Dowód.** Wybierzmy reprezentację unormowaną  $f = [f_0 : \dots : f_n]$ , której składowe są A-( $p, q$ )-wielomianami. Pokażemy, że jest to reprezentacja minimalna  $f$ . Istotnie, jeśli  $f = [\overline{f_0} : \dots : \overline{f_n}]$  jest reprezentacją minimalną, to  $(\overline{f_0}, \dots, \overline{f_n}) \cdot h = (f_0, \dots, f_n)$  dla pewnego wielomianu  $h$ . Na mocy lematu 3.2 zarówno  $\overline{f_i}$  jak i  $h$  są A-wielomianami, a zatem  $\deg(h) = 0$  (bo inaczej  $f \in ARat_{p-d',q-d'}^*$  dla pewnego  $d' > d$ ) oraz (ze względu na unormowanie)  $\overline{f_i} = f_i$  dla  $i = 0, \dots, n$ .

Wszystkie A-( $p, q$ )-reprezentacje  $f$  (czyli elementy  $\pi_{p,q}^{-1}(f)$ ) są postaci  $(f_0, \dots, f_n) \cdot h$  dla takich ( $d, d$ )-wielomianów  $h$ , dla których wynikowa krotka składa się z A-( $p, q$ )-wielomianów. Z lematu 3.2 wynika, że w takim razie  $h$  musi być A-wielomianem, a unormowanie wymusza, aby współczynnik przy  $z_0^{d-d}$  w  $h$  wynosił 1. Pokazaliśmy zatem, że  $\pi_{p,q}^{-1}(f)$  jest homeomorficzne z przestrzenią A-( $d, d$ )-wielomianów unormowanych nie mających nietrywialnych zer.

Podstawienie  $x_i = z_i \overline{z_i} = |z_i|^2$  wyznacza homeomorfizm tej przestrzeni z przestrzenią  $F_m^d$ .  $\square$

**Uwaga.** Udowodniliśmy w istocie nieco więcej, a mianowicie, że nad każdą z różnic  $ARat_{p-d,q-d}^* \setminus ARat_{p-d-1,q-d-1}^*$  przekształcenie  $\pi_{p,q}$  jest wiązką trywialną z włóknem  $F_m^d$ . Wróćmy do Wniosku ze strony 12. Można zapytać, czy to wzmocnienie (istnienie filtracji bazy podzbiorami domkniętymi, takiego że nad różnicami kolejnych członów przekształcenie jest wiązką trywialną ze ściągającym włóknem) implikuje, że  $\pi_{p,q}$  jest homotopijną równoważnością. Niestety, to jeszcze nie wystarcza. Oto przykład: niech  $I = [0, 1]$  zaś  $I' = [0, 1)$ . Mamy przekształcenie  $I' \rightarrow I \vee S^1$  polegające na „zawinięciu wolnego końca”:



Stosowna filtracja w obrazie to  $\emptyset \subset I \subset I \vee S^1$ . Nad każdą z różnic kolejnych członów filtracji przekształcenie  $\phi$  jest homeomorfizmem.

Do zakończenia dowodu lematu B w przypadku  $m = 1$  wystarczy wykazać:

**Stwierdzenie 3.5** Przestrzeń  $F_1^d$  jest ściągalna.

**Dowód.** Wielomian postaci

$$x_0^d + a_1 x_0^{d-1} x_1 + \dots + a_d x_1^d = (x_0 - \alpha_1 x_1) \cdot \dots \cdot (x_0 - \alpha_d x_1)$$

można utożsamiać ze zbiorem z powtórzeniami  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ . Taki wielomian ma miejsce zerowe  $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{(0, 0)\}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  dla pewnego  $i$ . Wobec tego:

$$F_1^d \cong SP^d(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}) \cong SP^d(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^d \sim *$$

gdzie  $SP^d(X) = X^d / \Sigma_d$  oznacza  $d$ -krotny produkt symetryczny przestrzeni  $X$ , tzn. przestrzeń wszystkich  $d$ -elementowych podzbiorów z powtórzeniami przestrzeni  $X$ . Przestrzenie  $\mathbb{C}$  i  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  są homeomorficzne, zaś homeomorfizm  $\mathbb{C}^d \xrightarrow{\cong} SP^d(\mathbb{C})$  jest wyznaczony przez przekształcenie, które wielomianowi unormowanemu stopnia  $d$  przypisuje multizbiór jego pierwiastków. Patrz także [Hat02, rozdział 4.K].  $\square$

Ściągalność przestrzeni  $F_m^d$  dla  $m \geq 2$  nie jest potrzebna do dowodu twierdzenia 1, ale wynik ten jest na tyle ciekawy, że przedstawimy go w Dodatku.



# Rozdział 4

## Stabilizacja

W tym rozdziale dowodzimy lemat A z rozdziału 2.3:

**Lemat A (Stabilizacja)** *Jeśli  $m = 1$ ,  $n \geq 3$  i  $(p, q) \neq (1, 0)$  to przekształcenie*

$$\overline{ARat_{p,q}^*} \xrightarrow{\cdot \sum z_i \bar{z}_i} \overline{ARat_{p+1,q+1}^*}$$

*jest homologiczną równoważnością do wymiaru  $D(n, d)$  (gdzie  $d = p - q$ ).*

Dowód tego lematu przebiega według pomysłu z rozdziału 4 pracy [Mos06].

### 4.1. Informacje o rezolwencie symplecjoidalnej

Informacje o *rezolwentach symplecjoidalnych*<sup>1</sup> można znaleźć w rozdziale 3 pracy [Mos06] oraz w książce [Vas94]. Poniżej podamy skrót informacji dotyczących najważniejszego dla nas przypadku rezolwenty symplecjoidalnej rzutu.

