

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Katarzyna Macioszek

Nr albumu: 214556

Twierdzenie Botta i rozkłady przestrzeni pętli

**Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA
w zakresie MATEMATYKI OGÓLNEJ**

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Andrzeja Webera
Instytut Matematyki

Maj 2008

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Spis treści

Wprowadzenie	3
1. Podstawowe pojęcia	7
1.1. Grassmanniany i diagramy Younga	8
1.2. ΩSU i przestrzeń klasyfikująca U	10
2. Przestrzeń pętli	11
2.1. Grupy homologii przestrzeni $\Omega SU(n)$	11
2.2. Pętle algebraiczne na $U(n)$ i $SU(n)$	12
3. Izomorfizm grup $H_d(\Omega SU(n))$ i $H_d(\Omega_{alg} SU(n))$	19
3.1. Izomorfizm grup homologii pętli algebraicznych i gładkich w gradacjach mniejszych niż $2n$	19
3.2. Izomorfizm grup homologii pętli algebraicznych i gładkich we wszystkich gradacjach	23
4. Homotopijna równoważność $\Omega SU(n)$ i $\Omega_{alg} SU(n)$	27
4.1. Rozmaitość generująca	27
4.2. Homotopijna równoważność $\Omega SU(n)$ i $\Omega_{alg} SU(n)$	29

Streszczenie

Przedmiotem badań w niniejszej pracy są przede wszystkim przestrzenie pętli na grupie $SU(n)$, a w szczególności ich pierścienie homologii. Rozważamy przestrzeń pętli gładkich $\Omega SU(n)$, przestrzeń pętli algebraicznych $\Omega_{alg}SU(n)$ oraz ich związki z przestrzenią klasyfikującą grupy U . Wiadomo, że grupy homologii $\Omega SU(n)$ są wolne o skończonej liczbie generatorów. W pracy pokażemy, że przestrzeń pętli algebraicznych rozkłada się na komórki wymiarów zespolonych. Zatem również $H_k(\Omega_{alg}SU(n))$ są grupami wolnymi. Głównym wynikiem pracy jest pokazanie bijekcji między generatorami grup $H_k(\Omega SU(n))$ i $H_k(\Omega_{alg}SU(n))$ we wszystkich wymiarach. Wynik ten wykorzystamy w dowodzie twierdzenia, że włożenie $\Omega_{alg}SU(n) \hookrightarrow \Omega SU(n)$ jest homotopijną równoważnością.

Słowa kluczowe

grupa Lie, grupa pętli, twierdzenie Botta, diagram Younga

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

22E67 - Loop groups and related constructions, group-theoretic treatment

Tytuł pracy w języku angielskim:

Bott theorem and decomposition of loop spaces

Wprowadzenie

Niech G będzie grupą Liego. Przestrzeń pętli gładkich na G , czyli odwzorowań gładkich z okręgu (który utożsamiamy z liczbami zespolonymi o module 1) w grupę G , oznaczamy przez ΛG . Przestrzeń ΛG jest grupą — mnożenie dwóch pętli f i g definiujemy przez mnożenie punktowe: $fg(z) = f(z)g(z)$, a odwrotnością pętli f jest pętla $f^{-1}(z) = f(z)^{-1}$. Jak udowodnił John Milnor w pracy [Milnor59], ΛG jest również homotopijnie równoważna z CW-kompleksem, jest bowiem przestrzenią odwzorowań dwóch CW-kompleksów. W ΛG wyróżniamy podgrupę pętli związanych $\Omega G = \{f \in \Lambda G \mid f(1) = 1\}$.

Przestrzeń pętli na grupach Liego są najprostszymi przykładami nieskończenie wymiarowych grup Liego. Rozważa się je m. in. w kwantowej teorii pola i przy badaniu równań różniczkowych Kortewega-de Vries (więcej na ten temat można znaleźć w rosyjskim wydaniu [PressSeg], Dodatek).

Dla grupy topologicznej G z mnożeniem μ na homologiach mamy określoną strukturę pierścienia z mnożeniem Pontriagina:

$$H_*(G) \otimes H_*(G) \xrightarrow{\times} H_*(G \times G) \xrightarrow{\mu_*} H_*(G) .$$

Szczególnie interesujące będą dla nas grupy unitarne: $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^*A = I_n\}$ oraz $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$. Grupę $U(n)$ można zanurzyć w grupie $U(n+1)$ w następujący sposób

$$U(n) \ni A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(n+1).$$

Mamy więc ciąg grup $U(1) \subset U(2) \subset U(3) \subset \dots \subset \bigcup_n U(n)$. Definiujemy grupę U jako granicę prostą tego ciągu ($U = \bigcup_n U(n)$). Analogicznie SU jest granicą prostą ciągu $SU(1) \subset SU(2) \subset SU(3) \subset \dots \subset \bigcup_n SU(n) = SU$.

Przestrzenią klasyfikującą U jest granica rozmaitości Grassmanna $BU = \lim_{n \rightarrow \infty} G(n, 2n)$ (gdzie $G(n, 2n)$ oznacza przestrzeń n -wymiarowych podprzestrzeni \mathbb{C}^{2n}).

Centralne twierdzenie teorii przestrzeni klasyfikujących to twierdzenie Botta o periodyczności ([Bott57]). Bywa ono formułowane na różne sposoby. Dla nas najważniejsza jest jego wersja mówiąca, że przestrzeń klasyfikująca grupy U jest w istocie przestrzenią pętli.

Twierdzenie 0.1 (Bott). $BU \simeq \Omega SU$.

Homologie BU i ΩSU są pierścieniami wielomianów od nieskończenie wielu zmiennych:

$$H_*(BU) = H_*(\Omega SU) = \mathbb{Z}[\nu_1, \nu_2, \dots],$$

przy czym dla każdego i wymiar generatora ν_i wynosi $2i$. Pierścień $H_*(\Omega SU(n))$ jest podpierścieniem $H_*(\Omega SU)$ od $n-1$ zmiennych: $H_*(\Omega SU(n)) = \mathbb{Z}[\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}]$. Przy tym przekształcenie $H_*(\Omega SU(n)) \rightarrow H_*(\Omega SU)$ indukowane przez włożenie $\Omega SU(n) \hookrightarrow \Omega SU$ przeprowadza generator $\nu_i \in H_*(\Omega SU(n))$ na generator $\nu_i \in H_*(\Omega SU)$. Zatem włożenie $\Omega SU(n) \hookrightarrow \Omega SU$ indukuje izomorfizm grup homologii do wymiaru $2n-1$.

Jeśli G jest podgrupą macierzy $M_{n \times n}(\mathbb{C})$, to w ΛG i ΩG można wyróżnić podprzestrzenie składające się z pętli algebraicznych:

$$\Lambda_{alg}G = \{f \in \Lambda G \mid \exists m \ f(z) = \sum_{i=-m}^m A_i z^i, \ A_i \in M_{n \times n}(\mathbb{C})\}$$

$$\Omega_{alg}G = \{f \in \Lambda_{alg}G \mid f(1) = 1\}$$

Jeśli G jest podgrupą grupy unitarnej $U(n)$, to odwrotnością pętli $f(z) = \sum_{i=-m}^m A_i z^i$ jest pętla $f(z) = \sum_{i=-m}^m A_i^* z^{-i}$, więc jest to też pętla algebraiczna. Czyli dla $G \leq U(n)$ przestrzenie $\Lambda_{alg}G$ i $\Omega_{alg}G$ są grupami. Zauważmy, że grupy te mogą być istotnie „mniejsze” od ΛG i ΩG . Przykładowo pętla $\Omega U(1) = \Omega S^1$ to nieskończenie wymiarowa przestrzeń, natomiast przestrzeń $\Omega_{alg}U(1) = \Omega_{alg}S^1$ składa się jedynie z odwzorowań $f(z) = z^k$ dla k całkowitych, a więc jest to przestrzeń dyskretna. Podobnie przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{alg}U(n) & \xrightarrow{i} & \Omega U(n) \\ & \searrow \Omega_{det} & \swarrow \Omega_{det} \\ & \Omega S^1 & \end{array}$$

pokazuje, że zbiór $\Omega_{alg}U(n)$ nie jest gęsty w $\Omega U(n)$. Dla grup półprostych zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 0.2 ([PressSeg], Stwierdzenie 3.5.3). *Jeśli $G < U(n)$ jest półprosta, to $\Lambda_{alg}G$ jest gęsty w ΛG .*

Dostajemy więc, że $\Lambda_{alg}SU(n)$ jest gęsty w $\Lambda SU(n)$ oraz $\Omega_{alg}SU(n)$ jest gęsty w $\Omega SU(n)$. Pressley i Segal dowodzą również twierdzenia

Twierdzenie 0.3 ([PressSeg], Stwierdzenie 8.6.6). *Jeśli G jest półprostą zwartą grupą z trywialnym centrum, to włożenie $\Omega_{alg}G \hookrightarrow \Omega G$ jest homotopijną równoważnością.*

Centrum $SU(n)$ to grupa \mathbb{Z}_n , zatem mamy skończone nakrycie grup $SU(n) \rightarrow SU(n)/\mathbb{Z}_n$. Pętla ściągalna w przestrzeni bazowej podnosi się do pętli ściągalnych w nakryciu. Jednocześnie $\Omega SU(n)$ jest spójne (tzn. wszystkie pętla na $SU(n)$ są ściągalne), więc $\Omega SU(n)$ jest izomorficzna ze składową jedyнки przestrzeni pętli $SU(n)/\mathbb{Z}_n$. Dostajemy, że włożenie $\Omega_{alg}SU(n) \hookrightarrow \Omega SU(n)$ jest homotopijną równoważnością.

Głównym wynikiem niniejszej pracy jest inny dowód tego twierdzenia. Pokażemy mianowicie izomorfizm pierścieni homologii $H_*(\Omega_{alg}SU(n))$ i $H_*(\Omega SU(n))$ indukowany przez włożenie $\Omega_{alg}SU(n) \hookrightarrow \Omega SU(n)$. Wtedy twierdzenie 0.3 będzie wnioskiem z twierdzenia Whitehead’a. Główny problem polega na pokazaniu równości rang grup $H_d(\Omega_{alg}SU(n))$ i $H_d(\Omega SU(n))$ dla wszystkich d .

W rozdziale 1 wprowadzamy kluczowe pojęcia pojawiające się w pracy, ustalamy notację i podajemy niektóre ważniejsze fakty.

W rozdziale 2 badamy dokładniej strukturę grup pętli $\Omega SU(n)$ i $\Omega_{alg}SU(n)$. Okazuje się, że pętla algebraiczna również mają strukturę CW-kompleksu, co udowodnił Pressley w pracy [Press80]. Opisujemy podany przez niego dowód uzupełniając go o ważne szczegóły.

Niech H oznacza przestrzeń Hilberta $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$, a $\Omega_{alg}^m U(n)$ będzie podzbiorem $\Omega_{alg}U(n)$ złożonym z pętli f postaci $f(z) = \sum_{i=-m}^m A_i z^i$. Mamy następujący ciąg podprzestrzeni

$$\cdots \subseteq H_2 \subseteq H_1 \subseteq H_0 \subseteq H_{-1} \subseteq H_{-2} \subseteq \cdots \subseteq H$$

gdzie

$$H_p = \text{span}\{z^i e_j \mid 1 \leq j \leq n, i \geq p\}$$

Oznaczmy przez $G_m(H)$ zbiór podprzestrzeni $V \subset H$ takich, że $H_m \subseteq V \subseteq H_{-m}$ dla pewnego $m \geq 0$. Zauważmy, że $G_m(H)$ można traktować jako zwykły grassmannian $G(\mathbb{C}^{2mn})$ (czyli podprzestrzenie \mathbb{C}^{2mn}), bo jeśli $H_m \subseteq V \subseteq H_{-m}$, to $V/H_m \subseteq H_{-m}/H_m \cong \mathbb{C}^{2mn}$. Okazuje się, że $\Omega_{alg}^m U(n)$ wkłada się w $G_m(H)$. Korzystając z tego włożenia udowodnimy, że $\Omega_{alg} U(n)$ rozkłada się na \mathbb{Z} spójnych składowych, przy czym pętla f należy do p -tej spójnej składowej wtedy i tylko wtedy, gdy $\det f: S^1 \rightarrow S^1$ ma stopień p . Dodatkowo p -ta spójna składowa rozkłada się na komórki $Q_{\underline{k}}$ indeksowane ciągami $\underline{k} \in \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ takimi, że $\sum_i k_i = p$. W szczególności dostajemy, że

$$\Omega_{alg} SU(n) = \bigcup_{\sum_i k_i=0} Q_{\underline{k}}$$

Ponadto pętla $\Omega_{alg}^m SU(n)$ wkładają się w grassmannian $G(mn, 2mn)$ (czyli podprzestrzenie wymiaru mn w \mathbb{C}^{2mn}). W granicy dostajemy włożenie $\Omega_{alg} SU(n)$ w $\lim_{m \rightarrow \infty} G(mn, 2mn) = BU$.

