Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Marcin Szamotulski
Nr albumu: 184354

Rozkłady Lefschetza w przestrzeniach włóknistych

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Andrzeja Webera
Instytut Matematyki

listopad 2004

Pracę przedkładam do oceny

Data Podpis autora pracy:

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta

Data Podpis kierującego pracą:

Streszczenie

W niniejszej pracy konstruujemy rozkłady kohomologii orientowalnych rozwłóknień na iloczyn tensorowy kohomologii kählerowkiego włókna i bazy dla rozwłóknień nad sferami i zespolonymi przestrzeniami rzutowymi dowolnych wymiarów. Korzystamy przy tym z istnienia rozkładu Lefschetza kohomologii włókna. Prezentujemy również przykład będący dokładnym wyliczeniem tego izomorfizmu dla rozwłóknienia rozmaitości flag $F(4)$ nad trójwymiarową zespoloną przestrzenią rzutową z włóknem $F(3)$ – przestrzenią flag o jeden stopień mniejszą.

Słowa kluczowe

Rozwłóknienie orientowalne, Rozmaitości Kählera, Kohomologie rozwłóknienia, Rrozkład Lefschetza, Przedłużenie kohomologiczne włókna.

Klasyfikacja tematyczna

32 Several complex variables and analytic spaces
$32Q15$ Kähler manifolds

55 Algebraic Topology
$55R05$ Fiber spaces

14 Algebraic Geomtery
$14F25$ Classical real and complex cohomology

Spis treści

Wstęp

Praca ta jest napisana na podstawie wyników Pierre'a Deligne'a dotyczących rozwłóknień orientowalnych. Są to rozwłóknienia, których włókno F jest przestrzenią Kählera oraz istnieje rozszerzenie formy kählerowskiej włókna na przestrzeń rozwłóknienia E, które jest formą zamkniętą – reprezentuje więc ona pewną klasę w drugich kohomologiach przestrzeni rozwłóknienia. Prace [D1] oraz [D2] autorstwa P. Deligne, późniejsze od pracy [Bl] A. Blancharda – pierwszej pracy o tej tematyce pochodzącej z lat '50-tych, są napisane w abstrakcyjnym języku kategorii pochodnych. Niniejsza praca przenosi niejako wyniki P. Deligna na język zespolonych form różniczkowych oraz kohomologii singularnych. P. Deligne przedstawia trzy kanoniczne izomorfizmy iloczynu tensorowego kohomologii włókna i bazy z kohomologiami przestrzeni rozwłóknienia, w przypadku gdy E jest rozwłóknieniem orientowalnym nad B. Izomorfizmy te nie zachowują jednakże struktury multiplikatywnej algebr kohomologii. W tej pracy przedstwiam rozwłóknienia nad sferami oraz zespolonymi przestrzeniami rzutowymi, przy czym korzystam z ciągu dokładnego pary oraz pewnych jego własności. Wprowadzamy też, wynikający z niego, ciąg dokładny Wanga dla rozwłóknień nad sferą, z którego korzystam w rozdziale czwartym, konstruując jego kanoniczne rozszczepienie. Kanoniczny izomorfizm kohomologii orientowalnego rozwłóknienia nad $\mathbb{C}P^n$ konstruuję indukcyjnie doklejając kolejne komórki.

W rozdziale pierwszym wprowadzam podstawy teorii zespolonej geometrii algebraicznej zgodnie z konwencjami i oznaczeniami [G-H]. Przytaczam twierdzenie de Rhama, zgodnie z którym będziemy utożsamiać kohomologie singularne o zespolonych współczynnikach z kohomologiami de Rhama zespolonego kompleksu form różniczkowych. W rozdziale pierwszym znajduje się również wyprowadzenie ciągu Wanga z ciągu pary oraz opisana są podstawowe własności homomorfizmu Gysina: jego związek z dualnością Poincarégo oraz formułą projekcji.

W rozdziale drugim omawiam przestrzenie Kählera oraz ich algebraiczne i geometryczne własności. Przyglądam się również reprezentacjom algebry $sl(2,\mathbb{C})$ tak by w pełnej okazałości zademonostrować trudne twierdzenie Lefschetza, które w tym ujęciu głosi, że istnieje reprezentacja algebry $sl(2,\mathbb{C})$ na algebrze kohomologii, bądź też równoważnie: algebra kohomologii przestrzeni Kählera jest $sl(2,\mathbb{C})$ modułem. Wnioskiem z trudnego twierdzenia Lefschetza jest istnienie rozkładu Lefschetza algebry kohomologii na sumę prostą $\oplus_k P^{n-k}(F)\omega_F/(\omega_F^{k+1})$, gdzie ω_F jest klasą reprezentującą tak zwaną formę kählerowską, a

$$P^{n-k}(F) \stackrel{def.}{=} \{\alpha \in H^{n-k}(F) :\ \omega_F^{k+1} \cup \alpha = 0\}$$

są kohomologiami prymitywnymi rozmaitości kählerowskiej[1] F. Przytoczmy teraz ogólną definicję orientowalnego rozwłóknienia:

Definicja 1 *Rozwłóknienie E nad B o włóknie F nazywamy orientowalnym jeśli F jest rozmaitością Kählera oraz istnieje przedłużenie formy kählerowskiej włókna F do zamkniętej formy określonej na całej przestrzeni rozwłóknienia E.*

W rozdziale trzecim przechodzę do krótkiego omówienia prac P. Deligne'a oraz dowodzę zerowania się różniczkowania w ciągu dokładnym Wanga, skąd otrzymujemy wniosek o istnieniu poszukiwanego izomorfizmu dla rozwłóknienia orientowalnego nad sferą. Wówczas rozważając krótkie ciągi dokładne, pochodzące od długiego ciągu dokładnego Wanga:

$$0 \longrightarrow H^{*-d}(F) \xrightarrow{i_!} H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \longrightarrow 0$$

konstruujemy lewostronną odwrotność homomorfizmu indukowanego przez włożenie włókna w przestrzeń rozwłóknienia korzystając przy tym z założenia orientowalności rozwłóknienia: klasa formy kählerowskiej włókna ω_F przedłuża się do klasy ω_E należącej do drugich kohomologii przestrzeni rozwłóknienia. Lewostronną odwrotność homomorfizmu i^* nazywa się przedłużeniem kohomologicznym włókna. Naszym celem jest pokazanie, że istnieje pewien warunek, który kanonicznie wyznacza ten izomorfizm. W tym celu wprowadzamy pojęcie kohomologii semiprymitywnych, które dla rozwłóknienia E nad d wymiarową sferą definiujemy jako

$$P^{n-k}(E) = \{\beta \in H^{n-k}(E) :\ \omega_E^{k+d} \cup \beta = 0 \text{ oraz } \beta|_F \in P^*(F)\}$$