Niech  $Z \subset A \times \mathbb{R}^N$  i niech  $\pi : Z \rightarrow A$  będzie obcięciem do  $Z$  kanonicznego rzutowania. Przypuśćmy, że  $\pi$  jest surjekcją. Rezolwentą symplecjoidalną  $Z$  względem  $\pi$  nazywamy przestrzeń

$$Z^\Delta = \{(a, x) \in A \times \mathbb{R}^N : x \in \text{conv}(\pi^{-1}(a))\}$$

powstałą przez uwypuklenie każdego włókna  $\pi^{-1}(a)$  w  $\mathbb{R}^N$ . Przestrzeń  $Z^\Delta$  ma wstępującą filtrację

$$\emptyset \subset Z_1 \subset \dots \subset Z^\Delta$$

której  $r$ -ty szkielet

$$Z_r = \{(a, x) \in A \times \mathbb{R}^N : x \in \text{conv}(x_1, \dots, x_r) \text{ dla pewnych } x_1, \dots, x_r \in \pi^{-1}(a)\}$$

powstaje przez rozpięcie w każdym włóknie wszystkich  $r$ -wierzchołkowych sympleksów o wierzchołkach w  $Z$ . (W szczególności  $Z_1 = Z$ ).

Jeśli każdego  $r$  różnych punktów w każdym włóknie  $\pi^{-1}(a)$  jest afinicznie niezależnych (tzn. rozpinają niezdegenerowany sympleks) to rezolwentę nazywamy *niezdegenerowaną*. Jeśli włókna przekształcenia  $\pi$  nie są skończone, to rezolwenta musi być zdegenerowana. W takim przypadku można skonstruować abstrakcyjną rezolwentę niezdegenerowaną  $\widetilde{Z}^\Delta$  wraz z homotopijną równoważnością  $\widetilde{Z}^\Delta \rightarrow Z^\Delta$ , która jest homeomorfizmem w tych poziomach filtracji,

---

<sup>1</sup>ang. simplicial resolutions

w których rezolwenta  $Z^\Delta$  jest niezdegenerowana. Ponadto dowolne przekształcenie dwóch przestrzeni indukuje w kanoniczny sposób przekształcenie ich niezdegenerowanych rezolwent.

Przekształcenie  $\pi : Z \rightarrow A$  ma naturalne rozszerzenie  $\pi : Z^\Delta \rightarrow A$ , którego włókna są wypukłe, a więc ściągające. W sytuacji rozważanej w tym rozdziale  $Z$  i  $A$  będą zbiorami semialgebraicznymi, a przekształcenie  $\pi$  będzie epimorfizmem – wówczas ze ściągłości włókien wynika, że rozszerzone przekształcenie  $\pi : Z^\Delta \rightarrow A$  jest homotopijną równoważnością.

## 4.2. Krótka dygresja algebr liniowa

**Lemat 4.1** *Jeśli  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{C}^N$  są liniowo niezależne nad  $\mathbb{R}$ , to można z nich wybrać co najmniej  $\lceil \frac{r}{2} \rceil$  wektorów liniowo niezależnych nad  $\mathbb{C}$ . Oszacowanie to jest optymalne.*

**Dowód.** Przypuśćmy, że wybraliśmy już  $k \leq \lceil \frac{r}{2} \rceil - 1$  liniowo niezależnych wektorów  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ . Rozpinają one przestrzeń liniową wymiaru zespolonego  $k$ , w której leżeć może co najwyżej  $2k < r$  wektorów  $v_i$  (ze względu na ich niezależność nad  $\mathbb{R}$ ). Wobec tego istnieje wektor  $v_{i_{k+1}}$  liniowo niezależny od dotychczasowych i rozumowanie można indukcyjnie kontynuować.  $\square$

## 4.3. Rezolwenta sympleksyjna Vassiliewa

Od tego momentu rozpatrujemy wyłącznie przypadek  $m = 1$ , czyli ograniczamy się do  $A-(p, q)$ -wielomianów dwóch zmiennych  $z_0$  i  $z_1$ .

Niech  $\Sigma_{p,q} = W_{p,q} \setminus \overline{ARat_{p,q}^*}$  oznacza zbiór tych  $(n+1)$ -krotek  $(f_0, \dots, f_n)$  wielomianów z  $W_{p,q}$ , które mają wspólne miejsce zerowe  $(z_0, z_1) \neq (0, 0)$ . W takim miejscu zerowym  $z_1 \neq 0$ , ponieważ  $f_0(z_0, 0) = z_0^p \bar{z}_0^q \neq 0$ . Można zatem założyć, że to wspólne miejsce zerowe ma współrzędne  $(z_0, 1)$ .

Rozważmy „rozmaitość incydencji”  $Z_{p,q} \subset \Sigma_{p,q} \times \mathbb{C}$ :

$$Z_{p,q} = \{(f_0, \dots, f_n, z) : f_j(z, 1) = 0 \text{ dla każdego } j = 0, \dots, n\}$$

wraz z rzutowaniem  $Z_{p,q} \rightarrow \Sigma_{p,q}$ .

Niech  $\nu_{p,q} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n_{p,q}}$  będzie dane wzorem:

$$\nu_{p,q}(z) = (1, z, \dots, z^d, \bar{z}z, \bar{z}z^2, \dots, \bar{z}z^{d+1}, \dots, \bar{z}^q z^q, \bar{z}^q z^{q+1}, \dots, \bar{z}^q z^{p-1})$$

Wyjaśnijmy, jak powstaje to odwzorowanie: rozważamy wszystkie  $A-(p, q)$ -jednomiany stanowiące bazę przestrzeni  $V_{p,q}$  i ewaluujemy je w punkcie  $(z, 1)$ .