Ponieważ wszystkie komórki są parzystych rzeczywistych wymiarów, więc dostajemy, że grupa homologii $H_d(\Omega_{alg} SU(n))$ jest dla nieparzystych d zerowa, a dla parzystych d jest grupą wolną o liczbie generatorów równej liczbie komórek wymiaru rzeczywistego d .

Rozdział 3 zawiera główny wynik pracy. Opisujemy bijekcję między generatorami grup homologii $H_d(\Omega_{alg} SU(n))$ i $H_d(\Omega SU(n))$ dla każdej gradacji $d \in \mathbb{N}$. Wykorzystujemy przy tym fakt, że generatory $H_d(\Omega SU(n))$ możemy przedstawiać jako diagramy Younga, natomiast generatory $H_d(\Omega_{alg} SU(n))$ możemy przedstawiać jako ciągi n liczb całkowitych lub diagramy Younga.

W pierwszej części przedstawiamy dowód dla $d < 2n$. Dowodzimy, że komórki $Q_{\underline{k}} \subset \Omega_{alg} SU(n)$ wymiaru zespolonego mniejszego od n są zawarte w $\Omega_{alg}^1 SU(n)$ oraz że są indeksowane ciągami złożonymi wyłącznie z liczb $\{-1, 0, 1\}$, w których dodatkowo wszystkie jedynki są na prawo od wszystkich minus jedynek. Następnie pokazujemy bijekcję między takimi ciągami, a diagramami Younga o $d/2$ kropkach (które reprezentują generatory grup homologii pętli gładkich). Wykorzystujemy do tego m. in. specyficzny podział diagramów Younga na kwadrat i dwa mniejsze diagramy. Wymiary $d < 2n$ są szczególnie ważne, bo dostajemy w nich izomorfizm $H_d(\Omega_{alg} SU(n))$ z grupami $H_d(\Omega_{alg}^1 SU(n))$, $H_d(G(n, 2n))$ i $H_d(BU)$.

W części drugiej podajemy dowód dla wszystkich gradacji. Polega on na pokazaniu, że każdej komórce $Q_{\underline{k}} \subset \Omega_{alg} SU(n)$ można przyporządkować jednoznacznie diagram Younga reprezentujący jakiś generator $H_d(\Omega SU(n))$.

Dla $d < 2n$ obie opisane bijekcje pokrywają się. Oba dowody nie pokazują żadnego przekształcenia, od którego pochodziłyby bijekcje i są w istocie kombinatoryczne, a nie topologiczne. Nie jest to dziwne, bo metody kombinatoryczne są często w topologii algebraicznej i teorii grup Liego wykorzystywane. Szczególną rolę w obu dowodach odgrywają diagramy Younga.

W rozdziale 4 uzupełniamy rozumowanie prowadzące do twierdzenia 0.3. W szczególności pokazujemy przekształcenie z przestrzeni rzutowej $\mathbb{C}P^{n-1}$ w przestrzeń pętli $\Omega SU(n)$ takie, że obraz indukowanego przekształcenia $H_*(\mathbb{C}P^{n-1}) \rightarrow H_*(\Omega SU(n))$ generuje cały pierścień $H_*(\Omega SU(n))$. Okazuje się, że rozważane przekształcenie prowadzi w pętli algebraiczne. Otrzymujemy więc, że włożenie $\Omega_{alg} SU(n) \hookrightarrow \Omega SU(n)$ indukuje epimorfizm na homologiach. Bijekcje pokazane w rozdziale 3 dowodzą, że jest to w istocie izomorfizm. Ponieważ obie przestrzenie $\Omega_{alg} SU(n)$ i $\Omega SU(n)$ są jednopójne, więc ostatecznie dostajemy, że $\Omega_{alg} SU(n)$ jest homotopijnie równoważne z $\Omega SU(n)$.

Rozdział 1

Podstawowe pojęcia

Grupa topologiczna to przestrzeń topologiczna, na której dodatkowo określono strukturę grupy tak, że zarówno mnożenie

$$G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G,$$

jak i branie elementu odwrotnego

$$G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$$

jest ciągle (równoważnie wystarczy sprawdzić, że przekształcenie $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh^{-1} \in G$ jest ciągle). Grupa Liego to grupa topologiczna, która jednocześnie jest gładką rozmaitością i mnożenie i branie elementu odwrotnego są przekształceniami gładkimi.

Najważniejszymi przykładami grup Liego są grupy macierzy. Przez $M_{n \times m}(R)$ będziemy oznaczać macierze n na m o wyrazach z pierścienia R . Przez I_n oznaczamy macierz jednostkową $n \times n$. Grupa $GL(n, R) \subseteq M_{n \times n}(R)$ to grupa macierzy odwracalnych. Dla $R = \mathbb{C}$ odwracalność jest równoważne z nieznikaniem wyznacznika:

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}.$$

Wyróżniamy również w $GL(n, \mathbb{C})$ podgrupę macierzy o wyznaczniku 1:

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}.$$

W macierzach zespolonych $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mamy też grupę macierzy unitarnych:

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^* A = I_n\},$$

gdzie A^* to macierz transponowana i sprzężona do A , czyli $A^* = \overline{A^T}$. Z równania $A^* A = I_n$ wynika, że dla $A \in U(n)$ zachodzi $|\det A| = 1$, a więc $\det A \in S^1$ (S^1 tu rozumiemy jako podzbiór liczb zespolonych o module 1). Podgrupą $U(n)$ jest grupa $SU(n)$ składająca się z macierzy o wyznaczniku równym 1:

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}.$$

Ważną klasą przestrzeni topologicznych są przestrzenie pętli, czyli przestrzenie odwzorowań okręgu w jakąś przestrzeń topologiczną. Najogólniej można rozważać przestrzeń odwzorowań ciągłych okręgu w przestrzeń X , czyli $Map(S^1, X)$, na której określamy topologię zwartootwartą (czyli topologię zbieżności jednostajnej). Jeśli X jest grupą, to na $Map(S^1, X)$ można zdefiniować strukturę grupy w następujący sposób: odwrotnością pętli f jest pętla f^{-1} taka, że $f^{-1}(z) = f(z)^{-1}$, a wynikiem mnożenia pętli f i g jest pętla fg taka, że $fg(z) = f(z)g(z)$. Jeśli rozważamy pętle związane, to znaczy takie, że $f(1) = 1$, to taka struktura jest homotopijnie równoważna ze strukturą

H-przestrzeni uzyskaną przez składanie pętli. Inaczej mówiąc, pętla f^{-1} jest homotopijnie równoważna z pętlą $t \mapsto f(1-t)$, a fg jest homotopijnie równoważna z pętlą

$$t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{dla } t \in [0, 1/2] \\ g(2t-1) & \text{dla } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(w tym opisie wygodniej jest traktować okrąg jako odcinek $[0, 1]$ z utożsamionymi końcami).

Jeśli X jest gładką rozmaitością, to zamiast $Map(S^1, X)$ wygodniej jest rozważać homotopijnie równoważną przestrzeń odwzorowań gładkich $C^\infty(S^1, X)$. Dla grupy Liego G przestrzeń gładkich odwzorowań okręgu w G oznaczamy przez ΛG . Jest to nieskończenie wymiarowa grupa Liego.

W przestrzeni ΛG wyróżniamy przestrzeń pętli związanych $\Omega G = \{f \in \Lambda G \mid f(1) = 1\}$. Zauważmy, że mamy następujący rozszczepialny ciąg dokładny

$$\Omega G \xrightarrow{i} \Lambda G \begin{matrix} \xleftarrow{ev_1} \\ \xrightarrow{s} \end{matrix} G,$$

gdzie i jest włożeniem, ev_1 ewaluacją w jedynce (tzn $ev_1(f) = f(1)$), a $s(g)(z) = g$. Stąd $\Lambda G \cong \Omega G \times G$ (jako przestrzenie topologiczne) oraz $\Omega G = \Lambda G/G$.

Jeśli G jest podgrupą $GL(n, \mathbb{C})$, to w ΛG możemy wyróżnić podzbiór pętli algebraicznych, czyli takich, które mają postać skończonych wielomianów Laurenta:

$$\Lambda_{alg} G = \{f \in \Lambda G \mid \exists m \ f = \sum_{i=-m}^m A_i z^i, A_i \in M_{n \times n}(\mathbb{C})\}.$$

W ogólnym przypadku $\Lambda_{alg} G$ nie jest grupą, bo odwrotność pętli algebraicznej nie musi być pętlą algebraiczną. Jednak dla $g \in U(n)$ mamy $g^{-1} = g^*$, zatem dla pętli $f = \sum_{i=-m}^m A_i z^i \in \Lambda_{alg} U(n)$ mamy

$$f^{-1}(z) = \sum_{i=-m}^m A_i^* z^{-i} \in \Lambda_{alg} U(n),$$

zatem dla grup G , które są podgrupami $U(n)$, można określić strukturę grupy na $\Lambda_{alg} G$. Analogicznie jak dla pętli gładkich, wyróżniamy też grupę pętli algebraicznych związanych $\Omega_{alg} G = \{f \in \Lambda_{alg} G \mid f(1) = I\}$. W rozdziale 2.2 pokażemy rozkład przestrzeni $\Omega_{alg} U(n)$ na komórki.

1.1. Grassmanniany i diagramy Younga

Przez $G(m, n)$ będziemy oznaczać zbiór m -wymiarowych podprzestrzeni \mathbb{C}^n . Jeśli V należy do $G(m, n)$, to wymiary przestrzeni $V \cap \mathbb{C}^k$ tworzą ciąg niemalejący:

$$0 \leq \dim(V \cap \mathbb{C}^1) \leq \dim(V \cap \mathbb{C}^2) \leq \dots \leq \dim(V \cap \mathbb{C}^n) = m,$$

gdzie przez \mathbb{C}^k rozumiemy podprzestrzeń \mathbb{C}^n rozpiętą przez k pierwszych wektorów standardowej bazy \mathbb{C}^n : $\mathbb{C}^k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \mid x_i \in \mathbb{C}\}$. Zatem podprzestrzeni V możemy przypisać rosnący ciąg k_1, k_2, \dots, k_m , gdzie k_i oznacza miejsce skoku wymiaru, to znaczy:

$$\dim(V \cap \mathbb{C}^{k_i}) = i = \dim(V \cap \mathbb{C}^{k_i-1}) + 1$$

Oczywiście to przypisanie nie jest różnowartościowe, bo jednemu ciągowi może odpowiadać wiele podprzestrzeni \mathbb{C}^n .

Niech \underline{k} będzie ciągiem (k_1, \dots, k_m) takim, że $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$. Oznaczmy przez $e(\underline{k})$ zbiór podprzestrzeni \mathbb{C}^n odpowiadających ciągowi \underline{k} . Łatwo zauważyć, że $V \in e(\underline{k})$ wtedy i tylko

wtedy, gdy istnieje baza (x_1, \dots, x_m) taka, że $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k_i}, 0, \dots, 0)$, gdzie $x_{i,k_i} \neq 0$. Bez straty ogólności można założyć, że $x_{i,k_i} = 1$. Przedstawiając $V \in e(\underline{k})$ w postaci macierzy dostajemy:

$$\begin{pmatrix} x_{m,1} & x_{m,2} & \dots & x_{m,k_1} & x_{m,k_1+1} & \dots & x_{m,k_2} & x_{m,k_2+1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,k_1} & x_{2,k_1+1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Dzięki temu, że na pozycjach $(n - i + 1, k_i)$ są jedynki, możemy wykonując elementarne operacje na wierszach macierzy (1.1) uzyskać macierz, w której w każdej kolumnie k_i jest dokładnie jedna jedynka, a reszta wyrazów jest równa 0 i, tak jak w wyjściowej macierzy, w wierszach wyrazy na prawo od pozycji $(n - i + 1, k_i)$ są równe 0. Natomiast pozostałe wyrazy określają jednoznacznie podprzestrzeń V .