Okazuje się, że każdy element prymitywny jednoznacznie przedłuża się do elementu semiprymitywnego – własność ta wyznacza kanoniczne przedłużenie kohomologiczne, ponieważ elementy prymitywne oraz forma kählerowska włókna generują algebrę kohomologii włókna. Główna

[1] w całej pracy symbol F rezerwujemy dla oznaczenia n wymiarowej zespolonej rozmaitości kählerowskiej będącej włóknem rozwłóknienia orientowalnego.

teza tej części pracy, czyli istnienie kanonicznego izomorfizmu iloczynu tensorowego kohomologii włókna oraz kohomologii bazy z kohomologiami rozwłóknienia jest wnioskiem z twierdzenia Lareya – Hirscha. Tak więc w przypadku rozwłóknień orientowalnych znacznie łatwiej zbudować ten izomorfizm niż w ogólnym przypadku, wystarczy zadać przedłużenie kohomologiczne na elementach prymitywnych oraz formie kählerowskiej.

W rozdziale piątym rozważam orientowalne rozwłóknienia nad d wymiarową zespoloną przestrzenią rzutową. Dowodzimy, że istnieje kanoniczny izomorfizm kohomologii takiego rozwłóknienia z iloczynem tensorowym kohomologii bazy i włókna, jednoznacznie wyznaczony przez analogiczny warunek jak dla rozwłóknień nad sferą, tak więc i w tej sytuacji wprowadzamy pojęcie elementów semiprymitywnych, które definiujemy indukcyjnie przez filtrację $E_q \subseteq E$ indukowaną przez filtrację bazy $\mathbb{C}P^q \subseteq \mathbb{C}P^d$, ($E_q$ jest orientowalnym rozwłóknieniem nad $\mathbb{C}P^q$):

$$P^{n-k}(E) \overset{def.}{=} \{\beta \in H^{n-k}(E) :\ \omega_E^{k+2d} \cup \beta = 0 \text{ oraz } \alpha|_{E_q} \in P^*(E_q) \text{ dla } q \leqslant d\}$$

Twierdzenie 1 *Niech będzie dane rozwłóknienie orientowalne E nad zespoloną przestrzenią rzutową $\mathbb{C}P^d$ z włóknem kählerowskim F, z ustalonym przedłużeniem formy kählerowskiej włókna do formy określonej na całej przestrzeni rozwłóknienia. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedłużenie kohomologiczne włókna, które spełnia trzy poniższe własności: elementom prymitywnym przyporządkowuje elementy semiprymitywne, klasie formy kählerowskiej klasę ω_E, a poprzez rozkład Lefschetza jest zadane i to jednoznacznie na całych kohomologiach kählerowskiego włókna.*

Kanoniczne przedłużenie kohomologiczne włokna zadaje wspomniany izomorfizm dzięki twierdzeniu Lareya – Hirscha, które przytaczamy w rozdziale pierwszym. Jest to izomorfizm modułów nad pierścieniem kohomologii bazy. Zauważmy, że jeśli potraktujemy rozmaitość kählerowską jako rozwłóknienie nad $\mathbb{C}P^0 = \mathrm{pt}$ to wówczas elementy semiprymitywne są prymitywne, w tym sensie elementy semiprymitywne są uogólnieniem elementów prymitywnych na rozwłóknienia nad wyżej wymiarowymi przestrzeniami rzutowymi.

Niniejsza praca kończy się na tym poziomie, jednakże istnieją dalsze możliwości eksploracji tego tematu. Można po pierwsze udoskonalić główne twierdzenie rozdziału piątego, tak aby kontrolować izomorfizm na $P^*(F)[\pi^*X]/(\pi^*X^d) \subseteq H^*(F) \otimes H^*(B)$ a nie tylko na $P^*(F)$. Wydaje się także, że są możliwe uogólnia na rozwłóknienia, których baza jest CW–kompleksem, a wówczas otwiera się cała gama pytań dotyczących związków konstruowanego izomorfizmu ze strukturą CW–kompleksu, np.

czy dwie różne struktury CW–kompleksu na B indukują ten sam izomorfizm.

W rozdziale szóstym przedstawiamy kanoniczne rozkłady kohomologii na przykładzie orientowalnych rozwłóknień rozmaitości flag nad dwu- oraz trójwymiarową płaszczyzną rzutową.

Podziękowania Bardzo serdecznie dziękuję mojemu opiekunowi dr. Andrzejowi Weberowi za temat i pomysł na pracę magisterską, oraz cierpliwą i ciepłą współpracę, która wprowadziła mnie w świat topologii algebraicznej. Dzękuję również dr. Tadeuszowi Koźniewskiemu za opiekę nad moimi studiami w ramach Kolegium MISMaP.

Rozdział 1

Podstawy

W tej części pracy wprowadzimy podstawowe pojęcia i narzędzia jakimi będziemy się posługiwali.

Definicja 2 *Zbiór M nazywamy zespoloną n–wymiarową rozmaitością jeżeli każdy punkt ma otoczenie U_α homeomorficzne z otwartą kulą w $\mathbb{C}^n$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ i takie, że funkcje*

$$g_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathbb{C}^n$$

są holomorficzne. Liczbę n będziemy nazywali zespolonym wymiarem rozmaitości M i będziemy oznaczali jako $dim_{\mathbb{C}} M$.