Przekształcenie  $\nu_{p,q}$  ma własność:

**Lemat 4.2** *Jeśli  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$  są parami różne<sup>2</sup>, to:*

- a) dla  $r \leq d$  wektory  $\nu_{d,0}(z_1), \dots, \nu_{d,0}(z_r) \in \mathbb{C}^d$  są liniowo niezależne
- a) dla  $r \leq d+1$ ,  $p-q = d$  i  $(p, q) \neq (d, 0)$  wektory  $\nu_{p,q}(z_1), \dots, \nu_{p,q}(z_r) \in \mathbb{C}^{n_{p,q}}$  są liniowo niezależne

**Dowód.** Początkowymi współrzędnymi wektora  $\nu_{p,q}(z)$  są odpowiednio:

<sup>2</sup>Uwaga na kolizję oznaczeń: dotychczas symbole  $z_i$  oznaczały współrzędne jednego punktu w  $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ , a teraz oznaczają różne punkty w  $\mathbb{C}$ .

a)  $1, z, \dots, z^{d-1}$  dla  $(p, q) = (d, 0)$

b)  $1, z, \dots, z^d$  dla  $(p, q) \neq (d, 0)$

Dla  $r$  parami różnych liczb  $z_1, \dots, z_r$  wyznacznik Vandermonde'a:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{r-1} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_r & \dots & z_r^{r-1} \end{bmatrix} = \prod_{i < j} (z_i - z_j)$$

jest niezerowy. Biorąc odpowiednio  $r = d$  (punkt a)) i  $r = d + 1$  (punkt b)) otrzymujemy, że w macierzy złożonej ze współrzędnych wektorów  $\nu_{p,q}(z_i)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) istnieje minor  $r \times r$  o niezerowym wyznaczniku, co kończy dowód.  $\square$

W szczególności, jeśli  $(p, q) \neq (1, 0)$ , to przekształcenie  $\nu_{p,q}$  jest różnowartościowe (czego nie można powiedzieć o  $\nu_{1,0}$ , którego cały obraz jest jednym punktem  $1 \in \mathbb{C}^1$ ).

Przy pomocy zanurzenia

$$id \times \nu_{p,q} : Z_{p,q} \hookrightarrow W_{p,q} \times \mathbb{C}^{n,p,q}$$

traktujemy  $Z_{p,q}$  jako podprzestrzeń w  $\Sigma_{p,q} \times \mathbb{C}^{n,p,q}$ , wyposażoną w rzutowanie  $Z_{p,q} \rightarrow \Sigma_{p,q}$ . Rozważmy rezolwentę symplecticzną  $Z_{p,q}$  względem tego rzutowania. Można ją opisać jawnym wzorem:

$$\Sigma_{p,q} \times \mathbb{C}^{n,p,q} \supset Z^\Delta = \{ (f_0, \dots, f_n, y) : y \in \text{conv}\{\nu_{p,q}(z) : f_j(z, 1) = 0 \text{ dla } j = 0, \dots, n\} \}$$

tnz. nad każdą krotką wielomianów mamy otoczkę wypukłą obrazu wspólnych miejsc zerowych tych wielomianów przy  $\nu_{p,q}$ . Jednocześnie  $r$ -ty szkielet filtracji tej rezolwenty jest dany przez:

$$Z_r = \{ (f_0, \dots, f_n, y) : y \in \text{conv}(\nu_{p,q}(z_1), \dots, \nu_{p,q}(z_r)) \\ \text{dla pewnych } z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C} \text{ takich, że } f_j(z_i, 1) = 0 \}$$

Podamy teraz kilka dalszych własności włożenia  $\nu_{p,q}$  i rezolwenty  $Z^\Delta$ .

**Lemat 4.3** *Zachodzi nierówność:*

$$\dim_{\mathbb{R}}(Z_r \setminus Z_{r-1}) \leq 3r - 1 + 2(N_{p,q} - \lceil \frac{r}{2} \rceil)(n + 1)$$

**Dowód.** Ponieważ  $Z_r \setminus Z_{r-1} \subset \text{int}(Z_r)$ , zatem punkt w  $Z_r \setminus Z_{r-1}$  jest wyznaczony przez wybór:

- $r$  liczb  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ , których obrazy przy  $\nu_{p,q}$  są w położeniu ogólnym
- punktu  $y$ , leżącego we wnętrzu otoczki wypukłej tych obrazów
- układu  $(n + 1)$  wielomianów z  $W_{p,q}$ , znikających jednocześnie we wszystkich punktach  $(z_i, 1)$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

Wektory  $\nu_{p,q}$  są liniowo niezależne nad  $\mathbb{R}$  (bo są w położeniu ogólnym, a ich ostatnią współrzędną jest 1), więc można z nich wybrać  $\lceil \frac{r}{2} \rceil$  wektorów liniowo nienależnych nad  $\mathbb{C}$  (lemat 4.1). Współrzędne tych wektorów są dokładnie jednomianami występującymi w równaniach postaci

$$f_j(z_i, 1) = 0$$

a zatem dla każdego  $j$  układ równań na współczynniki wielomianu  $f_j$  znikającego w punktach  $(z_i, 1)$ ,  $i = 1, \dots, r$  zawiera co najmniej  $\lceil \frac{r}{2} \rceil$  równań liniowo niezależnych. Zespolony kowymiar przestrzeni wielomianów o której mowa w punkcie 3) wynosi więc co najmniej

$$\lceil \frac{r}{2} \rceil (n+1)$$

Reasumując,  $\dim_{\mathbb{R}}(Z_r \setminus Z_{r-1}) \leq 2r + (r-1) + 2(N_{p,q} - \lceil \frac{r}{2} \rceil (n+1))$ .  $\square$

**Lemat 4.4** *Jeśli  $r \leq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ , to przestrzeń  $Z_r \setminus Z_{r-1}$  jest homeomorficzna z rzeczywistą wiązką wektorową nad przestrzenią konfiguracyjną  $C_r(\mathbb{C})$  z włóknem wymiaru*

$$2(N_{p,q} - r(n+1)) + (r-1)$$

Co więcej, jeśli  $(p, q) = (d, 0)$ , to ta sama teza zachodzi dla  $r \leq d$ .

