Topologia i Geometria Rozmaitości, seminarium 2011

Przykłady i zadania domowe.

1. Rozmaitości Hopfa. Niech $A = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ będzie zespolną macierzą diagonalną; zakładamy, że $|\alpha_i| < 1$.

   (a) Pokaż, że grupa cykliczna generowana przez A działa w sposób wolny i całkowicie nieciągły na $\mathbb{C}^r \setminus \{0\}$ i iloraz ma strukturę rozmaitości zespolonej, oznaczmy ją M.

   (b) Pokaż, że M jest diffeomorficzne z $S^1 \times S^{2r-1}$.

   (c) Policz kohomologie M.

   (d) Pokaż, że M nie jest rozmaitością Kählera.

   (e) Pokaż, że wiązka styczna do M jest sumą prostą wiązek liniowych.

   Dla ułatwienia można najpierw zrobić wersję tego zadania dla $r = 2$ czyli powierzchnie Hopfa.

2. Niech $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ będzie kratą rangi $2n$, to jest podgrupą addytywną izomorficzną z $\mathbb{Z}^{2n}$.

   (a) Pokaż, że iloraz $\mathbb{C}^n/\Lambda$ jest rozmaitością zespoloną diffeomorficzną z $(S^1)^{2n}$. Będziemy ją oznaczać T_Λ

   (b) Policz pierścień kohomologii De Rhama dla T_Λ.

   (c) Pokaż, że standardowy iloczyn hermitowski na $\mathbb{C}^n$ definiuje metrykę hermitowską na T_Λ, która jest Kählera.

   (d) Policz rozkład Hodge'a dla T_Λ.

3. Niech X będzie rozmaitością Kählera, a $Y \subset X$ podzbiorem analitycznym. Zbiór Y zadaje element w grupie homologii $H_{2\dim(Y)}(X)$. Niech $[Y]$ oznacza element Poincaré dualny w grupie $H^{2i}(X)$, gdzie $i = \mathrm{codim}(Y)$. Wykazać, że $[Y]$ jest typu (i, i).

4. Produkty.

   (a) Pokaż, że produkt rozmaitości Hodge'a jest rozmaitością Hodge'a.

   (b) Odwzorowanie Veronese. Pokaż, że odwzorowanie $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \to \mathbb{P}^{rs+r+s}$ zadane na współrzędnych jednorodnych wzorem $([x_i], [y_j]) \longrightarrow [x_i y_j]$ jest włożeniem na domkniętą podrozmaitość.

(c) Pokaż, że produkt rozmaitości rzutowych jest rozmaitością rzutową.

5. Rozkład Hodge'a jako działanie $\mathbb{C}^*$ (część 1). Niech $H_{\mathbb{R}}$ bedzie skończenie wymiarową przestrzenią rzeczywistą z kompleksyfikacja $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ i rozkładem $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ spełniającym warunek $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$. Pokaż, że działanie $\rho : \mathbb{C}^* \to GL(H_{\mathbb{C}})$, które dla $v \in H^{p,q}$ jest zdefiniowane jako $\rho(z)(v) = z^p \bar{z}^q \cdot v$ spełnia następujące warunki:

   (a) dla dowolnego $t \in \mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}^*$ i $v \in H_{\mathbb{C}}$ zachodzi $\rho(t)(v) = t^k \cdot v$

   (b) $\rho(\bar{z}) = \overline{\rho(z)}$ gdzie dla $g \in Aut(H_{\mathbb{C}})$ przez $\bar{g}$ oznaczamy działanie $\bar{g}(v) = \overline{g(\bar{v})}$ na $v \in H_{\mathbb{C}}$.

   Proszę zwrócić uwagę, że jakkolwiek ρ jest homomorfizmem grup (zespolonych) nie jest morfizmem rozmaitości nad ciałem $\mathbb{C}$.

6. Rozkład Hodge'a jako działanie $\mathbb{C}^*$ (część 2). Niech $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dupuszcza działanie $\rho : \mathbb{C}^* \to GL(H_{\mathbb{C}})$, które spełnia warunki (a) i (b) powyżej.

   (a) Wykorzystaj diagonalizację podgrup torysjnych w $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ by pokazać rozkład H na podprzestrzenie własne odpowiadające pewnym wartością własnym, które z kolei można rozszerzyć do charakterów $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ (homomorfizmów niekoniecznie zespolonych).

   (b) Pokaż, że charaktery te są postaci $z \to z^p \bar{z}^q$, gdzie $p + q = k$.

   (c) Niech $H^{p,q}$ oznacza podprzestrzeń własną odpowiadającą charakterowi $z \to z^p \bar{z}^q$. Pokaż, że $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$

7. Rozkład rozmaitości zespolonych. Niech X będzie zwartą rozmaitością zespoloną wymiaru n. Załóżmy, że istnieje wstępujący ciąg spójnych podzbiorów domkniętych $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_m = X$ takich, że X_0 jest punktem oraz $X_i \setminus X_{i-1} = \mathbb{C}^{n_i}$, gdzie $n_i \geq n_{i-1}$. Pokaż, że X ma kohomologie tylko w parzystych wymiarach oraz wymiar grupy $H^{2r}(X)$ jest równy liczbie i dla których $n_i = r$. Wskazówka: zastosuj ciąg pary dla $X_{i-1} \subset X_i$.