Zatem ogólna postać macierzy należącej do $e(\underline{k})$ to:

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \dots & 0 & \bullet & \dots & 0 & \bullet & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \dots & 0 & \bullet & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

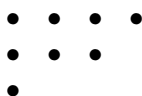
gdzie kropka (\bullet) oznacza dowolną liczbę zespoloną.

Z tej konstrukcji wynika w szczególności, że $e(\underline{k})$ jest dyfeomorficzne z \mathbb{C}^d , gdzie d jest równe liczbie kropek w macierzy (1.2), czyli $\sum_i (k_i - i)$. Okazuje się, że podział na $e(\underline{k})$ określa na $G(m, n)$ strukturę CW-kompleksu. Nie będziemy tego w pracy dowodzić.

Komórce $e(\underline{k})$ możemy przyporządkować w sposób jednoznaczny tzw. diagram Younga, który odwzorowuje układ kropek w powyższej macierzy. Przykładowo macierzy

$$\begin{pmatrix} \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

odpowiada diagram



Jak widać, liczba kropek w diagramie Younga jest równa zespolonemu wymiarowi odpowiadającej mu komórki grassmannianu.

Grassmannian $G(m, n)$ ma komórki tylko parzystego rzeczywistego wymiaru, więc grupa homologii $H_{2d}(G(m, n))$ jest grupą wolną o liczbie generatorów równej liczbie d -wymiarowych komórek. Grupy $H_d(G(m, n))$ dla d nieparzystych są zerowe. Z odpowiedniości między komórkami a diagramami Younga wynika, że liczba komórek w wymiarze (rzeczywistym) $2d$ jest równa liczbie diagramów Younga o d kropkach, w których kolumny mają nie więcej niż m kropek, a wiersze nie więcej niż $(n - m)$ kropek.

Inkluzja $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ (włożenie \mathbb{C}^n na n pierwszych współrzędnych \mathbb{C}^{n+1}) daje nam inkluzję $G(m, n) \hookrightarrow G(m, n + 1)$. W tym włożeniu komórki $G(m, n)$ przechodzą na komórki $G(m, n + 1)$ tych samych wymiarów, zatem $G(m, n)$ jest podkompleksem $G(m, n + 1)$. W granicy dostajemy strukturę CW-kompleksu na $G(m, \infty) = \bigcup_n G(m, n)$. Z kolei włożenie $\mathbb{C}^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}^\infty$ dane wzorem $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ daje nam włożenie $G(m, \infty) \hookrightarrow G(m + 1, \infty)$ (komórka $e(k_1, k_2, \dots, k_m)$ przechodzi na komórkę tego samego wymiaru $e(1, k_1 + 1, k_2 + 2, \dots, k_m + 1)$). Dostajemy więc również strukturę CW-kompleksu na $\bigcup_m G(m, \infty)$.

1.2. ΩSU i przestrzeń klasyfikująca U

Definicja 1.1. Niech G będzie grupą topologiczną. G -wiązka uniwersalna to G -wiązka główna $p: EG \rightarrow BG$ taka, że każda inna G -wiązka główna jest pullbackiem p , to znaczy dla każdej wiązki $p': E \rightarrow B$ istnieje przekształcenie $f: B \rightarrow BG$ (jednoznaczne z dokładnością do homotopii) takie, że $p' \simeq f^*p$:

$$\begin{array}{ccc} f^*B & \longrightarrow & EG \\ f^*p \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{f} & BG \end{array} \quad \begin{array}{ccc} EB & \longrightarrow & EG \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{f} & BG \end{array}$$

BG nazywamy przestrzenią klasyfikującą G .

Z uniwersalności wiązki $p: EG \rightarrow BG$ wynika, że jest ona wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do homotopijnej równoważności (bo f jest jednoznaczne z dokładnością do homotopii).

John Milnor skonstruował w pracy [Milnor56] model wiązki uniwersalnej dla dowolnej grupy topologicznej wykorzystując pojęcie złączenia¹. W szczególności wiadomo, że EG jest zawsze ściągająca.

Z rozwłóknienia

$$G \longrightarrow EG \longrightarrow BG$$

dostajemy rozwłóknienie

$$\Omega BG \longrightarrow G \longrightarrow EG,$$

a z niego ciąg dokładny grup homotopii

$$\pi_{n+1}(EG) \rightarrow \pi_n(\Omega BG) \rightarrow \pi_n(G) \rightarrow \pi_n(EG). \quad (1.3)$$

Ponieważ $\pi_i(EG) = 0$ dla każdego i , więc z (1.3) wynika słaba homotopijna równoważność ΩBG i G . Każda zwarta grupa Liego G ma strukturę CW-kompleksu, zatem w tym przypadku dostajemy, że G jest homotopijnie równoważna z ΩBG .

Dla grupy $U(n)$ wygodnym modelem przestrzeni klasyfikującej są n -wymiarowe podprzestrzenie \mathbb{C}^∞ ; dokładniej — $BU(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} G(n, m) = G(n, \infty)$. Przestrzeń BU to $\lim_{n \rightarrow \infty} G(n, \infty)$.

Przypomnijmy twierdzenie zacytowane we wprowadzeniu:

Twierdzenie 1.2 (Bott). $BU \simeq \Omega SU$.

Ponieważ jako przestrzeń topologiczna $U = S^1 \times SU$, więc

$$\Omega U = \Omega(S^1 \times SU) = \mathbb{Z} \times \Omega SU \simeq \mathbb{Z} \times BU.$$

Stąd dostajemy inne sformułowanie twierdzenia Botta:

$$\Omega U \simeq \mathbb{Z} \times BU$$

oraz wynikające z niego

$$\begin{aligned} \Omega^2 U &\simeq U, \\ \Omega^2 BU &\simeq \mathbb{Z} \times BU. \end{aligned}$$

¹złączeniem przestrzeni X i Y jest przestrzeń $X \times Y \times I$ z utożsamieniami $(x_1, y, 0) \sim (x_2, y, 0)$, $(x, y_1, 1) \sim (x, y_2, 1)$; w swojej pracy Milnor konstruuje wiązkę uniwersalną z nieskończonego złączenia

Rozdział 2

Przestrzenie pętli

Przedstawimy niektóre znane wyniki dotyczące przestrzeni pętli (gładkich i algebraicznych) na grupie $SU(n)$. W szczególności będą nas interesować struktury grup homologii. Dla przestrzeni pętli algebraicznych podamy sposób podziału przestrzeni na komórki parzystych rzeczywistych wymiarów. Komórki te będą indeksowane pewnymi ciągami liczb całkowitych. Później okaże się, że można im również przyporządkować diagramy Younga.

2.1. Grupy homologii przestrzeni $\Omega SU(n)$

Zachodzi następujące twierdzenie (Wniosek 8.1 z pracy [Bott58])

Twierdzenie 2.1.

$$H_*(\Omega SU(n)) = \mathbb{Z}[\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}]$$

oraz wymiar elementu ν_i jest równy $|\nu_i| = 2i$.

Ten sam rezultat można wywnioskować z rozdziału II książki [Dyer69]. Autor konstruuje tam odwzorowanie $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \Omega SU(n)$ i po przejściu do granicy dostaje odwzorowanie $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty \rightarrow \Omega SU$. Następnie pokazuje, że

$$H_*(\Omega SU) = \mathbb{Z}[\nu_1, \nu_2, \dots],$$

gdzie element ν_i ma wymiar równy $2i$. Z konstrukcji tych przekształceń widać, że generatory ν_i dla $i < n$ pochodzą z $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ oraz że generują $H_*(\Omega SU(n))$. Więcej o przekształceniu $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \Omega SU(n)$ będzie w rozdziale 4.

Dzięki Twierdzeniu 2.1 możemy uzyskać wygodny sposób opisu elementów generujących grupy $H_d(\Omega SU(n))$ dla każdego $d \geq 0$. Mianowicie generatorami grupy wolnej $H_d(\Omega SU(n))$ są jednomiany $\nu_{i_1} \nu_{i_2} \dots \nu_{i_m}$ takie, że $0 \leq i_j \leq n-1$ dla każdego j oraz

$$\sum_j |\nu_{i_j}| = \sum_j 2i_j = d.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\nu_{i_1} \geq \nu_{i_2} \geq \dots \geq \nu_{i_m}$. Taki monotoniczny ciąg można przestawić za pomocą diagramu Younga, w którym j -ta kolumna będzie miała i_j kropek.

Zatem w naszym przypadku elementy generujące grupę wolną $H_{2d}(\Omega SU(n))$ są w bijekcji z diagramami Younga o d kropkach, w których kolumny mają nie więcej niż $(n-1)$ kropek. Grupy $H_{2d+1}(\Omega SU(n))$ są oczywiście zerowe. Dla przestrzeni ΩSU generatory $H_{2d}(\Omega SU)$ są w bijekcji z diagramami Younga o d kropkach. Pokazuje to, że $H_d(\Omega SU(n)) \cong H_d(\Omega SU)$ dla $d < 2n$.

Zauważmy, że diagramy Younga odpowiadające generatorom $H_{2d}(\Omega SU)$ możemy też interpretować jako komórki wymiaru zespolonego d w BU (a więc również jako generatory $H_{2d}(BU)$). Wiemy bowiem, że $\Omega SU \simeq BU$ i BU jest granicą rozmaitości Grassmanna.

2.2. Pętle algebraiczne na $U(n)$ i $SU(n)$

Opiszemy teraz podział przestrzeni pętli algebraicznych na $SU(n)$ na komórki podany przez Pressley'a w pracy [Press80].

Wprowadzimy najpierw potrzebne oznaczenia. Niech H będzie przestrzenią Hilberta $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$, (e_1, \dots, e_n) to standardowa baza \mathbb{C}^n . Ponadto

$$H_p = \text{span}\{z^i e_j \mid 1 \leq j \leq n, i \geq p\},$$

$$H_{p,i} = \text{span}(H_{p+1} \cup \{z^p e_j \mid 1 \leq j \leq i\}).$$

Przez X_m oznaczamy zbiór podprzestrzeni $V \subseteq H$ takich, że:

- $zV \subseteq V$,
- $H_m \subseteq V \subseteq H_{-m}$.

Oczywiście zachodzi $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{m \geq 0} X_m$. Granicę prostą przestrzeni X_m oznaczamy przez X . Jeśli V należy do X , to dopełnienie ortogonalne przestrzeni zV w V oznaczamy przez $V \ominus zV$. Przypomnijmy, że $G_m(H) = \{V \subseteq H \mid H_m \subseteq V \subseteq H_{-m}\}$ oraz, że $G_m(H)$ utożsamiamy z $G(\mathbb{C}^{2mn})$. Zatem X_m jest podzbiorem grassmanianu $G(\mathbb{C}^{2mn})$.

W pętłach algebraicznych $\Lambda_{alg}U(n)$ wyróżniamy pętle $\Lambda_{alg}^m U(n)$: f należy do $\Lambda_{alg}^m U(n)$ jeśli jest postaci

$$f(z) = \sum_{i=-m}^m A_i z^i.$$

Oczywiście $\Lambda_{alg}U(n) = \bigcup_m \Lambda_{alg}^m U(n)$. Analogicznie, $\Omega_{alg}^m U(n)$ to zbiór pętli $f \in \Lambda_{alg}^m U(n)$ takich, że $f(1) = 1$.

Grupa $\Lambda_{alg}U(n)$ działa na H przez transformacje unitarne. Jeśli $f \in \Lambda_{alg}U(n)$ i $v \in H$, to $(fv)(z) = f(z)v(z)$. Sprawdźmy, że działa również na X .

Niech $f \in \Lambda_{alg}^m U(n)$ (czyli $f(z) = \sum_{i=-m}^m A_i z^i$) i $V \in X_p$ (czyli $zV \subseteq V$ i $H_p \subseteq V \subseteq H_{-p}$). Wtedy $fV \subseteq H_{-p-m}$. Z drugiej strony, $f(z)^{-1} = \sum_{i=-m}^m A_i^* z^{-i}$, więc jednocześnie $f^{-1}H_{p+m} \subseteq H_p \subseteq V$, czyli $H_{p+m} \subseteq fV$. Ponadto $zfV = f(zV) \subseteq fV$. Zatem $fV \in X_{p+m} \subseteq X$.

