Konstrukcja Cox'a

Działania grup

Niech $c \in \mathcal{C}$ to obiekt kategorii $\mathcal{C}$, G - dowolna grupa (rozważana jako jednoobiektowa kategoria). Wtedy funktory $F : G \to \mathcal{C}$ t.że $F(*) = c$ możemy nazwać działaniami G na c. Rozważając uniwersalne własności c/G dla $\mathcal{C} =$ Set, Ab, Vect(k) stwierdzamy, że sensownie jest przyjąć $c/G = \varinjlim F$ (granica prosta F). Takie ilorazy nie muszą istnieć. W [1] nazywa się je uniwersalnymi kategoryjnymi ilorazami.

Interesuje nas przypadek $\mathcal{C} = \{$afiniczne rozmaitości algebraiczne nad $k\}$. Funktory pierścienia współrzędnych i mSpec (dalej oznaczany Spec) ustalają równoważność kategorii $\{$afiniczne rozm. alg. nad $k\} \simeq \{$sk. gen. k-algebry bez nilpotentów$\}$. Zatem pierścieniem współrzędnych X/G powinien być pierścień $k[X]^G = \varprojlim (k[-] \circ F)$. Jednak w [1] można znaleźć odnośnik do przykładu, w którym $k[X]^G$ nie jest sk. generowany. Kategoria $\{$sk. gen. k-algebry bez nilpotentów$\}$ ma sk. granice (odwrotne), więc dla G skończonych $k[X]^G$ zawsze istnieje w tej kategorii. Ogólnie mSpec$(k[X]^G)$ nie musi pokrywać się (jako zbiór) ze zbiorem X/G. Od teraz $k = \mathbb{C}$.

Fakty o torusach

Mając dany torus $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ kraty N i M używane do konstrukcji rozmaitości torycznych możemy kanonicznie zdefiniować następująco: $N = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T)$ $M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*)$. N nazywamy grupą/kratą jednoparametrowych podgrup T, a M (kratą) grupą charakterów T. Hom bierzemy w kategorii przemiennych obiektów grupowych w kategorii rozmaitości algebraicznych nad $\mathbb{C}$. Jest to konieczne do pokazania:

__Lemat__ $N \simeq \mathbb{Z}^n \simeq M$ jako grupy

__Dowód__: $N \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)^n$

$M \simeq \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{Hom}((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{Hom}((\mathbb{C}^*)^{\oplus n}, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)^n$ ($\oplus$ to suma prosta $\equiv$ koprodukt)

Te naturalne izomorfizmy (naturalne oprócz $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$) zachodzą z powodu odpowiedniego wyboru kategorii - musimy wiedzieć, że granice i kogranice liczy się w odpowiedni sposób.

Zatem wystarczy $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}$. Pokażemy, że każde $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ jest dane przez $\varphi(z) = z^k$. Wtedy izomorfizm będzie dany przez $\varphi \mapsto k \in \mathbb{Z}$. φ jest morfizmem rozmaitości algebraicznych - zatem jest wielomianowy, a więc i holomorficzny. Jako grupa topologiczna $\mathbb{C}^* \simeq S^1 \times \mathbb{R}_{>0}$. S^1 jest zwarte, więc $\varphi|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{C}^*$ przyjmuje wartości w $S^1 \times \{1\} \simeq S^1$. Zatem mamy funkcję $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S^1, S^1)$
$\varphi \mapsto \varphi|_{S^1}$

__Fakt__: $\mathrm{Hom}(S^1, S^1) \simeq \mathbb{Z}$ wzorem $\{t \mapsto t^k\} \mapsto k$ (S^1 rozważamy jako grupę topologiczną, lub grupę Liego). Wynika to z faktu, że $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp(\pi x)} S^1$ jest homomorfizmem grup i nakryciem uniwersalnym oraz homotopijnego kryterium podnoszenia przekształceń. Równoważnie można rozważyć różniczkę $d\varphi|_{S^1}$ i skorzystać z odwzorowania wykładniczego $T_1 S^1 \xrightarrow{\exp} S^1$.