**Dowód.** Niech najpierw  $(p, q) \neq (d, 0)$ . Z lematu 4.2 wiemy, że każde  $d+1$  wektorów w obrazie  $\nu_{p,q}$  jest liniowo niezależnych nad  $\mathbb{C}$ , a więc tym bardziej ich końce rozpinają niezdegenerowany sympleks. Wobec tego dla  $r \leq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  każde dwa  $r$ -wierzchołkowe sympleksy rozpięte na punktach w obrazie  $\nu_{p,q}$  mają rozłączne wnętrza. Mamy zatem odwzorowanie

$$Z_r \setminus Z_{r-1} \longrightarrow C_r(\mathbb{C})$$

które krotce  $(f_0, \dots, f_n, y) \in Z_r \setminus Z_{r-1}$  przypisuje wierzchołki (jedyne) sympleksu, do którego wnętrza należy  $y$ . Wierzchołki te są postaci  $\nu_{p,q}(z_1), \dots, \nu_{p,q}(z_r)$ , gdzie  $f_j(z_i) = 0$  dla wszystkich  $i, j$ . Każdy układ

$$f_j(z_i, 1) = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

jest układem liniowo niezależnych równań na współczynniki wielomianu  $f_i$  (co wynika z liniowej niezależności wektorów  $\nu_{p,q}(z_i)$ , porównaj dowód lematu 4.3). Wobec tego włókno rzutowania  $Z_r \setminus Z_{r-1} \longrightarrow C_r(\mathbb{C})$  jest nad każdym punktem produktem przestrzeni wielomianów, kowymiaru zespolonego  $r(n+1)$  w  $W_{p,q}$  z wnętrzem niezdegenerowanego sympleksu o  $r$  wierzchołkach. Stąd teza.

Przypadek  $(p, q) = (d, 0)$  jest prostszy. Układ wielomianów stopnia  $d$  ma co najwyżej  $d$  wspólnych pierwiastków postaci  $(z, 1)$ , a ich obrazy przy  $\nu_{p,q}$  rozpinają niezdegenerowany sympleks. Odwzorowanie  $Z_r \setminus Z_{r-1} \longrightarrow C_r(\mathbb{C})$  można zatem zdefiniować dla wszystkich  $r \leq d$ . Dalsza część rozumowania przebiega analogicznie.  $\square$

## 4.4. Ciąg spektralny

Skonstruujemy teraz ciąg spektralny zbieżny do  $H_*(\overline{ARat}_{p,q}^*)$  i porównamy go z analogicznym ciągiem dla  $H_*(\overline{ARat}_{p+1,q+1}^*)$ , co zakończy dowód lematu A. Przypominamy, że pozostajemy przy założeniach  $m = 1$ ,  $n \geq 3$  i  $(p, q) \neq (1, 0)$ . Przez  $\widehat{X}$  będziemy oznaczać jednopunktowe uzwarcie przestrzeni  $X$ .

Przekształcenie

$$W_{p,q} \xrightarrow{\cdot \sum z_i \bar{z}_i} W_{p+1,q+1}$$

zachowuje rozbiecie  $W_{p,q} = \Sigma_{p,q} \cup \overline{ARat}_{p,q}^*$ . Zbiór  $\Sigma_{p,q}$  jest domknięty w  $W_{p,q}$ , więc z dualności Aleksandera mamy izomorfizm

$$H_r(\overline{ARat}_{p,q}^*) = H^{2N_{p,q}-r-1}(\widehat{\Sigma_{p,q}})$$



Przekształcenie  $Z^\Delta \rightarrow \Sigma_{p,q}$  jest równoważnością na mocy uwagi kończącej podrozdział 4.1 (jest to przekształcenie semialgebraiczne o ściąganych włóknach). Jest ono ponadto przekształceniem właściwym (zbiór zer każdej krotki wielomianów z  $W_{p,q}$  jest zwarty w  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{*\}$ ), a zatem przedłuża się przekształcenia jednopunktowych uzwarceń  $\widehat{Z}^\Delta \rightarrow \widehat{\Sigma}_{p,q}$ , które także jest homotopijną równoważnością (z tego samego powodu). Stąd:

$$H^{2N_{p,q}-r-1}(\widehat{\Sigma}_{p,q}) = H^{2N_{p,q}-r-1}(\widehat{Z}^\Delta)$$

Wstępująca filtracja  $\widehat{Z}_r$  ( $r \geq 0$ , gdzie  $\widehat{Z}_0$  jest dodanym punktem uzwarzającym) przestrzeni  $\widehat{Z}^\Delta$  indukuje kohomologiczny ciąg spektralny  $E_1^{r,s} = H^{r+s}(\widehat{Z}_r, \widehat{Z}_{r-1})$ . Włożenie  $\widehat{Z}_{r-1} \hookrightarrow \widehat{Z}_r$  jest korozwłóknieniem (jest to włożenie domkniętego podzbioru semialgebraicznego), więc mamy:

$$E_1^{r,s} = H^{r+s}(\widehat{Z}_r, \widehat{Z}_{r-1}) = H^{r+s}(\widehat{Z}_r / \widehat{Z}_{r-1}) = H^{r+s}(Z_r \setminus Z_{r-1})$$

Ciąg ten jest zbieżny do  $H^{r+s}(\widehat{Z}^\Delta) = H_{2N_{p,q}-(r+s)-1}(\overline{ARat_{p,q}^*})$ .

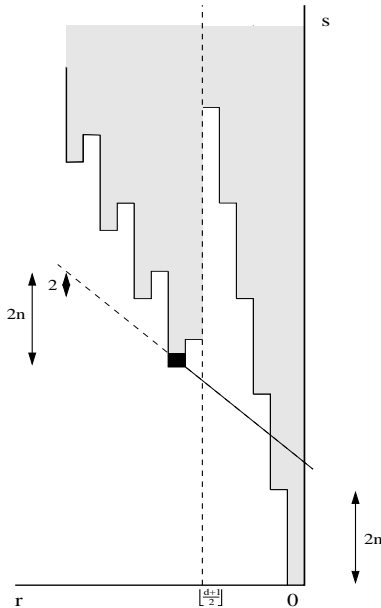
Z poprzedniego rozdziału wnioskujemy, że:

- $E_1^{r,s} = 0$  dla  $r+s > 3r-1+2(N_{p,q}-\lceil \frac{r}{2} \rceil(n+1))$ , czyli gdy  $s \geq 2N_{p,q}-2(\lceil \frac{r}{2} \rceil(n+1)-r)$  (lemat 4.3)
- $E_1^{r,s} = H^{s+1+2r(n+1)-2N_{p,q}}(C_r(\mathbb{C}))$  dla  $r \leq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  (na mocy lematu 4.4 i izomorfizmu Thoma).

