SEMINARIUM TiGR - ZADANIA

1 Niech A bedzie algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym k. Wykazać, że spektrum maksymalne A jest równe $Hom_{Alg}(A,k)$. (Jeśli k nie jest algebraicznie domknięte, to z każdym punktem domknietym x jest związane tzw ciało rezidualne $k_x := A/m_x$ oraz morfizm $Spec(k_x) \to Spec(A)$. Ciało rezidualne k_x jest rozszerzeniem ciała k.)

2 [AB] Niech A bedzie algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym k. Za pomocą $f \in A$ zbudować funkcję $Spec(A) \to k$ tak, aby bazowy zbiór otwarty U_f był równy zbiorowi punktów, w których funkcja się nie zeruje. Ze względu na jaką topologię na k ta funkcja jest ciągła?

3 Niech $A \to B$ bedzie morfizmem algebr bad ciałem k. Wykazać, że indukowanie przekształcenie spektrów przekształca punkt domknięty na punkt domknięty. Podać przykład morfizmu pierścieni, takich że indukowany morfizm nie przeprowadza spektrum maksymalnego w spektrum maksymalne.

4 [SS] Niech $f : A \to B$ będzie monomorfizmem skończenie generowanych k-algebr, które są dziedzinami. Mówimy, że f jest biwymierną równoważnością, jeśli f indukuje izomorfizm ciał ułamków. Wykazać, że jeśli f jest biwymierną równoważnością, to istnieje taki otwarty niepusty zbiór $U \subset Spec(B)$ taki, że $f^* : U \to f^*(U)$ jest homeomorfizmem.

5 [SS] Niech $S_1 \subset S_2$ będą dwiema skończenie generowanymi półgrupami w $M = \mathbb{Z}^n$. Wykazać, że $Spec(\mathbb{C}[S_1]) \to Spec(\mathbb{C}[S_2])$ jest biwymierną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy grupy generowane przez S_1 i S_2 są równe.

6 [ACh] Wykazać, że każda afiniczna rozmaitość toryczna może być opisana w $\mathbb{C}^N$ przez układ składający się z równań postaci

$$Y_1^{a_1} Y_2^{a_2} \dots Y_N^{a_N} = Y_1^{b_1} Y_2^{b_2} \dots Y_N^{b_N} .$$

7 [MK] Niech będą dane dwa stożki wymierne $\sigma_1 \subset N_1$ i $\sigma_2 \subset N_2$. Wykazać, że $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2} = U_{\sigma_1 \times \sigma_2}$. Uwaga: czy ,,=" jest homeomorfizmem w topologi zariskiego? (W każdym razie jest homeomorfizmem w klasycznej topologii.)

---

8 [DP] Niech $X = U \cup V$ będzie przestrzenią topologiczną oraz niech U i V będą zbiorami otwartymi. Załóżmy, że U i V są przestrzeniami Hausdorffa oraz włożenie diagonalne $U \cap V \to U \times V$ jest domknięte. Wykazać, że X jest Hausdorffa.

9 [DP] Wykazać, że zespolone rozmaitości toryczne z klasyczną topologią są Hausdorffa.

10 Niech U_σ będzie afiniczną rozmaitością toryczną. Wykazać, że w U_σ jest dokładnie jedna domknięta orbita torusa. Jej wymiar zespolony jest równy kowymiarowi stożka.

11 Niech X_Σ będzie rozmaitością toryczną stowarzyszoną z wachlarzem Σ. Znaleźć bijekcję pomiędzy orbitami działania torusa a stożkami wachlarza.

12 [SK] Zdefiniujemy rozdmuchanie $\mathbb{C}^n$ w zerze: jako zbiór jest równe $(\mathbb{C}^n - \{0\}) \cup \mathbb{CP}^{n-1}$, jako rozmaitość algebraczna jest zdefiniowane wzorem

$$Bl_0\mathbb{C}^n = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), [y_1 : y_2 : \dots : y_n]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{CP}^{n-1} \mid \quad \forall_{i,j}\; x_i y_j = x_j y_i\} .$$

Sprawdzić, że standardowe działanie torusa na $\mathbb{C}^n$ podnosi się do działania na $Bl_0\mathbb{C}^n$. Znaleźć wachlarz Σ, dla którego $X_\Sigma = Bl_0\mathbb{C}^n$. Rozwiązywanie zadania rozpocząć od przypadku $n = 2$ i zrobić rysunek.

13 [WL] Powierzcnie Hirzebrucha: dana jest liczba całkowita n. Niech L_n będzie wiązką liniową na $\mathbb{CP}^1$ sklejoną z trywialnych wiązek na $\mathbb{C}$ i $\overline{\mathbb{C}} - \{0\} \simeq \mathbb{C}$ za pomocą relacji $(x,y) \sim (x^{-1}, x^n y)$. Przestrzeń wiązki L_n uzupełniamy ,,przekrojem w nieskończoności", tzn dodajemy w każdym włóknie po jednym punkcie uzwarcając je. Przekonać się, że otrzymujemy rozmaitość algebraiczną. Oznaczamy ją przez H_n. Sprawdzić, że standardowe działanie torusa na $(L_n)_{|\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$ przedłuża się do działania na H_n. Znaleźć wachlarz Σ, dla którego $X_\Sigma = H_n$.