Stwierdzenie 2.2. $\Lambda_{alg}U(n)$ działa tranzytywnie na X i grupą izotropii przestrzeni H_0 jest podgrupa pętli stałych $U(n)$.

Wniosek 2.3. $X \cong \Lambda_{alg}U(n)/U(n) \cong \Omega_{alg}U(n)$.

Do dowodu tranzytywności działania $\Lambda_{alg}U(n)$ potrzebujemy pomocniczego stwierdzenia:

Stwierdzenie 2.4. Dla każdego $w \in S^1$ i $V \in X$ ewaluacja $ev_w: V \ominus zV \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest izometrią i izomorfizmem.

Dowód. Niech $V \in X_m$. Jeśli $f \in V \ominus zV$ i $f(z) = \sum_{i=-m}^m a_i z^i$, to dla każdego $w \in S^1$ $\sum_{i=-m}^m \frac{a_i}{w^p} z^i$ też należy do $V \ominus zV$. Zatem jeśli $g(z) = z^p \frac{f(z)}{w^p}$, to $g \in z^p V \ominus z^{p+1} V$ i $g(w) = f(w)$. Mamy więc, że $ev_w(V \ominus zV) = ev_w(z^p V \ominus z^{p+1} V)$ dla każdego $p \in \mathbb{Z}$.

Ponieważ

$$V \ominus z^{2m+1} V = (V \ominus zV) \oplus (zV \ominus z^2 V) \oplus \dots \oplus (z^{2m} V \ominus z^{2m+1} V),$$

więc

$$\begin{aligned} ev_w(V \ominus z^{2m+1} V) &= ev_w(V \ominus zV) + ev_w(zV \ominus z^2 V) + \dots + ev_w(z^{2p} V \ominus z^{2p+1} V) \\ &= ev_w(V \ominus zV) \end{aligned}$$

Jeśli założymy, że $ev_w: V \ominus zV \rightarrow \mathbb{C}^n$ nie jest surjekcją, to $ev_w: V \ominus z^{2m+1}V \rightarrow \mathbb{C}^n$ też nie będzie surjekcją. Ale $H_m \ominus H_{m+1} \subseteq V \ominus z^{2m+1}V$ i $ev_w: H_m \ominus H_{m+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest oczywiście „na”. Otrzymaliśmy sprzeczność — zatem $ev_w: V \ominus zV \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest surjekcją.

Wystarczy jeszcze dowieść, że jest izometrią (to razem z surjekcją implikuje izomorfizm).

Niech $v \in V \ominus zV$, $v = \sum_i a_i z^i$. Ponieważ $w \in S^1$, więc $\bar{w} = w^{-1}$. Mamy:

$$\|v(w)\|^2 = \left\langle \sum_i a_i w^i, \sum_j a_j w^j \right\rangle = \sum_{i,j} \langle a_i, a_j \rangle w^{i-j} = \sum_p \sum_i \langle a_i, a_{i-p} \rangle w^p.$$

Z drugiej strony

$$\langle v, z^p v \rangle_H = \left\langle \sum_i a_i z^i, \sum_j a_j z^{j+p} \right\rangle_H = \sum_i \langle a_i, a_{i-p} \rangle.$$

Wiemy też, że $v \in V \ominus zV$, a więc $\langle v, z^p v \rangle_H = 0$ dla każdego $p \neq 0$. Zatem

$$\|v(w)\|^2 = \sum_i \langle a_i, a_{i-0} \rangle w^0 = \sum_i \langle a_i, a_i \rangle = \|v\|_H^2,$$

więc ev_w jest izometrią. □

Dowód Stwierdzenia 2.2. Wiemy już, że $ev_w: V \ominus zV \rightarrow \mathbb{C}^n$ jest izomorfizmem i izometrią. Niech więc $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie ortonormalną bazą $V \ominus zV$ taką, że $ev_1(v_i) = v_i(1) = e_i$. Weźmy $f_V: S^1 \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$ zdefiniowane wzorem $f_V(z) = (v_1(z), \dots, v_n(z))$ ($v_i(z)$ jest i -tą kolumną $f_V(z)$). Zachodzi $f_V \in \Lambda_{alg}U(n)$, bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ to baza ortonormalna $V \ominus zV$, a ev_z jest izometrią dla każdego $z \in S^1$. Ponadto $f_V H_0 = V$, co dowodzi tranzytywności działania $\Lambda_{alg}U(n)$.

Niech teraz $f = \sum_{i=-m}^m A_i z^i$ i $f H_0 = H_0$. Z drugiego warunku wynika, że f w rozwinięciu w szereg Laurenta nie może mieć współczynników o potęgach mniejszych od 0. Jednocześnie jednak zachodzi $f^{-1} H_0 = H_0$, więc szereg f^{-1} również nie ma współczynników o potęgach mniejszych od 0. Ale $f^{-1}(z) = \sum_{i=0}^m A_i^* z^{-i}$, więc $A_i = 0$ dla $i \neq 0$. Zatem stabilizatorem H_0 są pętle stałe $U(n)$. □

Zauważmy jeszcze, że jeśli $f \in \Lambda_{alg}^m U(n)$, to $f H_0 \in X_m$. Zatem $\Omega_{alg}^m U(n)$ możemy utożsamiać z X_m .

Działanie $\Lambda_{alg}U(n)$ na X rozszerza się na działanie grupy wszystkich pętli algebraicznych $S^1 \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, których odwrotności też są pętlami algebraicznymi. Grupę tę oznaczamy przez $M_{\mathbb{C}}$. Zauważmy, że $M_{\mathbb{C}} = GL(n, \mathbb{C}[z, z^{-1}])$. Grupą izotropii H_0 przy działaniu $M_{\mathbb{C}}$ jest podgrupa $P \subseteq M_{\mathbb{C}}$ składająca się z pętli

$$\left\{ \sum_{i=0}^m A_i z^i \in M_{\mathbb{C}} \mid A_0 \in GL(n, \mathbb{C}) \right\}.$$

Równoważnie, $P = GL(n, \mathbb{C}[z])$.

Wniosek 2.5. $\Lambda_{alg}U(n)/U(n)$ jest homeomorficzne z $M_{\mathbb{C}}/P$.

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie posługiwać się szeregami formalnymi, tj. takimi, które mogą mieć nieskończenie wiele wyrazów o dodatnich potęgach. Niech $\overline{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[z^{-1}, z]$, gdzie

$$f \in \mathbb{C}[z^{-1}, z] \Leftrightarrow f(z) = \sum_{i=-m}^{\infty} a_i z^i.$$

Natomiast przez \overline{P} będziemy oznaczać $\mathbb{C}[[z]]$, czyli szeregi $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$.

Udowodnimy najpierw, że $\overline{M}_{\mathbb{C}}/\overline{P} = M_{\mathbb{C}}/P$.

Weźmy warstwę $g\overline{P} \in \overline{M}_{\mathbb{C}}/\overline{P}$ ($g \in \overline{M}_{\mathbb{C}}$). Następujący algorytm prowadzi do znalezienia reprezentanta g' warstwy $g\overline{P}$ takiego, że $g' \in M_{\mathbb{C}}$.

1. Wybieramy wyraz g_{ij} macierzy g , który zaczyna się od najniższej potęgi. Jeżeli takich wyrazów jest więcej, to wybieramy ten w najniższym wierszu. Zamieniamy kolumnę, w której znajduje się wybrany wyraz z pierwszą kolumną.
2. Załóżmy, że wybrany w poprzednim kroku wyraz jest równy $\sum_{i \geq k_1} a_i z^i$, gdzie $a_{k_1} \neq 0$. Możemy go zapisać w postaci $z^{k_1} h(z)$, gdzie $h \in \overline{P}$ i $h(0) = a_{k_1}$. Szereg h jest odwracalny w $\mathbb{C}[[z]]$, bo $h(0) \neq 0$. Możemy więc pomnożyć pierwszą kolumnę przez h^{-1} . Pierwsza kolumna wygląda teraz tak, że w jednym wierszu stoi z^{k_1} , powyżej stoją szeregi o potęgach większych lub równych k_1 , a poniżej szeregi o potęgach większych lub równych $k_1 + 1$.
3. W wierszu, w którym pojawił się w poprzednim kroku z^{k_1} , na prawo od tego wyrazu są szeregi o potęgach większych lub równych k_1 . Możemy zatem wykonując operacje na kolumnach wyzerować wszystkie te wyrazy.

Następnie powtarzamy kroki 1-3, czyli wybieramy wyraz zaczynający się od najmniejszej potęgi i stojący w najniższym wierszu, zamieniamy kolumnę, w którym stoi, z drugą kolumną, mnożymy przez element odwracalny z \overline{P} , aby otrzymać w odpowiednim wierszu jednomian z^{k_2} i wykonując operacje na kolumnach zerujemy wyrazy na prawo od z^{k_2} . Wszystkie wykonywane operacje odpowiadają mnożeniu z prawej przez jakiś element \overline{P} , zatem otrzymujemy zawsze macierz z $g\overline{P}$.

Po n krokach otrzymujemy ostatecznie macierz następującej postaci: w i -tej kolumnie w pewnym wierszu stoi z^{k_i} . Powyżej w tej kolumnie mamy szeregi o potęgach wyższych lub równych k_i , a poniżej szeregi o potęgach zaczynających się od potęg większych lub równych $k_i + 1$. Na prawo od z^{k_i} są zera. Ponadto $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

Możemy wykonując kolejne operacje na kolumnach zlikwidować na lewo od wyrazów z^{k_i} potęgi większe i równe k_i . Oczywiście jest to znowu mnożenie przez jakiś element z \overline{P} . Ostatecznie otrzymaliśmy macierz $g' \in g\overline{P}$, w której nie ma nieskończonych szeregów, czyli $g' \in M_{\mathbb{C}}$. Zauważmy ponadto, że po pomnożeniu g' przez dowolny element z \overline{P} różny od identyczności otrzymamy macierz, która nie jest już opisanej postaci.

Wniosek 2.6. *Dla każdej warstwy $g\overline{P} \in \overline{M}_{\mathbb{C}}/\overline{P}$ istnieje dokładnie jedna macierz $g' \in M_{\mathbb{C}}$ taka, że $g' \in g\overline{P}$ oraz istnieją liczby $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ oraz różne liczby $m_1, \dots, m_n \in \{1, \dots, n\}$ spełniające warunki:*

- w i -tej kolumnie g' w m_i -tym wierszu stoi element z^{k_i} ,
- w i -tej kolumnie powyżej tego elementu stoją wielomiany o potęgach wyższych lub równych k_i , a poniżej stoją wielomiany o potęgach wyższych lub równych $k_i + 1$,
- w m_i -tym wierszu na prawo od i -tego elementu (równego z^{k_1}) stoją zera, a na lewo wielomiany o potęgach mniejszych od k_i ,
- wykładniki k_i tworzą ciąg niemalejący,
- jeśli $k_i = k_{i+1}$, to z^{k_i} w i -tej kolumnie znajduje się niżej niż w kolumnie $i + 1$.

Macierz tej postaci będziemy nazywać macierzą zredukowaną.

Z tych rozważań wynika, że odwzorowanie $M_{\mathbb{C}}/P \rightarrow \overline{M}_{\mathbb{C}}/\overline{P}$ dane wzorem $gP \mapsto g\overline{P}$ jest „na”. Udowodnimy jeszcze, że jest różnowartościowe. Załóżmy, że $g, h \in M_{\mathbb{C}}$ i $g\overline{P} = h\overline{P}$. Wtedy $h^{-1}g \in \overline{P}$, czyli również $h^{-1}g \in P$. Zatem $gP = hP$. Udowodniliśmy więc, że $\overline{M}_{\mathbb{C}}/\overline{P} = M_{\mathbb{C}}/P$.

Niech B będzie podgrupą P złożoną z macierzy $\sum_{i=0}^m A_i z^i$ takich, że A_0 jest górnotrójkątna. Grupa B działa z lewej strony na $M_{\mathbb{C}}/P$. Niech $\mu_{\underline{k}}$ oznacza macierz zredukowaną, w której z^{k_i} stoi w i -tym wierszu oraz wszystkie pozostałe wyrazy są równe 0. Mnożąc $\mu_{\underline{k}}$ z lewej strony przez element z B dostajemy element z warstwy, której macierz zredukowana również ma z^{k_i} w i -tym wierszu. Co więcej, dostaniemy w ten sposób każdą macierz zredukowaną takiej postaci.