Stosując podstawienie  $(r,s) := (-r, 2N_{p,q}-s-1)$  otrzymujemy ciąg spektralny  $E_t^{r,s} \Rightarrow H_{r+s}(\overline{ARat_{p,q}^*})$ , z różniczką typu  $(-t, t-1)$ , mający następujące własności:

- $E_t^{r,s} = 0$  dla  $r > 0$
- $E_1^{-r,s} = H^{2N_{p,q}+r-s-1}(Z_r \setminus Z_{r-1})$  dla  $r \geq 0$
- $E_1^{-r,s} = 0$  dla  $s < 2(\lceil \frac{r}{2} \rceil(n+1)-r)$ ,  $r \geq 0$
- $E_1^{-r,s} = H^{2r(n+1)-s}(C_r(\mathbb{C}))$  dla  $0 \leq r \leq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$

**Uwaga.** W istocie w pasie  $0 \leq r \leq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  jest o wiele więcej miejsc zerowych. Mamy bowiem  $E_1^{-r,s} = H^{2r(n+1)-s}(C_r(\mathbb{C})) = 0$  dla  $2r(n+1)-s > 2r$ , czyli gdy  $s < 2rn$ .



Tablica  $E_1^{r,s}$ .

Niezacienione elementy są zerowe.

Czarny kwadrat ma współrzędne

$(-T(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1), T(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1)(n-1))$ .

Na mocy wcześniejszych uwag zachowanie ciągu dla  $r + s < T(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1)(n - 2)$  (tzn. pod linią przerywaną) nie zależy od  $p$  i  $q$ . Pozostaje uzasadnić, że rozważane przekształcenie indukuje w tym zakresie izomorfizm ciągów spektralnych  $E_{p,q}^{r,s}$  i  $E_{p+1,q+1}^{r,s}$ . Argument ten wymaga przejścia do rezolwenty niezdegenerowanej, przebiega jak w [Mos06] (szczegóły można znaleźć w [AKY07]) i przedstawimy go w skrócie.

Przekształcenie  $i : W_{p,q} \xrightarrow{\cdot \sum z_i \bar{z}_i} W_{p+1,q+1}$  zachowuje rozbiecie  $W_{p,q} = \Sigma_{p,q} \cup \overline{ARat_{p,q}^*}$ . Niech  $N = N_{p+1,q+1} - N_{p,q}$ . Przekształcenie  $i$  indukuje otwarte zanurzenie:

$$\Sigma_{p,q} \times \mathbb{C}^N \xrightarrow{i'} \Sigma_{p+1,q+1}$$

W takiej sytuacji mamy przekształcenie indukowane w kohomologiach o zwartych nośnikach:

$$H^l(\widehat{\Sigma_{p,q} \times \mathbb{C}^N}) \xrightarrow{i'^*} H^l(\widehat{\Sigma_{p+1,q+1}})$$

Jednocześnie  $H^l(\widehat{\Sigma_{p,q} \times \mathbb{C}^N}) = H^l(\widehat{\Sigma_{p,q}} \wedge S^{2N}) = H^{l-2N}(\widehat{\Sigma_{p,q}})$ . Z naturalności dualności Alexandera mamy diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccc} H_k(\overline{ARat_{p,q}^*}) & \xrightarrow{i_*} & H_k(\overline{ARat_{p+1,q+1}^*}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^{2N_{p,q}-k-1}(\widehat{\Sigma_{p,q}}) & \xrightarrow{i'^*} & H^{2N_{p+1,q+1}-k-1}(\widehat{\Sigma_{p+1,q+1}}) \end{array}$$

Do zakończenia dowodu wystarczy zatem zbadać przekształcenie indukowane  $i'^*$ . Przekształcenie  $i'$  przedłuża się do przekształcenia zachowującego filtrację niezdegenerowanych rezolwent symplecjalnych  $\widetilde{Z}_{p,q}^\Delta \longrightarrow \widetilde{Z}_{p+1,q+1}^\Delta$ . Mamy więc diagram:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z}_{p,q}^\Delta & \xrightarrow{\cdot \sum z_i \bar{z}_i} & \widetilde{Z}_{p+1,q+1}^\Delta \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_{p,q}^\Delta & & Z_{p+1,q+1}^\Delta \end{array}$$

Indukowany przez górne przekształcenie morfizm ciągów spektralnych  $\widetilde{E}_{p,q}^{r,s} \longrightarrow \widetilde{E}_{p+1,q+1}^{r,s}$  jest izomorfizmem dla  $-r \leq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  (na mocy jawnego opisu elementów w tym pasie – lemat 4.4). Także projekcja  $\widetilde{Z}^\Delta \longrightarrow Z^\Delta$  jest homeomorfizmem do  $\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ -go szkieletu filtracji (co wynika z lematu 4.2), a dla  $r + s < T(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1)(n - 2)$ ,  $-r > \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$  indukuje zerowe przekształcenie elementów ciągów spektralnych. W zakresie  $r + s < T(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1)(n - 2)$  możemy zatem skonstruować z powyższego diagramu przekształcenie ciągów spektralnych  $E_{p,q}^{r,s} \longrightarrow E_{p+1,q+1}^{r,s}$  będące izomorfizmem.

# Rozdział 5

## Uwagi

W tym rozdziale omawiamy pomyłki w pracy [Mos06], sposoby ich naprawienia oraz różnice pomiędzy rozumowaniem przedstawionym w [Mos06] a dowodem Twierdzenia 1.