8. Kohomologie kwadryki. Niech $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ będzie kwadryką czyli hiperpowierzchnią zadaną jednorodnym wielomianem f stopnia dwa.

(a) Pokaż, że istnieje układ współrzędnych jednorodnych $[x_0, \ldots, x_{n+1}]$, taki że równanie Q^n jest postaci $x_0^2 + \cdots + x_r^2 = 0$, dla pewnego $r \leq n+1$, które jest indeksem formy kwadratowej odpowiadającej f (diagonalizacja formy kwadratowej).

(b) Pokaż, że Q^n jst gładkie wtedy i tylko wtedy gdy $r = n+1$, w przeciwnym wypadku Q^n jest stożkiem nad kwadryką mniejszego wymiaru.

(c) Od tego miejsca zakładamy, że Q^n jest gładką kwadryką wymiaru n. Pokaż, że $Q^1 \simeq \mathbb{P}^1$ oraz $Q^2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

(d) Załóżmy, że $f = x_0x_1 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2$ i na Q^n rozpatrzmy działanie $\mathbb{C}^*$ które we współrzędnych jednorodnych wygląda tak:

$$t \cdot [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = [tx_0, t^{-1}x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$$

Pokaż, że zbiór punktów stałych tego działania ma trzy składowe: dwa punkty izolowane i kwadrykę Q^{n-2}.

(e) Rozkład ABB. Korzystając z powyższego działania znajdź rozkład $Q^n = X_0 \sqcup X_n \sqcup X_{n-1}$, gdzie X_0 jest punktem, $X_n = \mathbb{C}^n$, natomiast X_{n-1} jest wiązką liniową nad kwadryką Q^{n-2}. Wskazówka: jeśli Y jest składową punktów stałych działania $\mathbb{C}^*$, to możemy zdefiniować $X^0(Y) = \{x \in Q : \lim_{t \to 0} t \cdot x \in Y\}$ lub $X^\infty(Y) = \{x \in Q : \lim_{t \to \infty} t \cdot x \in Y\}$.

(f) Korzystając z powyższego rozkładu policz kohomomogie Q^n: pokaż, że jedyne nietrywialne grupy kohomologii są w parzystych wymiarach od 0 do $2n$ i wymiar każdej z nich jest 1 z wyjątkiem przypadku parzystego n dla którego grupa $H^n(Q)$ ma wymiar 2.

(g) Niech n będzie parzyste i załóżmy, że $f = x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_{n+1}$. Pokaż, że grupa $H^n(Q)$ jest generowana przez przez klasy Poincaré dualne do pewnych podprzestrzeni liniowych w Q. Podaj równania tych podprzestrzeni.

9. Niech M będzie zwartą zorientowaną rozmaitością wymiaru $4n$. Sygnaturę rozmaitości $\sigma(M)$ definiujemy jako sygnaturę formy przecięć w $H^{2n}(M)$

$$([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta\,.$$

Jeśli wymiar rozmaitości nie jest podzielny przez 4, to $\sigma(M) = 0$ z definicji.

(a) Znajdź sygnaturę powierzchni Kählera S znając liczby Hodge'a $h^{p,q} = \dim H^q(S, \Omega^p)$.

(b) Uogólnij otrzymaną formułę na dowolną rozmaitość Kählera.

10. Niech $X = G(k, n)$ bedzie grassmanianem przestrzeni k-wymiarowych w $V = \mathbf{C}^n$. Ustalmy flagę w V czyli (sciśle) wstępujący ciąg podprzestrzeni liniowych $\{0\} = V_0 \subset V_1 \cdots V_{n-1} \subset V_n = V$. Dla liczby i spełniającej warunek $0 \leq i \leq k(n-k)$, podziałem i nazywamy nierosnący ciąg k nieujemych liczb λ_j nie większych niż $n-k$, których suma jest i. Czyli

$$(*) \qquad n-k \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0 \quad \& \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = i$$

(a) Rozłożyć X na podzbiory izomorficzne z przestrzeniami afinicznymi. Wskazówka: dla ciągu (λ_j) rozpatrz zbiór

$$X_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} = \{W : \dim(W \cap V_{n-k+j-\lambda_j}) = j\}$$

(b) Wykazać, że X ma niezerowe kohomologie tylko w parzystych gradacjach, oraz wymiar $\dim(H^{2i}(X))$ jest równy ilości ciągów spełniających warunek $(*)$

(c) Pokazać, że kohomologie X są generowane przez cykle algebraiczne (tzn. elementy Poincaré dualne do elementów homologii zadanych przez podzbiory algebraiczne).

(d) Dla grassmanianu $X = G(2, n)$ znaleźć wymiary kohomologii prymitywnych $P^{i,i} \subset H^{i,i}(X)$.

(e) Korzystając z relacji Hodge'a-Riemanna znaleźć sygnaturę grassmanianu $G(2, n)$.