Zatem nasza funkcja jest na. Z holomorficzności i wzoru całkowego Cauchy'ego mamy zgodność na zbiorze otwartym $\mathbb{C}^*$ o ile mamy zgodność na S^1. Wtedy mamy zgodność wszędzie. Zatem $\varphi|_{S^1} = \psi|_{S^1} \Rightarrow \varphi = \psi$

Fakty o torusach c.d.

Zatem nasza funkcja jest różnowartościowa. Zatem mamy bijekcję $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{Hom}(S^1, S^1) \simeq \mathbb{Z}$

W tym kontekście odwzorowanie dwuliniowe$^{(+)}$ $N \times M \to \mathbb{Z}$ możemy opisać następująco: $(\gamma, \theta) \in N \times M$ możemy złożyć otrzymując $\theta \circ \gamma : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. Zgodnie z lematem ten homomorfizm ma postać $z \mapsto z^k$. Można sprawdzić, że $(\gamma, \theta) \mapsto k$ jest dwuliniowe i zgadza się z naszymi konwencjami.

(+) to odwzorowanie ustala dualność $N \simeq M$. Na $\mathbb{Z}^n$ to iloczyn skalarny

Kolejnym wnioskiem z lematu jest fakt, że odwzorowanie $T \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*), \mathbb{C}^*)$ dane przez $T \ni t \mapsto$ ewaluacja w $t \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$ jest naturalnym izomorfizmem grup. ($\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}$ to homomorfizmy zwykłych grup abelowych).

Łatwo również sprawdzić, że odwzorowanie $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \to T$ indukowane przez $\gamma \otimes t \mapsto \gamma(t)$ jest izomorfizmem grup ($N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*)^n \simeq (\mathbb{C}^*)^n$).

T ma również strukturę rozmaitości algebraicznej (quasi-afinicznej, tzn. $(\mathbb{C}^*)^n \subseteq \mathbb{C}^n$). $\mathbb{C}[T] \simeq \mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n] \simeq \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_n, z_n^{-1}]$. Korzystając z tego izomorfizmu łatwo sprawdzić, że $\mathbb{C}[T] \simeq \mathbb{C}[M]$, gdzie po prawej mamy algebrę grupową. Ten izomorfizm jest naturalny.

Morfizmy toryczne

Niech $V_i = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[S_i]$ będą afinicznymi rozmaitościami torycznymi, gdzie S_i to odpowiednie półgrupy. T_{N_i} to torus V_i.

Df. Morfizm rozmaitości algebraicznych $V_1 \xrightarrow{\phi} V_2$ nazwiemy torycznym, jeżeli pochodzi on (przez funktor $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[-])$) od homomorfizmu półgrup $S_2 \to S_1$

Stw.

a) Morfizm $V_1 \xrightarrow{\phi} V_2$ jest toryczny $\iff$ $\phi[T_{N_1}] \subseteq T_{N_2}$ i $\phi|_{T_{N_1}} : T_{N_1} \to T_{N_2}$ jest homomorfizmem grup

b) Morfizm toryczny jest ekwiwariantny względem siebie, tzn. $\forall t \in T_{N_1}\ \forall p \in V_1\ \phi(t \cdot p) = \phi(t) \cdot \phi(p)$ gdzie $\cdot$ oznacza działanie odpowiedniego torusa na V_i.

Dowód: Krata charakterów T_{N_i} to $\mathbb{Z} S_i = M$ (grupa generowana przez S_i), więc homomorfizm półgrup $S_2 \to S_1$ rozszerza się do homomorfizmu grup $M_2 \to M_1$. Otrzymujemy zatem diagram przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[S_2] \arrow[r, "\phi^*"] \arrow[d] & \mathbb{C}[S_1] \arrow[d] \arrow[r, mapsto, "\mathrm{Spec}"] & V_2 & V_1 \arrow[l, "\phi"'] \\
\mathbb{C}[M_2] \arrow[r] & \mathbb{C}[M_1] & T_{N_2} \arrow[u, hook] \arrow[l, mapsto, "\mathbb{C}[-]"'] & T_{N_1} \arrow[l] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

gdzie z lewej strony korzystamy z naturalnego izomorfizmu $\mathbb{C}[T_{N_i}] \simeq \mathbb{C}[M_i]$