### 5.1. $ARat$ vs. $Rat$

W oryginalnym rozumowaniu autor pracy [Mos06] wykorzystuje przestrzenie  $(p, q)$ -odwzorowań  $Rat_{p,q}$ . Rodzi to problem przy dowodzie lematu B (dostrzeżony przez A. Kozłowskiego), bo włóknami przekształcenia  $\pi_{p,q}$  są przestrzenie  $(d, d)$ -wielomianów bez nietrywialnych zer, o których nie udało się dotychczas udowodnić, że są ściągające. Włókna te nie są też wypukłe, co postuluje autor [Mos06], ponieważ mówimy o wielomianach o wartościach zespolonych, a nie rzeczywistych. Przestrzeń  $A$ - $(p, q)$ -wielomianów ma o wiele mniejszy wymiar i jej wprowadzenie pozwoliło uprościć zagadnienie i wykazać ściągłość włókna odwzorowania  $\pi_{p,q}$ . (Te wyniki można z pewnością uznać za jedyne „optymistyczne” osiągnięcia niniejszej pracy)

### 5.2. $\mathbb{C}$ vs. $\mathbb{R}$

Dowodząc analogon lematu 4.3, autor pracy [Mos06] skorzystał z faktu, że jeśli punkty  $\nu_{p,q}(z_1), \dots, \nu_{p,q}(z_r)$  są wierzchołkami niezdegenerowanego sympleksu, to warunki  $f(z_i) = 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ) stanowią układ  $r$  niezależnych równań na współczynniki  $(p, q)$ -wielomianu  $f$ . Dzięki temu otrzymał mocniejszą nierówność (którą podajemy w przypadku dowolnego  $m$ ):

$$\dim_{\mathbb{R}}(Z_r \setminus Z_{r-1}) \leq 2(N_{p,q} - r(n+1)) + 2mr + r - 1$$

Tymczasem z własności rozpinania sympleksu wynika jedynie liniowa niezależność wektorów  $\nu_{p,q}(z_i)$  nad  $\mathbb{R}$  (bo wszystkie mają ostatnią współrzędną 1), a to nie gwarantuje niezależności nad  $\mathbb{C}$  równań na współczynniki wielomianu. Poprawny dowód lematu wymaga przejścia z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{C}$ , co dwukrotnie pogarsza „jakość” oszacowania w lemacie. (Dalsza analiza wykazuje, że osłabia to siłę całego argumentu do przypadku  $m < \frac{n}{2}$ .)

Co więcej, odwzorowanie  $\nu_{p,q}$  w pracy [Mos06] nie jest zdefiniowane poprawnie: nie powinny w nim występować współrzędne odpowiadające jednomianom stopnia dokładnie  $(p, q)$ , które należą do ustalonej części wielomianów. Rodzi to później dalsze drobne nieścisłości, a co więcej dowód (niesłusznie) zaczyna obejmować przypadek  $d = 1$ .

### 5.3. $Map^*$ vs. $Map^g$

Rozumowanie w pracy [Mos06] nie dotyczy włożenia  $Rat_d^* \hookrightarrow Map_d^*$ , ale włożenia  $Rat_d^g \hookrightarrow Map_d^g$ , gdzie

$$Spc^g = \{f \in Spc : f|_{\mathbb{CP}^{m-1}} = g\}$$

gdzie  $\mathbb{CP}^{m-1}$  jest podprzestrzenią opisaną równaniem  $z_m = 0$ , a  $g : \mathbb{CP}^{m-1} \rightarrow \mathbb{CP}^m$  jest dowolnym ustalonym odwzorowaniem. W miejsce odwzorowań „punktowanych” występują zatem odwzorowania „o ustalonym obcięciu”.

Rozważanie odwzorowań punktowanych jest koncepcyjnie prostsze, ale nie pozwala przeprowadzić dowodu w przypadku ogólnym ( $\mathbb{CP}^m \rightarrow \mathbb{CP}^n$ ), bo zbiorem możliwych wspólnych zer krotki wielomianów z  $\Sigma_{p,q}$  jest przestrzeń  $\mathbb{CP}^m \setminus \{*\}$ , która nie dopuszcza algebraicznego włożenia w przestrzeń afiniczną, analogicznego do  $\nu_{p,q}$ . Tymczasem w przypadku odwzorowań o ustalonym obcięciu potencjalne zera należą do  $\mathbb{CP}^m \setminus \mathbb{CP}^{m-1} \cong \mathbb{C}^m$ . Zwracamy uwagę, że dla  $m = 1$  przestrzenie  $Spc^g$  i  $Spc^*$  pokrywają się dla  $g : \mathbb{CP}^0 \rightarrow \mathbb{CP}^n$  danego wzorem  $g(*) = *$ .

Wprowadzone przez nas A- $(p, q)$ -odwzorowania pozwoliłyby „obsłużyć” częściowy dowód w przypadku ogólnym, gdyby nie to, że przestrzeń reprezentacji wielomianowych  $\overline{Rat_{p,q}^g}$  (dla  $g \in Rat_d$ ) została w pracy [Mos06] błędnie zdefiniowana. Mianowicie, autor stwierdza, że każdy element  $f \in Rat_{p,q}^g$  ma  $(p, q)$ -reprezentację  $[f_0 : \dots : f_n]$  o tej własności, że każdy z wielomianów

$$f_i(z_0, \dots, z_{m-1}, 0)$$

jest równy pewnemu ustalonemu z góry wielomianowi  $\bar{g}_i$  takiemu, że  $[\bar{g}_0 : \dots : \bar{g}_i]$  stanowi  $(p, q)$ -reprezentację obięcia  $f|_{\mathbb{CP}^{m-1}} = g$ . Nie jest to prawdą dla  $m \geq 2$  i  $(p, q) \neq (d, 0)$ . Rozważmy na przykład odwzorowanie

$$g = [z_0^2 + z_1^2 : z_0^2 + 2z_1^2 : z_0^2 + 3z_1^2] : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^2$$

oraz ustalmy jego  $(3, 1)$ -reprezentację:

$$g = [g_0 : g_1 : g_2] = [(z_0^2 + z_1^2)(z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1) : (z_0^2 + 2z_1^2)(z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1) : (z_0^2 + 3z_1^2)(z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1)]$$

Weźmy teraz odwzorowanie  $f \in Rat_{3,1}^g$  dane wzorem:

$$f = [(z_0^2 + z_1^2)(z_0\bar{z}_0 + 5z_1\bar{z}_1) + z_2^3\bar{z}_2 : (z_0^2 + 2z_1^2)(z_0\bar{z}_0 + 5z_1\bar{z}_1) + z_2^3\bar{z}_2 : (z_0^2 + 3z_1^2)(z_0\bar{z}_0 + 5z_1\bar{z}_1) + z_2^3\bar{z}_2]$$

Odwzorowanie to nie ma reprezentacji, której składowe, po podstawieniu  $z_2 = 0$  redukowałyby się do ustalonych wcześniej wielomianów  $\bar{g}_i$ .

