Sprawdzian praktycznych umiejętności

1. Niech przestrzeń X będzie sumną otwarych zbiorów U i v. Niech F będzie snopem. Skonstruować długi ciąg dokładny

$$\to H^{k-1}(U \cap V, F) \to H^k(X, F) \to H^k(U, F) \oplus H^k(V, F) \to H^k(U \cap V, F) \to \dots$$

kohomologii Čecha.

2. Niech $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ będzie pokryciem X, a F snopem na X. Wykazać, że jeśli dla każdego ciągu $i_0, i_1, \dots, i_k$ kohomologie $H^n(U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_k, F) = 0$ dla $n > 0$, to kohomologie pokrycia $H^*(\mathfrak{U}, F)$ są izomorficzne z $H^*(X, F)$

Wskazówka
– Jeśli $\mathfrak{U}$ jest skończone, to skorzystać z pt. 1. i twierdzenia o pięciu izomorfizmach.
– Dla pokrycia nieskończonego rozmaitości można użyć ciąg spektralny dla bikompleksu $\check{C}^p(\mathfrak{U}, A^q)$, gdzie A^* jest snopem form różniczkowych.

3. Korzystając z 1. i 2. obliczyć kohomologie powierzchni zwartych ze wspólczynnikami $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_2$. W szczególności policzyć kohomologie S^2, $S^1 \times S^1$, $\mathbb{RP}^2$.

19 grudzień 2010