Zatem faktycznie $\phi[T_{N_1}] \subseteq T_{N_2}$. Aby zobaczyć, że jest to homomorfizm grup korzystamy z faktu, że mamy homomorfizm $M_2 \to M_1$ i naturalny izomorfizm $T_{N_i} \simeq \mathrm{Hom}(M_i, \mathbb{C}^*)$. Zatem mamy homomorfizm $T_{N_1} \simeq \mathrm{Hom}(M_1, \mathbb{C}^*) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\Phi, \mathbb{C}^*)} \mathrm{Hom}(M_2, \mathbb{C}^*) \simeq T_{N_2}$, który jako funkcja zgadza się z ϕ

To dowodzi „$\Rightarrow$" w punkcie a)

Morfizmy toryczne c.d.

dowód a) „⇐": Zaczynając z prawej części poprzedniego diagramu i przykładając $\mathbb{C}[-]$ otrzymujemy lewą, gdzie homomorfizm $\mathbb{C}[M_2] \to \mathbb{C}[M_1]$ jest indukowany przez homomorfizm grup $M_2 \xrightarrow{\Phi} M_1$. Ponadto $\phi^*[\mathbb{C}[S_2]] \subseteq \mathbb{C}[S_1]$, więc $\Phi[S_2] \subseteq S_1$, więc homomorfizm Φ jest indukowany przez $\Phi|_{S_2}: S_2 \to S_1$

b) Rozważamy diagram:

$$\begin{tikzcd} T_{N_1}\times V_1 \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[d, "\phi|_{T_{N_1}}\times \phi"'] & V_1 \arrow[d, "\phi"] \\ T_{N_2}\times V_2 \arrow[r, "\Phi_2"] & V_2 \end{tikzcd}$$

gdzie Φ_i to odpowiednie działania torusów na V_i. Φ_i obcięte do T_{N_i} jest mnożeniem na torusie z definicji rozmaitości torycznej. Skoro $\phi|_{T_{N_1}}$ jest homomorfizmem grup, to na torusach ten diagram jest przemienny. Ale T_{N_i} jest gęsty w V_i, więc cały diagram jest przemienny.

Jeżeli N_i są kratami podgrup torusów T_{N_i}, to homomorfizm krat $\Phi: N_1 \to N_2$ indukuje homomorfizm torusów wzorem ~~Φ~~ $T_{N_1} \simeq N_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \xrightarrow{\Phi\otimes id} N_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \simeq T_{N_2}$. Mamy również indukowany homomorfizm liniowy $\Phi_{\mathbb{R}}: (N_1)_{\mathbb{R}} \to (N_2)_{\mathbb{R}}$.

Stw. Niech $\sigma_i \subseteq (N_i)_{\mathbb{R}}$ będą wypukłymi stożkami wymiernymi, a $\Phi: N_1 \to N_2$ to homomorfizm krat. $\phi: T_{N_1} \to T_{N_2}$ rozszerza się do morfizmu torycznego $U_{\sigma_1} \to U_{\sigma_2} \iff \Phi_{\mathbb{R}}[\sigma_1] \subseteq \sigma_2$.

Dowód: Potrzebujemy tylko implikacji „⇐" - dowód „⇒" pomijamy

Homomorfizm $\phi: T_{N_1} \to T_{N_2}$ jest wyznaczony i wyznacza homomorfizm grup $M_2 \to M_1$. Warunek $\Phi_{\mathbb{R}}[\sigma_1] \subseteq \sigma_2$ gwarantuje, że ten homomorfizm obcina się do homomorfizmu $M_2 \cap \sigma_2^\vee \to M_1 \cap \sigma_1^\vee$, który indukuje homomorfizm $\mathbb{C}[M_2 \cap \sigma_2^\vee] \to \mathbb{C}[M_1 \cap \sigma_1^\vee]$ co daje morfizm toryczny $U_{\sigma_1} \to U_{\sigma_2}$

Uwaga: Nie jest jasne jak określić morfizmy toryczne dla rozmaitości niekoniecznie afinicznych. U naszym przypadku będzie istniało pokrycie zbiorami afinicznymi, na których nasz morfizm będzie toryczny.