Orbitę działania B na $\mu_{\underline{k}}P$ oznaczamy przez $Q_{\underline{k}}$:

$$Q_{\underline{k}} = B\mu_{\underline{k}}P/P.$$

Stwierdzenie 2.7. Wymiar komórki $Q_{\underline{k}}$ jest równy

$$\sum_{i < j} |k_i - k_j| - v(\underline{k}),$$

gdzie $v(\underline{k})$ to ilość transpozycji potrzebna do uzyskania z \underline{k} ciągu posortowanego nierosnąco lub, równoważnie, ilość par i, j takich, że $i < j$ i $k_i < k_j$.

Dowód. Wymiar $Q_{\underline{k}}$ jest równy ilości współczynników w ogólnej postaci macierzy zredukowanej z z^{k_i} w i -tym wierszu.

Założmy najpierw, że ciąg \underline{k} jest nierosnący i niech g będzie macierzą zredukowaną, której odpowiada ciąg \underline{k} . Wtedy $g_{i, n-i+1} = z^{k_i}$, poniżej tej przekątnej są zera, natomiast pozostałe wyrazy to szeregi postaci $g_{i,j} = \sum_{l=k_j}^{k_i-1} a_l z^l$. Stąd $\dim(Q_{\underline{k}}) = \sum_{i < j} (k_i - k_j)$.

Niech teraz \underline{k} będzie dowolnym ciągiem i $\dim(Q_{\underline{k}}) = d$ i założmy, że $k_p > k_{p+1}$. Niech \underline{k}' będzie ciągiem powstałym z \underline{k} przez transpozycję elementów k_p i k_{p+1} . Ponieważ $k_p > k_{p+1}$, więc wyraz z^{k_p} stoi na prawo od wyrazu $z^{k_{p+1}}$. Niech g i g' będą ogólną postacią macierzy odpowiadającym odpowiednio ciągom \underline{k} i \underline{k}' . W macierzy g' wszystkie wiersze prócz p -tego i $(p+1)$ -szego są takie same, jak w macierzy g . Wiersz p -ty macierzy g' to wiersz $(p+1)$ -szy macierzy g . Natomiast w p -tym wierszu g' wszystkie wyrazy są takie same, jak w g prócz wyrazu bezpośrednio pod $z^{k_{p+1}}$. W macierzy g ten wyraz był szeregiem $\sum_{i=k_{p+1}}^{k_p-1} a_i z^i$, a w macierzy g' jest to szereg $\sum_{i=k_{p+1}+1}^{k_p-1} a_i z^i$. Zatem

$$\dim(Q_{\underline{k}'}) = \dim(Q_{\underline{k}}) - 1.$$

To kończy dowód. □

Opisaliśmy więc podział $\Omega_{alg}U(n)$ na komórki $Q_{\underline{k}}$ indeksowane ciągami \underline{k} .

Korzystając z utożsamienia $M_{\mathbb{C}}/P \cong X$ pokażemy geometryczną interpretację tego podziału.

Niech $V \in X$. Wiemy, że $zV \subseteq V$ oraz że $V \ominus zV$ jest izomorficzne z \mathbb{C}^n . Zatem istnieje n liniowo niezależnych wektorów (v_1, v_2, \dots, v_n) takich, że $V = \text{span}\{z^i v_j \mid i \geq 0\}$. Możemy wpisać wektory v_j do nieskończonej macierzy.

	z^5			z^4			z^3			z^2		
...	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3
...	$v_{1,6}$	$v_{1,5}$	$v_{1,4}$	$v_{1,3}$	$v_{1,2}$	$v_{1,1}$						
...	$v_{2,11}$	$v_{2,10}$	$v_{2,9}$	$v_{2,8}$	$v_{2,7}$	$v_{2,6}$	$v_{2,5}$	$v_{2,4}$	$v_{2,3}$	$v_{2,2}$	$v_{2,1}$	
...	$v_{3,3}$	$v_{3,2}$	$v_{3,1}$									

Teraz wykonując operacje na wierszach, analogicznie jak w przypadku rozmaitości Grassmanna, możemy sprowadzić macierz do uproszczonej postaci. Ponieważ mamy dodatkową zależność $zV \subseteq$

V , więc wyzerujemy też kolumny przesunięte o wielokrotność n w lewo w stosunku do skrajnie prawych niezerowych wyrazów. Zauważmy, że te operacje odpowiadają kolejnym krokom opisanego wcześniej algorytmu znajdowania reprezentanta $g' \in M_{\mathbb{C}}$ warstwy $g\bar{P}$. Na przykład wpisanie jedynki w skrajnie prawe miejsce w wierszu i wyzerowanie wszystkich wyrazów stojących w tym wierszu o wielokrotność n na lewo odpowiada pomnożeniu kolumny przez element odwracalny z \bar{P} tak, aby dostać w jednym miejscu jednomian z^{k_i} .

Ostatecznie dostaniemy macierz takiej postaci:

	z^5			z^4			z^3			z^2		
\dots	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3	e_1	e_2	e_3
\dots	0	0	0	•	0	0	•	0	•	•	1	
\dots	0	0	0	•	0	1						
\dots	1											

W jej wierszach mamy wektory $(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$ takie, że $V = \text{span}\{z^i v'_j \mid i \geq 0\}$. Liczba kropek w macierzy jest równa zespolonemu wymiarowi Q_k .

Powyższa macierz odpowiada komórce $Q_{(5,2,4)}$.

Ogólnie w komórce Q_k (traktowanej jako podzbiór X) znajdują się przestrzenie V takie, że przy filtracji V przez $H_{p,i}$ skoki wymiaru pojawiają się w miejscach $(k_i + jn, i)$ dla $j \geq 0$.

Kończymy nasze rozważania następujący stwierdzeniem:

Stwierdzenie 2.8. *Przestrzeń $\Omega_{alg}U(n)$ ma \mathbb{Z} składowych spójności. W i -tej składowej zawierają się wszystkie pętle f o stopniu wyznacznika $\det f$ równym i . Co więcej, jeśli $f \in Q_k$, to stopień $\det f$ jest równy $\sum_i k_i$. Czyli*

$$\Omega_{alg}U(n) = \coprod_p \left(\bigcup_{\sum_i k_i = p} Q_k \right).$$

Dowód. Jeśli dwie pętle f i g leżą w tej samej spójnej składowej, to $\det f$ i $\det g$ są homotopijne, a więc mają jednakowy stopień. Trzeba jeszcze pokazać, że jeśli $\det f$ i $\det g$ mają jednakowy stopień, to są homotopijne przez pętle algebraiczne.

Niech $p \in P$, $p = \sum_{i=0}^m A_i z^i$. Niech λ_k będzie pętlą postaci

$$\lambda_k = \text{diag}(z^{k_1}, \dots, z^{k_n}) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{k_n} \end{pmatrix}$$

Mnożąc λ_k z prawej strony przez pewien element z P dostaniemy macierz μ_k , więc $\lambda_k \in Q_k$. Przekształcenie $h(t)(z) = p((1-t)z)$ określa homotopię między p a A_0 . Ponieważ $A_0 \in GL(n, \mathbb{C})$, a $GL(n, \mathbb{C})$ jest spójna, więc p jest homotopijna z pętlą $t \mapsto \text{diag}(1, \dots, 1)$ przez pętle algebraiczne. Stąd jeśli $f = p\lambda_k P$ dla pewnego $p \in P$, to f jest homotopijna przez pętle algebraiczne z λ_k .

Udowodnimy teraz, że λ_k jest homotopijna przez pętle algebraiczne z $\lambda_{(\sum_i k_i, 0, \dots, 0)}$.

Rozważmy najpierw macierz 2×2 :

$$g(t) = \begin{pmatrix} (1-t)a + tab & \sqrt{t(1-t)}(ab-a) \\ \sqrt{t(1-t)}(b-1) & (1-t)b + t \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Określa ona homotopię między macierzą

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

a macierzą

$$\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Co więcej, łatwo policzyć, że dla każdego $t \in [0, 1]$ wyznacznik macierzy $g(t)$ jest równy ab , a jej wiersze tworzą bazę ortonormalną. W szczególności dla $a = z^{k_1}$ i $b = z^{k_2}$ dostajemy homotopię między pętlą $\text{diag}(z^{k_1}, z^{k_2})$ a $\text{diag}(z^{k_1+k_2}, 1)$. Z postaci macierzy (2.1) wynika, że homotopia ta jest przez pętle algebraiczne. Zatem w podobny sposób pętla

$$\lambda_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-2}, k_{n-1}, k_n)} \in \Omega_{\text{alg}}U(n)$$

jest homotopijna przez pętle z $\Omega_{\text{alg}}U(n)$ z macierzą

$$\lambda_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-2}, k_{n-1}+k_n, 0)} \in \Omega_{\text{alg}}U(n),$$

a ta z kolei jest homotopijna z pętlą

$$\lambda_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-2}+k_{n-1}+k_n, 0, 0)} \in \Omega_{\text{alg}}U(n).$$

Powtarzając tę operację otrzymujemy ostatecznie, że pętla

$$\lambda_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n)}$$

jest homotopijna przez pętle algebraiczne na $U(n)$ z

$$\lambda_{(\sum_i k_i, 0, \dots, 0)}.$$

Stożek wyznacznika $\lambda_{(k, 0, \dots, 0)}$ jest równy k , więc rzeczywiście $\Omega_{\text{alg}}U(n)$ ma \mathbb{Z} składowych spójności. □

Zauważmy jeszcze, że wyznacznik każdej pętli $S^1 \rightarrow SU(n)$ ma stopień równy 0, bo $\det A = 1$ dla $A \in SU(n)$. Dostajemy następujący

Wniosek 2.9. $\Omega_{\text{alg}}SU(n) = \bigcup_{\sum_i k_i=0} \mathbb{Q}_{\underline{k}}$.

Przestrzeń $\Omega_{\text{alg}}U(n)$ wkłada się w grassmannian $G(H) = \bigcup_m G(H_{-m}/H_m) = \bigcup_m G(\mathbb{C}^{2mn})$. Jeśli $V \in X_m$, to $V/H_m \in G(\mathbb{C}^{2mn})$. Pokazaliśmy też, że dla $V \in \mathbb{Q}_{\underline{k}}$ istnieją wektory v_1, \dots, v_n takie, że

- $V = \text{lin}\{z^i v_j \mid i \geq 0\}$
- $v_i = e_i z^{k_i} + (\text{wyrazy równe } e_j z^p \text{ i } p > k_i \text{ lub równe } e_j z^{k_i} \text{ i } j < i)$

Zatem

$$\dim(V/H_m) = \sum_i (m - k_i) = mn - \sum_i k_i,$$

$$\dim(H_{-m}/V) = \dim H_{-m}/H_m - \dim V/H_m = 2mn - (mn - \sum_i k_i) = mn + \sum_i k_i.$$

Tym sposobem dostajemy inną charakteryzację podziału $\Omega_{\text{alg}}U(n)$ na spójne składowe: $V \in X_m$ należy do p -tej spójnej składowej $\Omega_{\text{alg}}U(n)$, jeśli

$$\frac{1}{2}(\dim(H_{-m}/V) - \dim(V/H_m)) = p.$$

Stąd $V \in X_m$ należy do $\Omega_{\text{alg}}SU(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(V/H_m) = \dim(H_{-m}/V)$. Zatem pętle $\Omega_{\text{alg}}^m SU(n)$ wkładają się w grassmannian $G(mn, 2mn)$, natomiast $\Omega_{\text{alg}}SU(n)$ wkłada się w $\lim_{m \rightarrow \infty} G(mn, 2mn) = BU$.

Rozdział 3

Izomorfizm grup $H_d(\Omega SU(n))$ i $H_d(\Omega_{alg} SU(n))$

Celem tego rozdziału jest opisanie izomorfizmu między $H_d(\Omega SU(n))$ a $H_d(\Omega_{alg} SU(n))$ dla wszystkich d . Najpierw pokażemy izomorfizm w gradacjach mniejszych od $2n$, potem we wszystkich gradacjach. Ponieważ dla każdego d obie grupy homologii są wolne o skończonej liczbie generatorów, więc wystarczy pokazać równość rang tych grup, lub równoważnie wskazać bijekcję między generatorami.