W takim razie odwzorowanie  $\overline{Rat_{p,q}^g} \rightarrow Rat_{p,q}^g$  nie jest „na”, co uniemożliwia udowodnienie lematu B.

Sytuację można próbować naprawić, definiując jako  $\overline{Rat_{p,q}^g}$  przestrzeń tych  $(n+1)$ -krotek  $(p, q)$ -wielomianów, które na  $i$ -tej współrzędnej mają wielomian postaci

$$f_i(z_0, \dots, z_m) = g_i(z_0, \dots, z_{m-1}) \cdot h(z_0, \dots, z_{m-1}) + k_i(z_0, \dots, z_m)$$

gdzie  $h$  jest (wspólnym dla całej krotki)  $(q, q)$ -wielomianem, zaś  $k_i$  są wielomianami, których każdy jednomian zależy od  $z_m$  lub  $\bar{z}_m$ . Niestety, nie jest wówczas prawdą, że wszystkie nietrywialne wspólne zera krotki  $(f_0, \dots, f_n)$  leżą poza wyróżnionym  $\mathbb{CP}^{m-1}$  – może się bowiem zdarzyć, że nietrywialne zero ma wielomian  $h$ . I temu można zaradzić, dopuszczając jedynie wielomiany  $h$ , które nie mają nietrywialnych zer. Po przejściu do A-odwzorowań wiedzielibyśmy, że ich przestrzeń jest ściągalna (dowód w Dodatku), ale nie jest to przestrzeń afiniczna, a jedynie jej otwarty podzbiór, co stawia pod znakiem zapytania możliwość wykorzystania dualności Alexandera. Tak czy owak, problem ten nadal pozostaje otwarty.

## 5.4. Po co $(p, q)$ ?

Zauważmy, że problemy zasygnalizowane w podrozdziałach 5.1 i 5.3 nie występują w przypadku  $(p, q) = (d, 0)$  dla żadnego  $m$ : reprezentacje wielomianowe są jednoznaczne (także dla odwzorowań z  $Rat_{d,0}^g$ ) a przekształcenie  $\pi_{d,0}$  jest homeomorfizmem. Ciąg spektralny  $E^{r,s}$ , analogiczny do ciągu z podrozdziału 4.4, istnieje zatem i w tych przypadkach. Pozwala to myśleć o przeprowadzeniu dowodu uogólnienia Mostovoy'a poprzez porównanie tego ciągu spektralnego z ciągiem spektralnym zbieżnym do  $H_*(Map_d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, \mathbb{C}\mathbb{P}^n))$  opisanym w [Vas94], z całkowitym pominięciem  $(p, q)$ -odwzorowań. Ten punkt widzenia może zostać rozwinięty w przyszłości.

## 5.5. Kilka słów o przypadku rzeczywistym

W przypadku rzeczywistym (tzn. dla odwzorowań  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ) wiele opisanych tu problemów znika. Mamy naturalne włożenia:

$$Rat_d \xrightarrow{\cdot \sum x_i^2} Rat_{d+2}$$

Kwestia ściągłości włókien nie budzi wątpliwości, bo są one przestrzeniami wielomianów rzeczywistych o wartościach dodatnich, a więc są wypukłe. Także i tu problemem jest natomiast kwestia wielomianowych reprezentacji odwzorowań z  $Rat_d^g$  (patrz podrozdział 5.3). W przypadku rzeczywistym można za to analizować opisanymi tu metodami bezpośrednio przestrzeń  $Rat_d^*$ , ponieważ  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  jest rozmaitością afiniczną i (przynajmniej dla parzystych  $d$ ) można zdefiniować włożenie  $\mathbb{R}\mathbb{P}^m$  w  $\mathbb{R}^N$ , którego współrzędne wyrażają się odpowiednio unormowanymi jednomianami stopnia  $d$ . Zagadnieniom tym poświęcona będzie praca [AKY07].



# Dodatek – ściągalność włókna w przypadku ogólnym

W tym rozdziale przedstawimy dowód ściągalności przestrzeni  $F_m^d$  z rozdziału 3 w przypadku ogólnym, tzn. dla dowolnego  $m \geq 1$ . Nie jest to potrzebne do wykazania Twierdzenia 1, do którego wystarczy rozpatrzyć bardzo prosty przypadek  $m = 1$ . Tym niemniej, fakt ten stanowi najważniejszy „krok naprzód”, który miał pierwotnie pomóc w dowodzie pełnej wersji ogólnego twierdzenia Mostovoya, a poza tym jest sam w sobie ciekawym rezultatem.

Przypomnimy definicję przestrzeni  $F_m^d$  z rozdziału 3, definiując jednocześnie większą przestrzeń  $\widetilde{F}_m^d$ :

**Definicja 5.1** Przez  $F_m^d$  i  $\widetilde{F}_m^d$  oznaczamy przestrzenie wszystkich wielomianów jednorodnych stopnia  $d$  zmiennych  $x_0, \dots, x_m$  o współczynnikach w  $\mathbb{C}$ , w których współczynnik przy  $x_0^d$  jest równy 1 i które mają własność:

- $F_m^d$  : wielomian nie ma zer w zbiorze  $(\mathbb{R}_{\geq 0})^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$
- $\widetilde{F}_m^d$  : wielomian nie ma zer w zbiorze  $(\mathbb{R}_+)^{m+1}$

Elementy przestrzeni  $F_m^d$  będziemy oznaczać przez  $f$ , a elementy przestrzeni  $\widetilde{F}_m^d$  przez  $\tilde{f}$ .