Jeżeli w powyższej definicji zamienimy $\mathbb{C}^n$ na $\mathbb{R}^n$ to otrzymamy definicję rozmaitości różniczkowej. Przekształcenie $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, zadane wzorem $i(x, y) = x + iy$ jest dyfeomorfizmem, tak więc każda rozmaitość zepolona M jest $2n$ wymiarową rozmaitością różniczkową. Dodajmy, że wszystkie rozmaitości pojawiające się w tej pracy będą zwarte.

Oznaczenie: Przez $\Lambda^k(TM)^*$ oznczamy wiązkę k–tej potęgi zewnętrznej przestrzeni kostycznej. Gładkimi cięciami tej wiązki będziemy nazywali k–formy różniczkowe. Przestrzeń wektorową wszystkich k–form różniczkowych na rozmaitości różniczkowej M będziemy oznaczali przez $\Omega^k M$.

Na przestrzeni $\Omega^i M$ istnieje mnożenie:

$$\wedge \ : \ \Omega^i M \otimes \Omega^j M^* \to \Omega^{i+j} M$$

indukowane przez mnożenie zewnętrzne[1] na $\Lambda^i(T_pM)^*$.

Fakt 1 *Niech $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ Istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie $d : \Omega^i M \to \Omega^{i+1} M$ zadane przez:*

[1] definicję oraz podstawowe własności można odnaleźć w [B].

$d : \Omega^0 M \to \Omega^1 M$ przyporządkowuje funkcji f jej różniczkę df

$d(\omega \cup \eta) = d\omega \cup \eta + (-1)^{deg\,\omega}\omega \cup d\eta$

Z tych dwóch aksjomatów wynika, że $d \circ d = 0$, tak więc prawdziwa jest inkluzja $\Big(Im\, d :\ \Omega^{i-1}M \to \Omega^i M\Big) \subseteq \Big(Ker\, d :\ \Omega^i M \to \Omega^{i+1}M\Big)$ dla każdego $i \geqslant 1$.

Dowód można odnaleźć w literaturze [B, rozdz. 5, §6, str. 410]. Na mocy powyższego

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^i(M) \xrightarrow{d} \Omega^{i+1}(M) \longrightarrow \dots$$

jest kompleksem łańcuchowym przestrzenii wektorowych, którego kohomologie

$$H^i_{DR}(M) = \Big(Ker\, d :\ \Omega^i M \to \Omega^{i+1}M\Big)/\Big(Im\, d :\ \Omega^{i-1}M \to \Omega^i M\Big)$$

nazywane są kohomologiamii de Rhama. Okazuje się, że prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie 2 DE RHAM
Niech M będzie n wymiarową rozmaitością różniczkową, wówczas

$$H^k_{DR}(M) \simeq H^k(M, \mathbb{R})$$

gdzie $H^k(M, \mathbb{R})$ są to kohomologie singularne rozmaitości topologicznej M, a zatem

$$H_k(M, \mathbb{R}) = H_k(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$$

jest przestrzenią dualną (sprzężoną) do $H^k_{DR}(M)$ dla $k = 1, \dots, dim\, M$.

Dowód znajduje się np. w [G-H]. Zgodnie z twierdzeniem de Rhama będziemy utożsamiać kohomologie de Rhama z kohomologiami singularnymi $H^k_{DR}(M) \simeq H^k(M, \mathbb{R})$.

Jeżeli M jest rozmaitością zespoloną to wówczas jest też rozmaitością różniczkową, tak więc możemy związać z M rzeczywistą wiązkę styczną TM, jej kompleksyfikację $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ nazwiemy zespoloną przestrzenią styczną. Analogicznie konstruujemy zespoloną wiązkę kostyczną i jej potęgi zewnętrzne, a dzięki izomorfizmowi

$$\Lambda^k(TM \otimes \mathbb{C})^* \simeq (\Lambda^k(TM)^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

przestrzeń zespolonych k–form różniczkowych, czyli gładkich cięć wiązki $\Lambda^k(TM \otimes \mathbb{C})^*$, oznaczana jako $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M)$ jest izomorficzna z kompleksyfikacją przestrzeni k–form różniczkowych na M.

Dalej załóżmy dodatkowo, że M ma strukturę riemannowską, wówczas można zdefiniować operator $*$ Hodge'a[2]. Jest ona antyliniowym izomorfizmem: $* : \Omega^i_{\mathbb{C}} M \to \Omega^{2n-i}_{\mathbb{C}} M$. Mając daną zwartą i orientowalną, hermitowską rozmaitość zespoloną M gwiazdka Hodge'a z definicji spełnia:

$$(\omega \,|\, \eta) \stackrel{def}{=} \int_M \omega \wedge *\eta$$

W tej pracy $H^*(M)$ będzie ozncząć przestrzeń wektorową kohomologii o współczynnikach w $\mathbb{C}$, a zgodnie z twierdzeniem de Rhama przestrzeń $H^*(M, \mathbb{C})$ jest izomorficzna z kohomologiami kompleksu $\Omega^i(M) \otimes \mathbb{C}$.

Na kohomologiach określone jest mnożenie:

$$\cup : H^i(M) \otimes H^j(M) \to H^{i+j}(M)$$

(Rozważając kohomologie de Rhama okazuje się, że jest to to samo mnożenie co to zadane przez iloczyn form różniczkowych[3], standardowo oznaczany przez $\wedge$).

Jednym z podstawowych narzędzi tej pracy będzie ciąg dokładny Wanga dla rozwłóknień nad d–wymiarową sferą.

Twierdzenie 3 *Niech będzie dane rozwłóknienie* $\begin{array}{c} F \to E \\ \downarrow \\ S^d \end{array}$, $dim_{\mathbb{C}} E = n$. *Wówczas istnieje ciąg dokładny:*

$$\ldots \xrightarrow{\delta} H^{*-d}(F) \xrightarrow{i_!} H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \xrightarrow{\partial} H^{*-d+1}(F) \longrightarrow \ldots$$

gdzie $i_!$ nazywa się homomorfizmem Gysina.