Konstrukcja Cox'a, czyli konstrukcja przez współrzędne jednorodne

Def. Powiemy, że rozmaitość toryczna X_Σ nie ma czynników torycznych (Σ - wachlarz), jeżeli nie jest izomorficzna z rozmaitością postaci $\mathbb{C}^* \times X_{\Sigma_0}$, gdzie $\mathbb{C}^*$ jest częścią torusa $\mathbb{C}^* \times X_{\Sigma_0}$.

Dalej będziemy zakładać, że X_Σ nie ma czynników torycznych i jest gładka (tzn. zbiory U_σ pokrywające ją są gładkie). Te założenia można pominąć, jednak jedynie kosztem znacznych komplikacji w konstrukcji. Zainteresowanych odsyłamy do [1].

Lemat X_Σ nie ma czynników torycznych $\iff$ stożki w ~~Σ~~ $\Sigma(1)$ rozpinają $N_{\mathbb{R}}$ gdzie $\Sigma(1)$ to zbiór jednowymiarowych stożków w Σ

Dowód: ~~$\mathbb{C}[\mathbb{C}^* \times X_{\Sigma_0}] \simeq \mathbb{C}[\mathbb{C}^*] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$~~ Wynika to z $\mathbb{C}[\mathbb{C}^* \times U_\sigma] \simeq \mathbb{C}[\mathbb{C}^*] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[U_\sigma] \simeq \mathbb{C}[\mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee]$
$\simeq \mathbb{C}[\mathbb{Z} \oplus M \cap \sigma^\vee]$

Konstrukcja Cox'a

Wniosek (z przyszłości): zwarte rozmaitości toryczne nie mają czynników torycznych

Oznaczenia: niech Σ to wachlarz. $\Sigma(1)$ - jednowymiarowe stożki w Σ. Jeżeli $\sigma\in\Sigma$ to przez $\sigma(1)$ oznaczamy minimalne generatory $\sigma\cap N$. Jeżeli $\varrho\in\Sigma(1)$ to odpowiedni generator oznaczamy przez $u_\varrho \in \varrho\cap N$

Przypomnijmy, że rozmaitość U_σ jest gładka $\Leftrightarrow$ σ jest rozpięte przez część bazy N nad $\mathbb{Z}$

Mając dany wachlarz Σ możemy skonstruować nowy wachlarz $\tilde\Sigma$ następująco: $\tilde\Sigma = \{\tilde\sigma : \sigma\in\Sigma\}$, gdzie $\tilde\sigma$ = stożek$(e_\varrho : u_\varrho\in\sigma)$, e_ϱ to standardowa baza $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$. Wtedy $\tilde\Sigma$ jest wachlarzem w $\mathbb{R}^{\Sigma(1)}$.
Zauważmy, że skoro e_ϱ to standardowa baza $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$, to $\tilde\Sigma$ leży w (tzn. każde $\tilde\sigma\in\tilde\Sigma$ leży w) $\mathbb{N}\cdot\{e_\varrho : \varrho\in\Sigma(1)\}$, a to jest ~~wachlarz~~ stożek rozmaitości $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} = \prod_{\Sigma(1)}\mathbb{C}$. Zatem mamy $\underbrace{\text{morfizm}}_{\text{toryczny}}$ (zanurzenie) $X_{\tilde\Sigma}\to\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$.

Zatem możemy napisać $X_{\tilde\Sigma} = \mathbb{C}^{\Sigma(1)}\setminus Z(\Sigma)$. Zbiór $Z(\Sigma)$ nazywamy zbiorem wyjątkowym rozmaitości X_Σ. Później opiszemy jego dopełnienie w $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$.

Możemy skonstruować morfizm toryczny $X_{\tilde\Sigma}\xrightarrow{\pi} X_\Sigma$. Konstrukcja Cox'a polega na udowodnieniu, że istnieje pewne G działające na $X_{\tilde\Sigma}$ t. że $X_{\tilde\Sigma}/G \simeq (\mathbb{C}^{\Sigma(1)}\setminus Z(\Sigma))/G \simeq X_\Sigma$, gdzie ostatni izomorfizm zadany jest przez π. Jest to iloraz w sensie kategoryjnym, a ponadto (w przypadku gładkim) π zadaje bijekcję zbiorów $X_{\tilde\Sigma}/G$ (jako zbiór orbit) $\simeq X_\Sigma$. My udowodnimy tylko drugą część tego twierdzenia.