3.1. Izomorfizm grup homologii pętli algebraicznych i gładkich w gradacjach mniejszych niż $2n$

Przeprowadzimy najpierw dowód izomorfizmu $H_d(\Omega SU(n))$ i $H_d(\Omega_{alg} SU(n))$ dla $d < 2n$. Te wymiary są szczególnie ważne, bo mamy izomorfizm $H_d(\Omega_{alg} SU(n)) \cong H_d(\Omega SU(n))$ dla $d < 2n$. Dodatkowo, jak zobaczymy, izomorfizm ten jest ciekawszy niż w ogólnym przypadku.

Niech

$$I = \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_i k_i = 0\}$$

oraz

$$\bar{I} = \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_i k_i = 0, k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n\}.$$

Przypomnijmy, że (Wniosek 2.9):

$$\Omega_{alg} SU(n) = \bigcup_{\underline{k} \in I} Q_{\underline{k}}$$

oraz (Stwierdzenie 2.7):

$$\dim(Q_{\underline{k}}) = \sum_{i < j} |k_i - k_j| - v(\underline{k}).$$

Wszystkie ciągi ze zbioru I możemy uzyskać permutując wyrazy ciągów z \bar{I} . Z kolei ciągi z \bar{I} możemy uzyskać z ciągu samych zer poprzez ciąg tzw. elementarnych operacji. Ciąg $\underline{k}' \in \bar{I}$ powstaje z ciągu $\underline{k} \in \bar{I}$ poprzez elementarną operację, jeśli istnieją liczby $0 \leq p < q \leq n$ takie, że

$$k'_p = k_p + 1, \quad k'_q = k_q - 1,$$

$$k'_i = k_i \text{ dla } i \neq p, q.$$

Stwierdzenie 3.1. Jeśli ciąg $\underline{k}' \in \bar{I}$ powstał z ciągu $\underline{k} \in \bar{I}$ przez zwiększenie wyrazu k_p o 1 i zmniejszenie wyrazu k_q o 1 ($p < q$), to

$$\dim(Q_{\underline{k}'}) = \dim(Q_{\underline{k}}) + 2(q - p).$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \dim(Q_{\underline{k}'}) &= \sum_{i < j} (k'_i - k'_j) = k'_p - k'_q + \sum_{i \neq p, j \neq q} (k'_i - k'_j) + \sum_{j > p, j \neq q} (k'_p - k'_j) + \\ &\quad \sum_{i < p,} (k'_i - k'_p) + \sum_{i < q, i \neq p} (k'_i - k'_q) + \sum_{j > q} (k'_q - k'_j) = \\ &\quad k_p + 1 - (k_q - 1) + \sum_{i \neq p, j \neq q} (k_i - k_j) + \sum_{j > p, j \neq q} (k_p + 1 - k_j) + \\ &\quad \sum_{i < p,} (k_i - k_p - 1) + \sum_{i < q, i \neq p} (k_i - k_q + 1) + \sum_{j > q} (k_q - 1 - k_j) = \\ &\quad (k_p - k_q + 2) + \sum_{i \neq p, j \neq q} (k_i - k_j) + \left(\sum_{j > p, j \neq q} (k_p - k_j) \right) + (n - p - 1) + \\ &\quad \left(\sum_{i < p,} (k_i - k_p) \right) + (-p + 1) + \left(\sum_{i < q, i \neq p} (k_i - k_q) \right) + (q - 2) + \\ &\quad \left(\sum_{j > q} (k_q - k_j) \right) + (-n + q) = \left(\sum_{i < j} (k_i - k_j) \right) + 2(q - p) = \\ &\quad \dim(Q_{\underline{k}}) + 2(q - p) \end{aligned}$$

□

Stwierdzenie 3.2. Jeśli komórka $Q_{\underline{k}}$ ma wymiar zespolony nie większy niż n , to w ciągu \underline{k} występują tylko liczby ± 1 i 0.

Dowód. Najmniejszy wymiar komórki $Q_{\underline{l}}$, gdzie $\underline{l} \in I$ jest permutacją $\underline{k} \in \bar{I}$, uzyskamy, jeśli \underline{l} będzie odwróconym ciągiem \underline{k} (wtedy dostaniemy największą liczbę par $i < j$ takich, że $l_i < l_j$). Weźmy ciąg uporządkowany nierosnąco $\underline{k} \in \bar{I}$ i niech $\underline{l} \in I$ będzie odwróconym ciągiem \underline{k} . Niech $\underline{k}' \in \bar{I}$ będzie ciągiem \underline{k} po zastosowaniu elementarnej operacji do jakiejś pary (p, q) , $p < q$, a ciąg \underline{l}' będzie odwróconym ciągiem \underline{k}' . Niech $d = q - p$. Wiemy, że

$$\dim(Q_{\underline{l}'}) = \sum_{i < j} |l'_i - l'_j| - v(\underline{l}'),$$

przy czym

$$\sum_{i < j} |l'_i - l'_j| = \sum_{i < j} |k'_i - k'_j| = \sum_{i < j} |k_i - k_j| + 2d.$$

Skoro $v(\underline{l}')$ jest liczbą par $i < j$ takich, że $l'_i < l'_j$, to w porównaniu do $v(\underline{l})$ mogło się zwiększyć o najwyżej $d + (d - 1) = 2d - 1$, bo ewentualne dodatkowe pary to (p, j) , gdzie $j \leq q$ oraz (i, q) , gdzie $i \geq p$. Czyli

$$v(\underline{l}') \leq v(\underline{l}) + 2d - 1.$$

Ostatecznie dostajemy

$$\begin{aligned} \dim(Q_{l'}) &= \sum_{i < j} |l'_i - l'_j| - v(l') = \sum_{i < j} |k_i - k_j| + 2d - v(l') \geq \\ & \sum_{i < j} |k_i - k_j| - v(l) + 2d - (2d - 1) = \\ & \sum_{i < j} |k_i - k_j| - v(l) + 1 = \dim(Q_l) + 1. \end{aligned}$$

Czyli stosując jedną elementarną operację zwiększamy co najmniej o 1 najmniejszy wymiar komórki, który można uzyskać z powstałego ciągu po ewentualnej permutacji.

Wystarczy teraz tylko zauważyć, że wszystkie ciągi, w których występuje wyraz większy niż 1, powstają z ciągu $(2, 0, \dots, 0, -1, -1)$ po zastosowaniu najpierw pewnej ilości elementarnych operacji, a potem permutacji. Zaś dla ciągu $\underline{k} = (-1, -1, 0, \dots, 0, 2)$ wymiar $Q_{\underline{k}}$ jest równy $n + 1$. To kończy dowód stwierdzenia. \square

Zbadamy teraz wymiary komórek indeksowanych ciągami złożonymi z liczb $\{-1, 0, 1\}$ i takimi, że wszystkie jedynki są w ciągu na prawo od minus jedynek. Okazuje się później, że w dowodzie izomorfizmu grup homologii wystarczy rozważać tylko takie ciągi.

Stwierdzenie 3.3. *Dla ciągu*

$$\underline{k} = (\underbrace{-1, \dots, -1}_m, 0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_m)$$

komórka $Q_{\underline{k}}$ ma wymiar m^2 .

Stwierdzenie 3.4. *Niech*

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m \geq 0, \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_m \geq 0,$$

oraz $a_1 + b_1 \leq n - 2m$. Jeśli ciąg $\underline{k}' \in I$ powstał z ciągu

$$\underline{k} = (\underbrace{-1 \dots -1}_m 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_m)$$

przez przesunięcie wyrazu -1 z miejsca $(m - i + 1)$ o b_i wyrazów w prawo, a wyrazu 1 z miejsca $(n - m + i)$ o a_i wyrazów w lewo ($i = 1, \dots, m$), to komórka $Q_{\underline{k}'}$ ma wymiar równy $m^2 + \sum_i a_i + \sum_i b_i$.

Dowód. Oba stwierdzenia wynikają ze Stwierdzenia 2.7. Założenie $a_1 + b_1 \leq n - 2m$ gwarantuje, że w ciągu \underline{k}' wszystkie wyrazy równe -1 będą na lewo od wszystkich 1 . \square

Twierdzenie 3.5. *Istnieje izomorfizm*

$$H_{2d}(\Omega_{alg}SU(n)) \cong H_{2d}(\Omega SU(n))$$

dla $d < n$.

Dowód. Pokazaliśmy w poprzednim rozdziale podział $\Omega_{alg}SU(n)$ na komórki o parzystych rzeczywistych wymiarach. Zatem grupa homologii $H_d(\Omega_{alg}SU(n))$ jest równa 0 dla nieparzystych d , a dla parzystych jest grupą wolną z liczbą generatorów równą liczbie komórek wymiaru rzeczywistego d .

Z kolei $H_{2d}(\Omega SU(n))$ jest grupą wolną o liczbie generatorów równej liczbie diagramów Younga o d kropkach i kolumnach nie dłuższych niż $(n - 1)$. Skoro jednak zakładamy, że $d < n$, to znaczy, że to dodatkowe ograniczenie na długość kolumn jest niepotrzebne.

Szukamy więc bijekcji między diagramami Younga o d kropkach a komórkami $Q_{\underline{k}}$ wymiaru (zespolonego) d .

Weźmy dowolny diagram Younga X z d kropkami, $d < n$ (X odpowiada generatorowi grupy wolnej $H_{2d}(\Omega SU(n))$). Niech m będzie największą liczbą taką, że kwadrat $m \times m$ zawiera się w X . Diagramowi X możemy przypisać dwa nierosnące ciągi liczb $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$, gdzie $(a_i + m)$ jest równa liczbie kropek w i -tej kolumnie X , a $(b_i + m)$ jest równa liczbie kropek w i -tym wierszu X . Przykładowo dla poniższego diagramu dostajemy $m = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 0$. Kwadrat 3×3 wyróżniony jest za pomocą gwiazdek.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \star & \star & \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \star & \star & \star & \bullet & \bullet & & \\
 \star & \star & \star & & & & \\
 \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\
 \bullet & & & & & &
 \end{array} \tag{3.1}$$

Diagramowi X przyporządkowujemy ciąg $\underline{k} \in I$, który składa się z m jedynek, m minus jedynek i $(n - 2m)$ zer, przy czym

$$k_i = \begin{cases} -1 & \text{dla } i = m - j + 1 + b_j, j = 1, \dots, m \\ 1 & \text{dla } i = n - m + j - a_j, j = 1, \dots, m \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Innymi słowy, żeby uzyskać ciąg \underline{k} , w ciągu

$$\underbrace{(-1 \dots -1)}_m \underbrace{0 \dots 0}_{n-2m} \underbrace{1 \dots 1}_m$$

przesuwamy i -tą jedynekę (od lewej) o a_i w lewo, a i -tą minus jedynekę (od prawej) o b_i w prawo. Na przykład dla komórki (3.1) i $n = 15$ dostajemy ciąg

$$(-1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$$

Zgodnie ze Stwierdzeniem 3.4 wymiar komórki $Q_{\underline{k}}$ jest równy $(m^2 + \sum_i a_i + \sum_i b_i) = d$.