Dowód: Ciąg Wanga wyprowadzimy z ciągu dokładnego pary:

$$\ldots \xrightarrow{\delta} H^*(E, F) \xrightarrow{f^*} H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \xrightarrow{\delta} H^{*+1}(E, F) \longrightarrow \ldots$$

Wystarczy zauważyć, że

$$\begin{array}{rcl} H^*(E, F) & \simeq & H^*(D^{2d} \times F, S^{2d-1} \times F) \\ & \simeq & H^*(D^{2d}, S^{2d-1}) \otimes H^*(F) \text{ (z formuły Küngetha)} \\ & = & H^{*-d}(F) \end{array}$$

Homomorfizm Gysina $i_!$ definiujemy jako złożenie tych izomorfizmów z homomorfizmem f^*. Różniczkowanie w ciągu Wanga ∂ jest złożeniem homomorfizmu δ z powyższym izomorfizmem, stopnia $-d$, przestrzeni wektorowych z gradacją: kohomologii relatywnych i kohomologii włókna.

[2]Operator $*$ Hodge'a wpowadzam za [G-H][rozdz. 0, str. 82].

[3]W [Gr, Rozdz. III, str. 158] jest zamieszczony przykład, który pokazuje, że cup – produkt na cyklach w teorii singularnej i wedge produkt na formach różniczkowych nie muszą się zgadzać (przykład jest tak dobrany, że obie teorie dają się porównać explicite), jednakże na kohomologiach indukują izomorficzne mnożenie.

QED

Homomorfizm Gysina spełnia tak zwaną formułę projekcji, którą wykorzystamy w rozdziale czwartym, tzn. dla $\beta \in H^*(E)$ oraz $\alpha \in H^*(F)$ zachodzi związek:

$$i_!(i^*\beta \cup \alpha) = \beta \cup i_!\alpha$$

Dowód tej własności znajduje się w [Sp, rozdz. 8.5]. W rozdziale piątym skorzystamy z klasycznego twierdzenia Larey'a – Hirscha (dowód w [Sp, rozdz. 5.7]):

Twierdzenie 4 **Lareya – Hirscha** *Niech $E \xrightarrow{\pi} B$ będzie rozwłóknieniem z włóknem F. Wówczas jeżeli tylko istnieje rozszerzenie kohomologiczne włókna $\theta: H^*(F) \longrightarrow H^*(E)$ (rozszerzenie kohomologiczne włókna jest lewostronną odwrotnością homomorfizmu indukowanego przez włożenie włókna F w E) to istnieje izomorfizm kohomologii przestrzeni rozwłóknienia z iloczynem tensorowym kohomologii bazy oraz włókna dany wzorem:*

$$\Phi(\alpha \otimes \beta) = \theta(\alpha) \cup \pi^*\beta$$

dla $\alpha \otimes \beta \in H^*(F) \otimes H^*(E)$.

Rozdział 2

Rozmaitości Kählera i trudne twierdzenie Lefschetza

W tym rozdziale przyjrzymy się przestrzeniom Kählera oraz ich algebraicznym aspektom, które czynią te przestrzenie wyróżnionymi spośród wszystkich zespolonych rozmaitości. Najpierw podam definicję przestrzeni Kählera oraz inne równoważne jej sformułowania, a następnie przejdę do opisania reprezentacji algebry Lie $sl(2, \mathbb{C})$ tak, aby w pełni opisać kohomologie przestrzeni Kählera, bowiem zgodnie z trudnym twierdzeniem Lefschetza są one $sl(2, \mathbb{C})$ – modułem. Wnioskiem z powyższego twierdzenia jest istnienie rozkładu Lefschetza kohomologii zadanego przez wyróżnioną klasę w drugich kohomologiach rozważanej przestrzeni. Najpierw opiszemy świat, który bedziemy badali narzędziami topologii algebraicznej.

Definicja 3 *Rozmaitość M jest n wymiarową zwartą rozmaitością Kählera wtedy i tylko wtedy, gdy jest n – wymiarową zespoloną rozmaitością z metryką hermitowską $ds^2 = \sum \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_j$, gdzie φ_i są typu $(1, 0)$, której forma stowarzyszona:*

$$\omega_M \stackrel{def.}{=} \frac{i}{2} \sum \varphi_i \wedge \bar{\varphi}_j$$

jest zamknięta, to znaczy $d\,\omega_M = 0$.

Ponieważ forma ω_M jest zamknięta, tak więc reprezentuje pewną klasę w drugich kohomologiach. Dalej przez ω_M będziemy oznaczali właśnie tę klasę. Założenie o zwartości M jest nam potrzebne tylko, gdy używamy twierdzenia Lefschetza, nie wszedzie jednak będzie ono konieczne. A oto inne warunki równoważne[1]:

1. W ujęciu geometrycznym warunek Kählera oznacza styczność drugiego rzędu metryki hermitowskiej i metryki euklidesowej, tzn.:

[1] wiecej na ten temat w [G-H, rozdz. 0, str. 106].

$\forall_{z_0 \in M} \exists_{U - \text{ otwarte otoczenie }} z_0$ na którym istnieje holomorficzny układ współrzędnych z_i, w którym metryka ma postać:

$$ds^2 = \sum(\delta_{ij} + [2])dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

gdzie [2] oznacza człony drugiego rzędu, których pochodne w z_0 są równe 0.

2. ds^2 jest Kählerowska $\Leftrightarrow$ $\forall_{z_0 \in M^n}$ istnieje baza unitarna dla metryki ds^2 czyli taka, że $ds^2 = \sum \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_j$ a ponadto $d\varphi_i(z_0) = 0$

W niniejszej pracy często spotkamy się z formą ω_M stowarzyszoną z metryką nazywaną też formą kählerowską. Reprezentuje ona klasę z drugich kohomologii przestrzeni M, którą będziemy oznaczali tym samym symbolem.