**Uwaga.** Przestrzeń  $F_m^d$  pojawia się w naturalny sposób, ponieważ jest homeomorficzna z przestrzenią A- $(d, d)$ -wielomianów  $(m + 1)$  zmiennych bez nietrywialnego zera (patrz lemat 3.4).

**Twierdzenie 5.2** Przestrzeń  $F_m^d$  jest ściągalna.

Prawdziwość tego twierdzenia będzie natychmiastową konsekwencją kolejnych dwóch lematów.

**Lemat 5.3** Przestrzeń  $\widetilde{F}_m^d$  jest ściągalna.

**Dowód.** Ściągnięcie  $H : \widetilde{F}_m^d \times [0, 1] \mapsto \widetilde{F}_m^d$  jest dane wzorem:

$$H(\tilde{f}, t)(x_0, \dots, x_m) = \tilde{f}(x_0, tx_1, \dots, tx_m)$$

Definicja ta jest poprawna: każdy z wielomianów  $H(\tilde{f}, t)$  ma przy  $x_0^d$  współczynnik 1, a ponadto nie ma zer w zbiorze  $(\mathbb{R}_+)^{m+1}$ . Co więcej  $H(\cdot, 1) = id_{\widetilde{F}_m^d}$ , zaś  $H(\tilde{f}, 0)$  jest dla każdego  $\tilde{f}$  równe ustalonemu wielomianowi  $x_0^d \in \widetilde{F}_m^d$  do którego ściągnęliśmy całą przestrzeń.  $\square$

**Lemat 5.4** *Włożenie*

$$i : F_m^d \hookrightarrow \widetilde{F}_m^d$$

jest homotopijną równoważnością.

**Dowód.** Zdefiniujemy następującą jednoparametrową rodzinę odwzorowań  $j_t : \widetilde{F}_m^d \longrightarrow \widetilde{F}_m^d$  ( $t \in [0, 1]$ ):

$$j_t(\widetilde{f})(x_0, \dots, x_m) = \widetilde{f}\left(x_0 + t \sum_{i=1}^m x_i, \dots, x_m + t \sum_{i=1}^m x_i\right)$$

Odwzorowania  $j_t$  są dobrze określone: współczynnik przy  $x_0^d$  w wielomianie  $j_t(\widetilde{f})$  ma wartość 1, a ponadto:

$$j_0 = id_{\widetilde{F}_m^d} \text{ zaś dla } t > 0 \text{ mamy } j_t(\widetilde{F}_m^d) \subset F_m^d \quad (*)$$

Pierwsza z tych własności jest oczywista, zaś w celu wykazania drugiej przypuśćmy nie wprost, że

$$j_t(\widetilde{f})(x_0, \dots, x_m) = 0 \text{ dla pewnych } (x_0, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{m+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$$

Wynika stąd, że dla pewnego  $i \geq 1$  mamy  $x_i > 0$  (w przeciwnym razie punkt  $(1, 0, \dots, 0)$  byłby miejscem zerowym  $j_t(\widetilde{f})$ , co nie jest możliwe, gdyż  $j_t(\widetilde{f})(1, 0, \dots, 0) = \widetilde{f}(1, 0, \dots, 0) = 1$ ). Stąd wniosek, że

$$x_k + t \sum_{i=1}^m x_i > 0 \text{ dla dowolnego } 0 \leq k \leq m, t > 0$$

a jednocześnie

$$\widetilde{f}\left(x_0 + t \sum_{i=1}^n x_i, \dots, x_m + t \sum_{i=1}^n x_i\right) = j_t(\widetilde{f})(x_0, \dots, x_m) = 0$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z faktem, że  $\widetilde{f} \in \widetilde{F}_m^d$ , co dowodzi prawdziwości warunku (\*).

Z własności (\*) wynika, że rodzina odwzorowań  $j_t \circ i : F_m^d \longrightarrow F_m^d$  definiuje homotopię pomiędzy odwzorowaniami  $j_1 \circ i : F_m^d \longrightarrow F_m^d$  oraz  $j_0 \circ i = id_{F_m^d}$ .

Ta sama własność implikuje, że rodzina odwzorowań  $j_t$  definiuje homotopię między  $i \circ j_1 = j_1 : \widetilde{F}_m^d \longrightarrow \widetilde{F}_m^d$  oraz  $j_0 = id_{\widetilde{F}_m^d}$ .

Przekształcenia  $i : F_m^d \hookrightarrow \widetilde{F}_m^d$  oraz  $j_1 : \widetilde{F}_m^d \longrightarrow F_m^d$  są zatem homotopijnymi odwrotnościami, co kończy dowód lematu.  $\square$



# Bibliografia

- [AKY07] M.Adamaszek, A.Kozłowski, K.Yamaguchi, Spaces of algebraic and continuous maps between algebraic varieties, *w przygotowaniu*
- [GrH78] P. Griffiths, J. Harris, Principles of algebraic geometry, *John Wiley & Sons, 1978*
- [Gro89] M. Gromov, Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles, *J. Am. Math. Soc. 2 (1989) 851-897*
- [Hat02] A. Hatcher, Algebraic Topology, *Cambridge University Press 2002*
- [KoY03] A.Kozłowski, K.Yamaguchi, Spaces of holomorphic maps between complex projective spaces of degree one, *Topology Appl. 132 (2003) 139-145*
- [Mos01] J.Mostovoy, Spaces of rational loops on a real projective space, *Tr. Am. Math. Soc 353 (2001) 1959-1970*
- [Mos06] J.Mostovoy, Spaces of rational maps and the Stone-Weierstrass theorem, *Topology 45 (2006) 281-193*
- [Seg79] G.Segal, The topology of spaces of rational functions, *Acta Math. 143 (1979) 39-72*
- [Vas94] V.A.Vassiliev, Complements of discriminants of smooth maps; topology and applications, revised edition, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, vol. 98, Providence, RI, 1994