Opisane odwzorowanie jest oczywiście różnowartościowe, bo z różnych diagramów dostajemy różne ciągi. Trzeba jeszcze udowodnić, że jest „na”. Weźmy dowolną komórkę $Q_{\underline{k}}$ wymiaru d . Ponieważ $d < n$, więc zgodnie ze Stwierdzeniem 3.2 w ciągu \underline{k} występują tylko liczby ± 1 i 0. Załóżmy, że liczba wystąpień 1 w ciągu \underline{k} jest równa m . Wtedy ciąg ten powstaje z ciągu

$$\underline{k}' = \underbrace{(-1, \dots, -1)}_m, 0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_m$$

przez zastosowanie dokładnie $(d - m^2)$ transpozycji sąsiednich elementów k'_i, k'_{i+1} takich, że $k'_i < k'_{i+1}$. Mamy, że $d - m^2 \leq n - 1 - m^2 \leq n - 2m$ (bo $0 \leq (m - 1)^2$), zatem po zastosowaniu transpozycji wszystkie minus jedynki będą nadal po lewej stronie wszystkich jedynek. Dostaliśmy więc ciąg opisany w Stwierdzeniu 3.4 i oczywiście istnieje dla niego odpowiedni diagram Younga. Zatem opisane przekształcenie rzeczywiście jest bijekcją. □

Jeśli komórka $Q_{\underline{k}}$ ma wymiar zespolony mniejszy od n , to w ciągu \underline{k} występują tylko liczby $\{-1, 0, 1\}$. Zatem $Q_{\underline{k}} \subset \Omega_{alg}^1 SU(n)$. Czyli addytywne generatory $H_d(\Omega_{alg}^1 SU(n))$ dla $d < 2n$ pochodzą od generatorów $H_d(\Omega_{alg}^1 SU(n))$. Wiemy również, że $\Omega_{alg}^1 SU(n)$ wkłada się w grassmanian $G(n, 2n)$, który z kolei jest podkompleksem w przestrzeni klasyfikującej BU . Generatory grupy wolnej $H_{2d}(G(n, 2n))$ to diagramy Younga o d kropkach, w których kolumny mają nie więcej niż n kropek, a wiersze nie więcej niż $2n - n = n$ kropek. Dla $d < n$ ograniczenia na długości wierszy i kolumn nie są już potrzebne, to znaczy rozpatrujemy wtedy wszystkie diagramy Younga o d kropkach. Ostatecznie dostajemy, że dla $d < 2n$ izomorficzne są grupy:

$$H_d(\Omega SU(n)) \cong H_d(\Omega_{alg} SU(n)) \cong H_d(\Omega_{alg}^1 SU(n)) \cong H_d(G(n, 2n)) \cong H_d(BU).$$

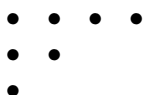
3.2. Izomorfizm grup homologii pętli algebraicznych i gładkich we wszystkich gradacjach

Dowodu Twierdzenia 3.5 z poprzedniego rozdziału prawdopodobnie nie da się łatwo uogólnić na wyższe gradacje. Można natomiast dowieść tego twierdzenia dla wszystkich gradacji w inny sposób, mianowicie pokazując bijekcję między diagramami Younga odpowiadającymi generatorom grup $H_d(\Omega SU(n))$ a diagramami pojawiającymi się przy wypisywaniu macierzy dla komórki $Q_{\underline{k}}$. Przykładowo dla komórki $Q_{(-1,0,2,-1)}$ dostajemy macierz:

z^2				z^1				z^0				z^{-1}			
e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4
0	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	•	•	1
0	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	1			
0	0	0	0	0	0	•	0	0	1						
0	0	1													

(3.2)

Odpowiadający jej diagram Younga powstaje przez ułożenie wierszy kropek z macierzy:



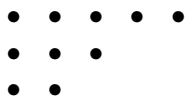
Wiemy, że addytywne generatory grupy $H_{2k}(\Omega SU(n))$ są w bijekcji z diagramami o k kropkach, w których kolumny są krótsze niż n .

Komórka $Q_{\underline{k}}$ odpowiada generatorowi $H_{2k}(\Omega_{alg} SU(n))$, jeśli jest wymiaru zespolonego k , czyli jeśli w jej diagramie Younga jest k kropek. Widać też z konstrukcji diagramu z macierzy, że kolumny diagramu nie mogą mieć więcej niż $n - 1$ kropek. Zatem diagramy tworzone z komórek $Q_{\underline{k}}$ są podzbiorem tych odpowiadających generatorom $H_{2k}(\Omega SU(n))$. Wystarczy tylko pokazać, że każdemu generatorowi $H_{2k}(\Omega SU(n))$ odpowiada dokładnie jedna komórka $Q_{\underline{k}}$. Równoważnie, każdy diagram Younga o k kropkach i kolumnach krótszych niż n jest realizowany jako diagram dokładnie jednej komórki $Q_{\underline{k}}$. Nie jest bowiem jasne, czy każdy diagram odpowiada jakiejś komórce w $\Omega_{alg} SU(n)$ i czy dwie komórki nie mogą mieć identycznych diagramów.

Opiszemy teraz algorytm tworzenia macierzy (takiej jak 3.2) z diagramu Younga.

Najpierw przypomnimy sposób tworzenia macierzy na podstawie ciągu $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$, ponieważ na tym będzie oparty ten algorytm. Niech $\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$. Dla k_i wpisujemy 1 w kolumnie $e_i z^{k_i}$, w i -tym wierszu. Na lewo od tego pola co n kolumn wpisujemy zera. W kolumnie z jedynek pozostałe pola również wypełniamy zerami. Po przejściu przez tę procedurę dla wszystkich k_i , puste pola na lewo od jedynek wypełniamy kropkami. W ten sposób dostajemy diagram Younga. Żeby miał „legalny” kształt, trzeba odpowiednio zmienić kolejność wierszy.

Odwrócenie tej procedury da nam algorytm zmieniania diagramu Younga w macierz. Zaczynamy od napisania w górnym wierszu jedynek. Co n kolumn na lewo od jedynek wpisujemy zera (w całej kolumnie). Następnie w kolejne wolne pola po lewej od jedynek wpisujemy kropki z diagramu Younga, które są w kolumnach o długości 1 (czyli te kropki pierwszego rzędu, pod którymi nie ma kropek z drugiego rzędu). Przykładowo dla diagramu



macierz po opisanych dwóch początkowych krokach wygląda tak:

...		0				0		•	•	1
...		0				0				
...		0				0				
...		0				0				

W następnym kroku wpisujemy jedynekę w drugim wierszu macierzy w pierwszej wolnej kolumnie na lewo od ostatniej wpisanej kropki. Analogicznie jak w pierwszym kroku dopisujemy zera co n kolumn w lewo oraz nad wpisaną jedyneką. Następnie wpisujemy w macierz kolumny diagramu Younga o długości 2. Nasza przykładowa macierz powinna wyglądać tak:

...		0	0		•	0	0	•	•	1
...		0	0		•	0	1			
...		0	0			0				
...		0	0			0				

Powtarzamy kolejno tą procedurę, czyli wpisujemy jedynekę w odpowiednim miejscu w i -tym wierszu oraz te kolumny diagramu Younga, które mają długość i . Dostajemy ostatecznie macierz

...	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	•	•	1
...	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	0	•	0	1			
...	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	1						
...	0	1																	

Trzeba jeszcze ustalić jej dokładne położenie, to znaczy w jakiej kolumnie $e_{j_i} z^{k_i}$ leży jedynka w i -tym wierszu. Załóżmy, że ostatnia (skrajnie lewa) jedynka jest w kolumnie $e_{j_n} z^{k_n}$ i k_n jest ustalone. Indeks j_n może być równy $1, 2, \dots, n$. Ponieważ suma $\sum_i k_i$ ma być równa 0, więc ustalając j_n równanie $\sum_i k_i = 0$ zamienia się w równanie z jedną niewiadomą k_n : $k_n + l = 0$ (l zależy właśnie od wyboru j_n).

W naszym przykładzie mamy 4 możliwości wyboru j_4 i 4 równania:

$$j_4 = 1$$

z^{k_4}				z^{k_3}				z^{k_2}				z^{k_1}	
e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2
0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	•	•	1
0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	1			
0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	1		
1	0	0	0										

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = (k_4 - 4) + (k_4 - 3) + (k_4 - 2) + k_4 = 4k_4 - 9 = 0$$

$$j_4 = 2$$

z^{k_4}												z^{k_3}				z^{k_2}				z^{k_1}		
e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3
0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	•	•	1
0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	0	•	0	1							
0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	1										
0	1	0	0	0																		

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = (k_4 - 4) + (k_4 - 3) + (k_4 - 3) + k_4 = 4k_4 - 10 = 0$$

$$j_4 = 3$$

z^{k_4}												z^{k_3}				z^{k_2}				z^{k_1}			
e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4
0	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	•	•	1				
0	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	0	•	0	1							
0	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	1										
0	0	1	0	0	0																		

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = (k_4 - 4) + (k_4 - 4) + (k_4 - 3) + k_4 = 4k_4 - 11 = 0$$

$$j_4 = 4$$

z^{k_4}												z^{k_3}				z^{k_2}				z^{k_1}
e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1
0	0	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	•	•	1
0	0	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	0	•	0	1			
0	0	0	0	0	0	0	•	0	0	0	•	0	0	1						
0	0	0	1	0	0	0														

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = (k_4 - 5) + (k_4 - 4) + (k_4 - 3) + k_4 = 4k_4 - 12 = 0$$

Przy wpisywaniu jedynek do macierzy, wpisywaliśmy zera we wszystkie kolumny leżące o wielokrotność n na lewo od jedynki. Zatem jeśli przez l_i oznaczymy odległość i -tej od lewej strony jedynki od tej skrajnie lewej, to żadne dwa l_i, l_j nie będą przystawały do siebie modulo n . Niech l'_i będzie resztą z dzielenia l_i przez n . Uzasadniliśmy właśnie, że $\{l'_1, l'_2, \dots, l'_n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$, tzn. że każda reszta jest przyjmowana dokładnie raz. Równoważnie, i -ta jedynka leży w kolumnie $e_{j_i} z^{k_i}$ i indeksy j_i są różne. Przy przesuwaniu skrajnie lewej jedynki w prawo (to znaczy zamianie e_j na e_{j+1}) ta własność jest oczywiście zachowywana. Zatem każde przesunięcie skrajnie lewej jedynki w prawo powoduje zmniejszenie dokładnie jednego wskaźnika k_i , czyli zmniejszenie sumy $\sum_i k_i$ o dokładnie 1 (bo dokładnie jedna jedynka przechodzi z kolumny $e_n z^{k_i}$ do kolumny $e_1 z^{k_i-1}$).

Dostaliśmy więc, że tylko jedno ułożenie daje równanie $nk_n + l = 0$ takie, że l dzieli się przez n . Tylko to ułożenie odpowiada jakiejś komórce $Q_{\underline{k}} \subset \Omega_{alg} SU(n)$. To kończy dowód. \square

Na koniec udowodnimy jeszcze, że oba opisane w tym rozdziale izomorfizmy

$$H_d(\Omega SU(n)) \cong H_d(\Omega_{alg} SU(n))$$

pokrywają się dla $d < 2n$. Wystarczy pokazać, że dla danego ciągu \underline{k} o postaci opisanej w Stwierdzeniu 3.4 (czyli złożonego z wyrazów równych $-1, 0, 1$, przy czym wszystkie jedynki są na prawo od minus jedynek) rysując macierz dla komórki $Q_{\underline{k}}$ dostaniemy diagram Younga opisany w dowodzie Twierdzenia 3.5.

Niech więc ciąg \underline{k} będzie ciągiem długości n , w którym jest m jedynek, m minus jedynek, a reszta wyrazów jest równa 0 i niech wszystkie jedynki będą w \underline{k} na prawo od minus jedynek. Niech a_1, \dots, a_m i b_1, \dots, b_m będą liczbami takimi, że i -ta jedynka od lewej jest na pozycji $n - m + j - a_j$, a i -ta minus jedynka od prawej jest na pozycji $m - j + 1 + b_j$. Innymi słowy, w ciągu

$$\underline{k} = (\underbrace{-1, \dots, -1}_m, 0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_m)$$

przesuwamy i -tą jedynkę od lewej o a_i w lewo, a i -tą minus jedynkę od prawej o b_i w prawo. Widać, że ciąg \underline{k} można scharakteryzować jeszcze inaczej, mianowicie i -ta jedynka od lewej ma na prawo od siebie dokładnie a_i zer, a i -ta minus jedynka od prawej ma na lewo od siebie dokładnie b_i zer.

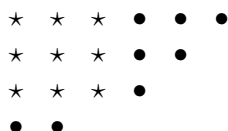
Postępujemy teraz zgodnie z opisanym wcześniej algorytmem, czyli wpisujemy jedynkę w kolumnę $z^l e_j$, jeśli $k_j = l$ ($l \in \{-1, 0, 1\}$), później dopełniamy macierz zerami i kropkami. Przyjrzyjmy się bliżej kolumnom $z^{-1} e_j$. Załóżmy, że $k_{j_0} = -1$. W kolumnie $z^{-1} e_{j_0}$ mamy wpisaną jedynkę. W tym samym wierszu na lewo od jedynki kropki będą dokładnie w tych kolumnach $z^{-1} e_j$, w których nie wpisaliśmy jedynki, czyli dla takich j , że $k_j = 0$ (k_j nie może być równe 1, bo jedynki są na prawo od minus jedynek). Innymi słowy, na lewo od jedynki jest w kolumnach $z^{-1} e_j$ dokładnie tyle kropek, ile w ciągu \underline{k} zer na lewo od j_0 . Ale, jak wiemy, jeśli $k_{j_0} = -1$, to na lewo od j_0 jest dokładnie b_{j_0} zer. Zatem w kolumnach $z^{-1} e_j$ stworzymy część diagramu Younga na prawo od kwadratu $m \times m$ i i -ty wiersz od góry będzie miał dokładnie $m + b_i$ kropek.