A oto kilka prostych przykładów rozmaitości Kählerowskich:

1. Każda dwuwymiarowa rozmaitość riemanowska, bowiem zawsze można znaleźć układ ortonormalny dla metryki Riemanna.

2. Zespolone przestrzenie rzutowe $\mathbb{C}P^n$, dla których zachodzi

   Fakt 2 [2] *Algebra kohomologii $\mathbb{C}P^n$ o współczynnikch w $\mathbb{C}$ jest izomorficzna algebrze $\mathbb{C}[x]/(x^n)$, gdzie $deg\, x = 2$, ponadto x odpowiada klasie formy $\omega_{\mathbb{C}P^n}$.*

   Zatem forma kählerowska $\omega_{\mathbb{C}P^n}$ generuje całą algebrę kohomologii, a elementami prymitywnymi są zerowe kohomologie.

3. Każda podrozmaitość zespolona w $\mathbb{C}P^n$.

Definicja 4 [3] *Algebrą Liego nazywamy przestrzeń wektorową z dwuargumentową, antysymetryczną operacją spełniającą tożsamość Jacobiego, nazywaną komutatorem:*

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

Z myślą o opisie algebry kohomologii przestrzeni Kählera wprowadzimy pojęcie reprezentacji oraz przejdziemy do ich pełnego opisu w przypadku algebry Liego $sl(2,\mathbb{C})$ – zespolonych macierzy 2×2 o znikającym śladzie. Jej standardowymi generatorami są macierze:

[2]Dowód można znaleźć w [Gr].

[3]Definicję zaczerpnąłem z [G-H, Rozdz. 0, §7, str. 118], więcej na temat teorii reprezentacji algebr Lie można przeczytać w [Bou, część 1, rozdz, 1, §3.1, str. 25]

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Między X, Y i H zachodzą relacje komutacji:

$$[X,Y] = H,\ [H,X] = 2X,\ [H,Y] = -2Y.$$

Definicja 5 *Reprezentacją algebry A na przestrzeni wektorowej V nazywamy homomorfizm algebr Liego $\rho : A \to End(V)$, gdzie $End(V)$ jest algebrą endomorfizmów przestrzeni V z komutatorem $[A,B] = AB - BA$. Podprzestrzeń wektorowa W jest podreprezentacją, jeżeli jest zamknięta ze względu na działanie algebry A na W.*

Definicja 6 *Reprezentaję algebry Liego A, $\rho :\ A \to gl(V)$ nazywamy nieredukowalną jeżeli przestrzeń wektorowa V nie zawiera właściwych podreprezentacji algebry A.*

Fakt 3 *Każda nieredukowalna skończenie wymiarowa reprezentacja algebry $sl(2,\mathbb{C})$, $\rho :\ sl(2,\mathbb{C}) \to gl(V)$ ma postać:*

$$V = V_n \oplus V_{n-2} \oplus \cdots \oplus V_{-n+2} \oplus V_{-n}$$

gdzie V_i jest jednowymiarową podprzestrzenią własną operatora H o wartości własnej równej i. Ponadto $V^{i+2} = \rho(X)\,(V^i)$ oraz $\rho(Y)\,(V^{i+2}) = V^i$.

Przestrzeń V_n będącą jądrem homomorfizmu $\rho(Y)^{n+1}$ (a także jądrem homomorfizmu $\rho(X)$) oznaczamy symbolem PV, a jej elementy nazywamy elementami prymitywnymi, tak więc zgodnie z powyższym faktem $V = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \rho(Y)^i\, PV$.

Fakt 4 *Każda skończenie wymiarowa reprezentacja algebry $sl(2,\mathbb{C})$ na przestrzeni wektorowej V ($dim\, V \leqslant \infty$) rozkłada się na sume prostą nieredukowalnych podreprezentacji V^i, $0 \leqslant i < \infty$, $dim\, V^i = n_i$.*

Szkic dowodu jest zamieszczony w [G-H, Rozdz.0, §7, str. 119] Każda z tych nieredukowalnych podreprezentacji V^i jest generowana przez elementy prymitywne PV^i, tzn. $V^i = \bigoplus\limits_{j \geqslant 0} \rho(Y)^j\, PV^i$. Dla dowolnej reprezentacji algebry $sl(2,\mathbb{C})$ elementy prymitywne zdefiniujemy jako zbiór

$$PV \stackrel{def.}{=} ker(\rho(X)) \simeq \bigoplus_{i \geqslant 0} PV^i$$

Wówczas $V = \bigoplus\limits_{j \geqslant 0} \rho(Y)^j\, PV$.

Podsumujmy: jeżeli na przestrzeni V mamy zadaną reprezentację algebry $sl(2,\mathbb{C})$ to wówczas rozkłada się ona na sumę prostą reprezentacji nieredukowalnych V^i, z czego każda rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni V^i_k złożonych z wektorów własnych operatora H odpowiadających wartości własnej k, zgodnie z faktem 3. Tak więc $V = \bigoplus_{i\geqslant 0,\,k} V^i_k$. Niech $V(m)$ oznacza podprzestrzeń wektorów własnych operatora H o wartości własnej m, wówczas $V(m) = \bigoplus_{i\geqslant 0} V^i_m$.

Ponadto homomorfizmy

$$(*) \quad \rho(X)^m : V(-m) \longrightarrow V(m) \quad \text{oraz} \quad \rho(Y)^m : V(m) \longrightarrow V(-m)$$

są izomorfizmami.

Prawdziwy jest też następujący

Fakt 5 *Niech ρ będzie reprezentacją algebry $sl(2,\mathbb{C})$ na V wówczas*

$$PV \cap V(-m) = ker(\rho(X)) \cap V(-m) = ker(\ \rho(Y)^{m+1} : V(-m) \to V(m+2)\ )$$

Pełne dowody twierdzeń dotyczących algebry $sl(2,\mathbb{C})$ można znaleźć w [G-H, rozdz 0, str. 118].

Twierdzenie 5 *Niech M będzie n–wymiarową rozmaitością Kählera wówczas istnieje reprezentacja algebry $sl(2,\mathbb{C})$ na algebrze $H^*(M)$. Reprezentację zadajemy wzorami:*

$\rho(H) = \sum_{k=0}^{2n} (n-k)\Pi^k$, *gdzie Π^k jest rzutowaniem na k–tą gradację*

$\rho(Y)(\alpha) = \omega_M \cup \alpha$

$\rho(X) = \rho(Y)^*$, *gdzie $*$ oznacza sprzężenie w sensie hermitowskiego iloczynu skalarnego na $\Omega^*_{\mathbb{C}}(M)$ opisanego w rozdziale pierwszym*[4].