Konstrukcja morfizmu $X_{\tilde\Sigma}\xrightarrow{\pi} X_\Sigma$: $\bar\pi : \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}\to N$ określamy wzorem $\bar\pi(e_\varrho) = u_\varrho$. Z założenia gładkości i braku czynników torycznych $\bar\pi$ jest epimorfizmem. Z konstrukcji $\bar\pi_{\mathbb{R}}[\tilde\sigma]\subseteq\sigma$, więc otrzymujemy zgodną rodzinę morfizmów torycznych $U_{\tilde\sigma}\to U_\sigma$. Ich sklejeniem jest $\pi : X_{\tilde\Sigma}\to X_\Sigma$.

Ustalamy $G = \ker\bar\pi\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}^*$ - jest to torus, ponieważ $\ker\bar\pi$ jest grupą wolną abelową (jako podgrupa takowej). Mamy $G\triangleleft\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}\otimes\mathbb{C}^*$, więc G działa na $X_{\tilde\Sigma}$ jak podgrupa torusa. Fakt, że $X_{\tilde\Sigma}/G\simeq X_\Sigma$ możemy sprawdzić „lokalnie" (w topologii Zariskiego - nasze pokrycia będą zawierać torus i inne orbity).
Dla $\sigma\in\Sigma$ i $\tilde\sigma\in\tilde\Sigma$ możemy wybrać rozkłady $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}\simeq\ker\bar\pi\oplus\langle\tilde\sigma\rangle\oplus\text{reszta}\xrightarrow{\bar\pi}\langle\sigma\rangle\oplus\text{reszta}\simeq N$, gdzie $\langle\tilde\sigma\rangle$ to podkrata rozpięta przez $e_\varrho\in\tilde\sigma$, $\langle\sigma\rangle$ = podkrata rozpięta przez u_ϱ, $\varrho\in\sigma$. Korzystamy tu z gładkości. $\bar\pi$ przeprowadza $\langle\tilde\sigma\rangle$ izomorficznie na $\langle\sigma\rangle$ i resztę na resztę. Zatem na poziomie $U_{\tilde\sigma}\to U_\sigma$, po wybraniu baz wszystkich trzech składników mamy morfizm $\underbrace{\mathbb{C}^n}_{\langle\tilde\sigma\rangle}\times\underbrace{(\mathbb{C}^*)^k}_{\text{reszta}}\times\underbrace{(\mathbb{C}^*)^l}_{\ker\bar\pi}\xrightarrow{\text{rzut}}\underbrace{\mathbb{C}^n}_{\langle\sigma\rangle}\times\underbrace{(\mathbb{C}^*)^k}_{\text{reszta}}$
Zatem $U_{\tilde\sigma}/G\simeq U_\sigma$ przez $\pi|_{U_{\tilde\sigma}}$. Zatem $X_{\tilde\Sigma}/G\simeq X_\Sigma$

Opis $X_{\tilde\Sigma}$: wiedząc, że $X_{\tilde\Sigma}\subseteq\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$ i korzystając z opisu gładkich rozmaitości afinicznych stwierdzamy, że $X_{\tilde\Sigma} = \bigcup_{\tilde\sigma\in\tilde\Sigma} U_{\tilde\sigma}$, gdzie $U_{\tilde\sigma} = \prod_{e_\varrho\in\Sigma(1)} A^{\tilde\sigma}_{e_\varrho}$, $A^{\tilde\sigma}_{e_\varrho} = \begin{cases}\mathbb{C} & e_\varrho\in\tilde\sigma\\ \mathbb{C}^* & e_\varrho\notin\tilde\sigma\end{cases}$

Odnośniki:

[1] Cox, Little, Schenck „Toric Varieties" dostępne pod adresem ~~www.cs.ama~~ www.cs.amherst.edu/~dac/toric