W podobny sposób analizujemy część macierzy złożoną z kolumn $z^0 e_j$. Jedynki pojawiają się tam dla tych j , dla których $k_j = 0$. Natomiast kropki wpisujemy do tych kolumn $z^0 e_j$, dla których $k_j = 1$. Pozostałe pola są albo puste, bo znajdują się na prawo od jedynki w swoim wierszu, albo wpisujemy w nim 0, bo w $z^{-1} e_j$ jest jedynka. Dodatkowo jeśli $k_{j_0} = 1$, to w kolumnie $z^0 e_{j_0}$ będzie $m + a_{j_0}$ kropek, bo w ciągu \underline{k} na prawo od j_0 jest a_{j_0} zer.

Poniżej przedstawiono przykład dla ciągu $\underline{k} = (0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 1, 0, 1)$. Macierz dla tego ciągu wygląda tak (żeby nie zaciemniać obrazka, nie wpisano w nią zer i pominięto kolumny $z^1 e_j$):

z^0											z^{-1}											
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	
							*	*	*		•		•		•	1						
							*	*	*		•		•	1								
							*	*	*		•	1										
1																						
		1																				
			1																			
				1																		
					1																	
						1																
							•	•	1													
0	-1	0	-1	0	-1	0	1	1	0	1	0	-1	0	-1	0	-1	0	1	1	0	1	

Uzyskujemy z niej diagram Younga identyczny z tym skonstruowanym na podstawie dowodu Twierdzenia 3.5.



Rozdział 4

Homotopijna równoważność $\Omega SU(n)$ i $\Omega_{alg} SU(n)$

W poprzednim rozdziale udowodniliśmy, że grupy homologii przestrzeni $\Omega SU(n)$ i $\Omega_{alg} SU(n)$ są izomorficzne w każdej gradacji. Co więcej, w nieparzystych gradacjach grupy te znikają, a w parzystych są grupami wolnymi o skończonej liczbie generatorów. Jednak ten izomorfizm nie był indukowany przez żadne przekształcenie.

W tym rozdziale pokażemy, że włożenie pętli algebraicznych w pętle gładkie indukuje izomorfizm pierścieni homologii. Z tego wywnioskujemy homotopijną równoważność obu przestrzeni.

Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 4.1 (Whitehead). *Jeśli X i Y są jednospójnymi CW-kompleksami i przekształcenie $f: X \rightarrow Y$ indukuje izomorfizm $f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ dla każdego k , to f jest homotopijną równoważnością.*

Dowód można znaleźć m.in. w książce Hatchera [Hatcher] (Wniosek 4.33).

Dla rozważanych w pracy przestrzeni pętli naturalnym wyborem odwzorowania będzie włożenie $\Omega_{alg} SU(n) \hookrightarrow \Omega SU(n)$. Obie przestrzenie są jednospójne: $\Omega_{alg} SU(n)$ nie ma komórek nieparzystego wymiaru, natomiast dla $\Omega SU(n)$ mamy rozwłóknienie

$$\Omega SU(n) \longrightarrow \Omega SU(n+1) \longrightarrow \Omega S^{2n-1},$$

które implikuje ciąg dokładny

$$\pi_1(\Omega SU(n)) \rightarrow \pi_1(SU(n+1)) \rightarrow \pi_1(\Omega S^{2n-1}).$$

Ponieważ $SU(1)$ jest punktem, więc $\pi_1(\Omega SU(1)) = 0$ i przez indukcję dostajemy, że $\pi_1(SU(n)) = 0$ dla każdego n .

Włożenie $\Omega_{alg} SU(n) \hookrightarrow \Omega SU(n)$ indukuje homomorfizm grup $H_k(\Omega_{alg} SU(n))$ i $H_k(\Omega SU(n))$ dla wszystkich k , ale również ogólniej homomorfizm pierścieni $H_*(\Omega_{alg} SU(n))$ i $H_*(\Omega SU(n))$. Gdyby udało się udowodnić, że ten homomorfizm jest epimorfizmem lub monomorfizmem, to razem z wynikiem z poprzedniego rozdziału implikowałoby to izomorfizm.

4.1. Rozmaitość generująca

Opiszemy teraz (bez dowodów) wynik Botta z pracy [Bott58].

Niech G będzie zwartą spójną grupą Liego. Przez $(\Omega G)_0$ rozumiemy składową spójności jedynek w przestrzeni ΩG (zauważmy, że ponieważ ΩG jest grupą, więc wszystkie składowe spójności muszą

być dyfeomorficzne z $(\Omega G)_0$). Niech $s: S^1 \rightarrow G$ będzie homomorfizmem. Przez G_s oznaczamy centralizator obrazu s w G , natomiast przez G^s grupę warstw lewostronnych G/G_s .

Rozważmy przekształcenie z G w grupę pętli ΩG :

$$x \mapsto xs(z)x^{-1}s(z)^{-1}, (x \in G, z \in S^1)$$

Jeśli $hg \in hG_s$ (tzn $g \in G_s$), to $hgs(z)g^{-1}h^{-1}s(z)^{-1} = hs(z)h^{-1}s(z)^{-1}$, więc przekształcenie to jest stałe na każdej warstwie G_s . Dodatkowo prowadzi ono w składową spójności jedynek ΩG . Mamy więc dobrze określone przekształcenie:

$$g^s: G^s \rightarrow (\Omega G)_0.$$

Niech teraz T będzie maksymalnym torusem w G zawierającym s , W grupą Weyla, Σ zbiorem pierwiastków G . Niech Λ_s będzie modułem w $H_1(T)$ generowanym przez s i wszystkie transformacje s względem W .

Definicja 4.2 ([Bott58], Definicja 1.1). *Homomorfizm $s: S^1 \rightarrow G$ nazywamy okręgiem generującym, jeśli dla każdego pierwiastka $\theta \in \Sigma$ istnieje $x_\theta \in \Lambda_s$ taki, że $\theta(x_\theta) = 1$. Grupę G^s nazywamy wtedy rozmaiłością generującą.*

Poniższe twierdzenie wyjaśnia nazewnictwo użyte w tej definicji:

Twierdzenie 4.3 ([Bott58], Twierdzenie 1). *Jeśli s jest okręgiem generującym dla G , to obraz przekształcenia*

$$g_*^s: H_*(G^s) \rightarrow H_*((\Omega G)_0)$$

generuje cały pierścień $H_((\Omega G)_0)$.*

Twierdzenie 4.4 ([Bott58], Twierdzenie 2). *Dla każdej zwartej grupy Liego z trywialnym centrum istnieje okrąg generujący.*

Jeśli Z jest centrum grupy G , to mamy nakrycie $G \rightarrow G/Z$. Pętle ściągające w G/Z podnoszą się do pętli ściągających w G , więc $(\Omega G)_0 = (\Omega G/Z)_0$. Możemy więc mówić również o okręgach i rozmaiłościach generujących dla grup z nietrywialnym centrum.

Przestrzeń $\Omega SU(n)$ jest spójna, więc $(\Omega SU(n))_0 = \Omega SU(n)$. Zatem obraz indukowanego przekształcenia z rozmaiłości generującej w $\Omega SU(n)$ generuje pierścień $H_*(\Omega SU(n))$.

W swojej pracy (pod koniec piątego rozdziału) Bott podaje też przykłady okręgów i rozmaiłości generujących dla niektórych klasycznych grup. W szczególności dla $SU(n+m)$ okręgiem generującym jest przekształcenie

$$S^1 \ni z \mapsto \left(\begin{array}{c|c} z^n I_m & 0 \\ \hline 0 & z^{-m} I_n \end{array} \right)$$

gdzie

$$x I_n = \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix}$$

Odpowiadające im rozmaiłości generujące to grassmanniany $G(m, n+m)$.

W szczególności dla $m = 1$ dostajemy okrąg generujący

$$S^1 \ni z \mapsto \left(\begin{array}{c|c} z^n & 0 \\ \hline 0 & z^{-1} \\ & \ddots \\ & z^{-1} \end{array} \right) \quad (4.1)$$

i rozmaitość generująca $G(1, n+1)$ to przestrzeń rzutowa $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Jest to najwygodniejszy opis rozmaitości generującej dla $SU(n+1)$.

Przekształcenie $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \Omega SU(n)$ generujące pierścień homologii $H_*(\Omega SU(n+1))$ pojawia się również w innych pracach, m. in. w pracy Mitchella [Mitch] oraz książce Dyera [Dyer69], w której jest również dowód, że przekształcenie w istocie generuje pierścień homologii przestrzeni pętli. Dodatkowo, generatory $\nu_i \in H_*(\Omega SU(n))$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ są obrazami generatorów addytywnych $H_*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1})$. Praca Botta ma tę zaletę, że definiuje rozmaitość generującą dla szerszej klasy grup.

4.2. Homotopijna równoważność $\Omega SU(n)$ i $\Omega_{alg} SU(n)$

Rozważmy okrąg generujący $s: S^1 \rightarrow SU(n)$ opisany równaniem (4.1). Mamy przekształcenie z odpowiadającej mu rozmaitości generującej w przestrzeń pętli

$$f: \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \Omega SU(n)$$

oraz indukowane przekształcenie

$$f_*: H_*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow H_*(\Omega SU(n)),$$

którego obraz generuje cały pierścień $H_*(SU(n))$.

Oczywiście przekształcenie f prowadzi w pętle algebraiczne. Dostajemy więc indukowane przekształcenia

$$H_*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) \xrightarrow{f_*} H_*(\Omega_{alg} SU(n)) \xrightarrow{i_*} H_*(\Omega SU(n))$$

i obraz złożenia $i_* f_*$ generuje pierścień $H_*(\Omega SU(n))$. Zatem obraz pewnego podzbioru pierścienia $H_*(\Omega_{alg} SU(n))$ generuje pierścień $H_*(\Omega SU(n))$. Stąd wynika, że samo włożenie

$$\Omega_{alg} SU(n) \xrightarrow{i} \Omega SU(n)$$

indukuje epimorfizm

$$H_*(\Omega_{alg} SU(n)) \xrightarrow{i_*} H_*(\Omega SU(n)).$$

Ponieważ wiemy też, że grupy homologii obu przestrzeni są we wszystkich gradacjach izomorficznymi grupami wolnymi, więc i_* musi być izomorfizmem.

Wniosek 4.5. Włożenie $\Omega_{alg} SU(n) \hookrightarrow \Omega SU(n)$ jest homotopijną równoważnością.

Wniosek 4.6. Włożenie $\Omega_{alg} SU \hookrightarrow \Omega SU$ jest homotopijną równoważnością.

Bibliografia

- [Bott58] Raoul Bott, *The space of loops on a Lie group*, The Michigan Mathematical Journal Vol. 5, 1958, s. 35-61
- [Bott57] Raoul Bott, *The Stable Homotopy of the Classical Groups*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 43, No. 10, 1957, s. 933-935
- [Dyer69] Eldon Dyer *Cohomology theories*, Mathematics Lecture Note Series, New York 1969
- [Hatcher] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2002
- [Milnor56] John Milnor, *Construction of universal bundles, II*, Annals of Mathematics Vol. 63, No. 3, 1956, s. 430-436
- [Milnor59] John Milnor, *On Spaces Having the Homotopy Type of a CW-Complex*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 90, No. 2, 1959, s. 272-280
- [Mitch] Stephen A. Mitchell, *A Filtration of the Loops on $SU(n)$ by Schubert Varieties*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 193, 1986, s. 347-362
- [Press80] Andrew Pressley, *Decomposition of the space of loops on a Lie group*, Topology Vol. 19, Pergamon Press Ltd., 1980, s. 65-79
- [PressSeg] Andrew Pressley, Graeme Segal, *Loop groups*, Oxford University Press, New York 1988