Zauważmy, że wówczas przestrzeń $V(m)$ wektorów własnych operatora $\rho(H)$ jest dokładnie równa $H^{(n-m)}(M)$. Jako wniosek, zgodnie z $(*)$, otrzymujemy

Twierdzenie 6 ***Trudne twierdzenie Lefschetza***
Niech M będzie n–wymiarową rozmaitością Kählera. Wówczas mnożenie przez ω^k_M zadaje izomorfizm pomiedzy przestrzeniami $n-k$ i $n+k$ wymiarowych kohomologii.

Wnioskiem z rozważań na temat reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$ jest również

[4]Dowodzi się [G-H], że te operatory są przemienne z Laplasjnaem: $\Delta_d = d\,d^* + d^*\,d$ (d^* jest operatorem sprzężonym do d, który istnieje na rozmaitościach Riemanna), tak więc działają na $\mathsf{H}^p(M)$ – algebrze form harmonicznych, a zgodnie z twierdzeniem Hodge'a: $\mathsf{H}^*(M) \simeq H^*(M)$

Wniosek 1 ***Rozkład Lefschetza***
Niech M będzie jak w twierdzeniu Lefschetza — n–wymiarową rozmaitością Kählera. Zdefiniujmy kohomologie prymitywne

$$P^{n-k}(M) = Ker(Y^{k+1} : H^{n-k}(M) \longrightarrow H^{n+k+2}(M))$$

Wówczas mamy rozkład kohomologii:

$$H^*(M) \simeq \bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant n} P^{n-k}(M)[\omega_M]/\omega_M^{k+1}, \text{ w szczególności}$$

$$H^q(M) \simeq \bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant q} \omega_M^k \cup P^{q-2k}(M) \text{ dla } q \leqslant n$$

Ponadto
$\omega_M \cup \ : H^{n-k}(M) \longrightarrow H^{n-k+2}(M)$ *jest mono dla* $k \geqslant 1$
$\omega_M \cup \ : H^{n+k}(M) \longrightarrow H^{n+k+2}(M)$ *jest epi dla* $k \geqslant 1$

Pełny klasyczny dowód powyższego twierdzenia, bazujący na teorii form harmonicznych Hodga, można znaleźć na przykład w [G-H, rozdz. 0, str. 118–122]. W pracy [L] Eduarda Loojiengi (wykład 3, str. 237) można znaleźć szkic geometryczno – analitycznego dowodu twierdzenia Lefschetza pochodzący od P. Deligne'a, S. Zucker'a lub M. Saito.

Rozdział 3

Co wiemy z prac P. Deligna

Po raz pierwszy rozkład kohomologii dla rozwłóknień orientowalnych opisał André Blanchard w pracy [Bl] pochodzącej z połowy lat '50-tych. W latach '60-tych do tego tematu powrócił Pierre Deligne. Z tego okresu pochodzi praca *Théorème de Lefschetz et critères de dégénŕescence de suites spectrales* [D1]. Jeszcze raz Pierre Deligne podjął się tego tematu w latach '90-tych publikując drugą pracę pod tytułem *Décompositions dans la cátégorie dérivée* [D2], bogatszą i trudniejszą od poprzednich. Opisał w niej trzy kanoniczne rozkłady kohomologii dla rozwłóknień orientowalnych czyli, przypomnijmy: o włóknie kählerowskim i z formą będącą przedłużeniem formy kählerowskiej włókna do formy określonej na całej przestrzeni rozwłóknienia. Praca ta używa zaawansowanego aparatu teorii kategorii oraz algebry homologicznej – jest napisana w języku kategorii pochodnych. Opisuję w tym rozdziale jak wyglądają kohomologie rozwłóknienia orientowalnego o włóknie kählerowskim nad sferami wymiaru $d > 1$ oraz nad zespoloną przestrzenią rzutową. Wyjdziemy z rozważań nad długim ciągiem dokładnym Wanga, który wprowadziliśmy w rozdziale pierwszym:

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H^{*-d}(F) \xrightarrow{i_!} H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \xrightarrow{\partial} H^{*-d+1}(F) \xrightarrow{i_!} \ldots$$

gdzie odwzorowanie $\partial : H^*(F) \to H^{*-d+1}(F)$ jest różniczkowaniem, tzn. spełnia regułę[1]

$$(*) \quad \partial(\alpha \cup \beta) = \partial(\alpha) \cup \beta + (-1)^{(d-1)deg\,\alpha} \alpha \cup \partial(\beta)$$

oraz zeruje się na formie kählerowskiej, co wynika z orientowalności rozwłóknienia i dokładności powyższego ciągu.

Udowodnimy teraz istotny fakt, analogiczny do podstawowego twierdzenia pracy [D1] P. Deligna.

[1] Dowód w [Sp, rozdz. 8.5, str. 516].

Fakt 6 *Różniczkowanie ∂ jest homomorfizmem trywialnym.*

Dowód: Różniczkowanie ∂ zeruje się na formie kählerowskiej, więc z reguły $(*)$ mamy przemienność:

$$\partial(\omega_F \cup \alpha) = \omega_F \cup \partial(\alpha)$$

Na mocy wniosku 1 istnieją elementy prymitywne $\tilde{\alpha_i}$ takie, że:

$$\alpha = \sum \omega_F^{k_i} \cup \tilde{\alpha_i}$$

$$\partial(\alpha) = \partial(\sum \omega_F^{k_i} \cup \tilde{\alpha_i}) = \sum \omega_F^{k_i} \cup \partial(\tilde{\alpha_i})$$

Wystarczy, że udowodnimy zerowanie się homomorfizmu ∂ na elementach prymitywnych.

