PRZESTRZENIE JEDNORODNE GRUPY GL_n
na palcach

1. Wykazać, że stosując następujące elementarne operacje: mnozenie kolumny przez skalar $\neq 0$ i dodawianie jednej kolumny do innej, położonej na prawo (przestawianie kolumn zabronione) można dowolną macierz doprowadzić do postaci „eszelonu":

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

w którym
– każda kolumna kończy się na 1 (a poniżej zera),
– wyrazy na prawo od każdej końcowej jedynki są równe 0.
Taka postać jest jednoznaczna

2. Wykazać, że $GL_n(k) = \bigsqcup B\pi B$, gdzie B jest grupą macierzy górnotrójkątnych, a suma przebiega macirze permutacji π.

3. Opisać orbity działania B na ilorazie $GL_n(k)/B$.

4. Wykazać, że orbita $B\pi B \subset GL_n(k)/B$ jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną $A^{l(\pi)}$. Obliczyć $l(\pi)$.

5. Utożsamić $GL_n(k)/B$ z przestrzenią flag $Fl(n)$, której elemantami są ciągi podprzestrzeni liniowych k^n

$$V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = k^n$$

$(\dim V_i = i)$.

6. Opisać wyszytkie podgrupy algebraiczne $P \subset GL_n(k)$ zawierające B.

7. Wykazać, że przestrzenie jednorodne postaci $GL_n(k)/P$ dla $P \supset B$ to częściowe przestrzenie flag $Fl(d_1, d_2, \ldots, d_m; n)$, której elemantami są ciągi podprzestrzeni liniowych k^n

$$V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_m \subset k^n$$

$(\dim V_i = d_i)$.

8*. Niech H będzie algebraiczną podgrupą $GL_n(\mathbf{C})$. Załóżmy, że iloraz $GL_n(\mathbf{C})/H$ jest zwartą przestrzenią topologiczną. Wykazać, że istnieje taki element $g \in GL_n(\mathbf{C})$, że $gHg^{-1} \subset B$.

9. Obliczyć z ilu punktów składa się przestrzeń pełnych flag $Fl(n)$ nad ciałem q–elementowym i znaleźć wzór na sumę długości permutacji należących do grupy Σ_n.

10. Na przestrzeni flag nad ciałem liczb zespolonych działa grupa unitarna $U(n)$. Przedstawić tę przestrzeń jako przestrzeń ilorazową grupy $U(n)$.

11. Wprowadźmy na przestrzeni k^{2n} antysymetryczną niezdegenerowaną formę dwuliniową zadaną przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Dla $i \leq n$ rozważmy podzbiór grassmannianu $Gr_i(k^{2n})$ składający się z i–wymiarowych przestrzeni izotropowych. Pokazać, że ten zbiór jest przestrzenią jednorodną dla pewnej grupy algebraicznej. Znaleźć wymiar.

12. Wprowadźmy na przestrzeni k^{2n} symetryczną niezdegenerowaną formę dwuliniową zadaną przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Dla $i \leq n$ rozważmy podzbiór grassmannianu $Gr_i(k^{2n})$ składający się z i–wymiarowych przestrzeni izotropowych. Pokazać, że ten zbiór jest przestrzenią jednorodną dla pewnej grupy algebraicznej. Znaleźć wymiar.

13. Czy odpowiedź w zadaniach 11 i 12 zależy od postaci niezdegenerowanej (anty)symetrycznej formy dwuliniowej?

14*. Niech G będzie topologiczną grupą Hausdorffa, a H podgrupą domkniętą. Wykazać, że topologia ilorazowa G/H jest Hausdorffa.