$$\begin{array}{ccc} P^{n-k}(F) & \xrightarrow{\partial} & H^{n-(k+d-1)}(F) \\ {\scriptstyle \omega_F^{k+1}\cup} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \omega_F^{k+1}\cup} \\ H^{n+k+2}(F) & \xrightarrow[\partial]{} & H^{n+(k-d+3)}(F) \\ & & \downarrow {\scriptstyle \omega_F^{d-2}\cup} \\ & & H^{n+(k+d-1)}(F) \end{array} \qquad \text{mono dla } d \geqslant 2$$

Niech $\alpha \in P^{n-k}(F)$. Z przemienności homomorfizmu ∂ z mnożeniem przez ω_F oraz z elementu α wynika, że:

$$\omega_F^{k+1} \cup \partial(\alpha) = \partial(\omega_F^{k+1} \cup \alpha) \ = \partial 0 = 0 \ ,$$

ale na mocy wniosku 1 w §2 mnożenie przez ω_F^{k+1} jest monomorfizmem na $H^{n-k-d+1}(F)$ dla $d \geqslant 2$ Stąd mamy: $\partial(\alpha) = 0$.

QED

Dowód ten jest analogiczny do tego przeprowadzonego przez P. Deligna zarówno w pracy [D1] jak i [D2], my jednakże używamy znacznie mniej zaawansowanego języka form różniczkowych.

Otrzymujemy ważny wniosek:

Wniosek 2 *Istnieje rozkład*

$$\begin{array}{rcl} H^*(E) & \simeq & H^*(F) \oplus H^{*-d}(F) \\ & = & H^*(S^d) \otimes H^*(F) \end{array}$$

Rozkład ten istnieje, ponieważ każdy krótki ciąg dokładny przestrzeni wektorowych rozszczepia się. W dalszej części pracy pokażemy, że istnieje pewien kanoniczny rozkład kohomologii przestrzeni E na iloczyn tensorowy kohomologii przestrzeni bazowej i włókna.

Rozdział 4

Rozwłóknienia orientowalne nad sferami

W tym rozdziale przyjrzymy się rozwłóknieniom orientowalnym nad sferami: $F \xrightarrow{i} E \to S^d$, gdzie F jest rozmaitością Kählera oraz istnieje rozszerzenie formy $\omega_F \in H^2(F)$ do $\omega_E \in H^2(E)$ to znaczy, że $i^*(\omega_E) = \omega_F$. Pokażemy, że w takiej sytuacji, dla ustalonej formy ω_E istnieje warunek, przy którym istnieje kanoniczny rozkład kohomologii E:

$$H^*(E) \simeq H^*(F) \otimes H^*(S^d) = H^*(F) \oplus H^{*-d}(F) \ .$$

W tym celu skorzystamy z długiego ciągu dokładnego Wanga:

$$\ldots \longrightarrow H^{*-d}(F) \xrightarrow{i_!} H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \xrightarrow{\delta} H^{*-d+1}(F) \longrightarrow \ldots$$

Przypomnijmy, że homomorfizm Gysina spełnia formułę projekcji:

$$i_!(i^*\beta \cup \alpha) = \beta \cup i_!\alpha$$

gdzie $\beta \in H^*(E)$, a $\alpha \in H^*(F)$.

Z rozważań w poprzednim rozdziale wynika, że przy naszych założeniach o rozwłóknieniu różniczka w ciągu Wanga $\delta : \ H^*(F) \to H^{*-d+1}(F)$ jest zerowa i tak długi ciąg dokładny rozpada się na krótkie ciągi dokładne:

$$0 \to H^{*-d}(F) \xrightarrow{i_!} H^*(E) \xrightarrow{i^*} H^*(F) \to 0.$$

Pokażemy, że istnieje pewna kanoniczna lewostronna odwrotność homomorfizmu i^*, nazwiemy ją $\theta : H^*(F) \to H^*(E)$. We wstępie zdefiniowaliśmy kohomologie semiprymitywne dla rozwłóknienia nad sferą jako zbiór:

$$P^{n-k}(E) = \{\alpha \in H^{n-k}(E) : \ \omega_E^{k+d} \cup \alpha = 0 \text{ oraz } \alpha|_F \in P^{n-k}(F)\}$$

Homomorfizm θ jest kanoniczny w tym sensie, że istnieje dokładnie jeden taki homomorfizm, który kohomologie prymitywne włókna przeprowadza na kohomologie semiprymitywne rozwłóknienia E, będąc jednocześnie prawostronną odwrotnością homomorfzimu i^*.

Włókno F jest rozmaitością kählerowską tak więc, zgodnie z rozkładem Lefschetza (rozdz. 2) jego kohomologie, jako algebra z gradacją są generowane przez elementy prymitywne i formę kählerowską. Wystarczy zatem określić odwzorowanie J na tych elementach, wówczas przedłużmy je na całe kohomologie.

Lemat 1 *Dla każdego elementu prymitywnego $\alpha \in P^{n-k}(F)$ istnieje semiprymitywny element $\beta \in P^{n-k}(E)$ taki, że $i^*(\beta) = \alpha$*

Dowód: Homomorfizm indukowany $i^* : H^*(E) \to H^*(F)$ jest epimorfizmem, co wynika z tego, że długi ciąg dokładny Wanga rozpadł się na krótkie ciągi dokładne. Możemy znaleźć $\widetilde{\alpha} \in H^{n-k}(E)$ takie, że $i^*\widetilde{\alpha} = \alpha$. Spróbujemy teraz tak poprawić znaleziony element, aby ten był semiprymitywny, to znaczy spełniał warunek $\omega_E^{k+d} \cup \beta = 0$, a przy tym dalej obcinał się do α. Ponieważ ciąg Wanga jest dokładny, więc aby zachować pierwszy z warunków będziemy poprawiać o element pochodzący z $H^{*-d}(F)$.

Z uwagi na $H^{n+k+2d}(F) \ni i^*(\omega_E^{k+d} \cup \widetilde{\alpha}) = 0$ istnieje $\gamma \in H^{n+k+2d}(F)$ takie, że $\omega^{k+d} \cup \widetilde{\alpha} = i_!\gamma$, a korzystając z twierdzenia Lefschetza znajdujemy $\widetilde{\gamma} \in H^{n-k}(F)$ taki, że $\gamma = \omega_F^{k+d} \cup \widetilde{\gamma}$
Teraz wystarczy zobaczyć, że:

$$\omega_E^{k+d} \cup \widetilde{\alpha} = i_!(\omega_F^{k+d} \cup \widetilde{\gamma}) = i_!((i^*\omega_E)^{k+d} \cup \widetilde{\gamma}) = \omega_E^{k+d} \cup (i_!\widetilde{\gamma})$$

tak więc:

$$\omega_E^{k+d} \cup (\widetilde{\alpha} - i_!\gamma) = 0.$$

Szukanym elementem β jest $\widetilde{\alpha} - i_!\gamma$, ponieważ:

$$i^*(\widetilde{\alpha} - i_!\gamma) = i^*(\widetilde{\alpha}) - i^*i_!(\gamma) = \alpha \quad \text{oraz} \quad \omega_E^{k+d} \cup (\widetilde{\alpha} - i_!\gamma) = 0.$$

QED

Lemat 2 *Dla każdego elementu $\alpha \in P^{n-k}(F)$ element $\beta \in P^{n-k}(E)$, o którym mowa w poprzednim lemacie, jest wyznaczony jednoznacznie.*

Dowód: Wystarczy udowodnić implikację:

$$\omega_E^{k+d} \cup \widetilde{\alpha} = 0 \quad \text{i} \quad i^*(\widetilde{\alpha}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\alpha} = 0$$

Korzystając z dokładności ciągu Wanga otrzymujemy, że

$$\widetilde{\alpha} = i_!(\gamma), \quad \text{gdzie} \quad \gamma \in H^{n-k-d}(F)$$

tak, więc

$$0 = \omega_E^{k+d} \cup i_!(\gamma) = i_!(\omega_F^{k+d} \cup (\gamma))$$

a ponieważ $i_!$ jest monomorfizmem

$$\omega_F^{k+d} \cup \gamma = 0.$$

Z twierdzenia Lefschetza wynika, że

$$\omega_F^{k+d} \cup : H^{n-k-d}(F) \to H^{n+k+d}(F)$$

jest izomorfizmem, tak więc $\gamma = 0$, a więc $\widetilde{\alpha} = i_!(\gamma) = 0$

QED

Twierdzenie 7 *Niech $F \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} S^d$ będzie rozwłóknieniem orientowalnym z włóknem kählerowskim, wówczas istnieje kanoniczne przedłużenie kohomologiczne włókna*

$$\theta : \ H^*(F) \longrightarrow H^*(E)$$

o tej własności, że dla $\alpha \in P^{n-k}(F)$ mamy $\theta(\alpha) \in P^{n-k}(E)$. Homomorfizm ten zadaje izomorfizm

$$H^*(E) \overset{\Phi}{\simeq} H^*(F) \otimes H^*(S^d) \ = \ H^*(F) \oplus H^{*-d}(F),$$

Ponadto na algebrze tensorowej $H^*(F) \otimes H^*(S^d)$ możemy w naturalny sposób zadać mnożenie przez X – generator kohomologii S^d. Wówczas Φ zachowuje to mnożenie, tzn.: niech $\alpha \otimes \beta \in H^*(F) \otimes H^*(S^d)$

$$\Phi(X \cup (\alpha \otimes \beta)) \quad = \quad \pi^* X \cup \Phi(\alpha \otimes \beta)$$

A więc Φ jest izomorfizmem $H^*(S^d)$ modułów.

Dowód: Przyjrzyjmy się ciągowi Wanga:

$$0 \to H^{*-d}(F) \to H^*(E) \to H^*(F) \to 0$$

Z lematów wynika, że dla każdego elementu $\alpha \in P^{n-k}(F)$ istnieje dokładnie jeden element $\beta \in P^{n-k}(E)$ będący przedłużeniem kocyklu α. Możemy zadać homomorfizm przestrzeni wektorowych $\theta : \ P^{n-k}(F) \to H^{n-k}(E)$ wzorem $\theta(\alpha) = \widetilde{\alpha}$. Poprzez mnożenie w kohomologiach i rozkład Lefschetza przedłużymy ten homomorfizm do $\theta : H^{n-k}(F) \to H^{n-k}(E)$.
Niech $\theta(\omega_F) = \omega_E$. Na elementach postaci $\omega^l \cup \gamma$, gdzie $\gamma \in P^{n-k}(F)$

homomorfizm θ zadajemy wzorem $\theta(\alpha) = \theta(\omega^l \cup \gamma) = \omega_E^l \cup \theta(\gamma)$, a ponieważ na mocy wniosku 1 o rozkładzie Lefschetza każdy element kohomologii $H^*(F)$ jednoznacznie przedstawia się jako suma elementów tej postaci, to przedłużamy odwzorowanie θ do liniowego przekształcenia określonego na całych kohomologiach włókna. Mając już skonstruowane przedłużenie kohomologiczne włókna zgodnie z twierdzeniem Lareya – Hirscha homomorfizm

$$\Phi : H^*(F) \otimes H^*(S^d) \longrightarrow H^*(E)$$

zadany wzorem $\Phi(\alpha \otimes \beta) \stackrel{def.}{=} \theta(\alpha) \cup \pi^*\beta$ jest izomorfizmem. Mnożenie przez X na $H^*(F) \otimes H^*(S^d)$ i na $H^*(E)$ definiujemy wzorami

$$\begin{array}{lll} X \cup (\alpha \otimes \beta) & \stackrel{def.}{=} \alpha \otimes (X \cup \beta) & \\ X \cup \eta & \stackrel{def.}{=} \pi^* X \cup \eta & \eta \in H^*(E) \end{array}$$

Wówczas

$$\Phi\Big(X \cup (\alpha \otimes \beta)\Big) = \Phi\Big(\alpha \otimes (X \cup \beta)\Big) = \theta(\alpha) \cup \pi^*(X \cup \beta) = \pi^* X \cup \Phi\Big(\alpha \otimes \beta\Big)$$

Tak więc Φ jest izomorfizmem $H^*(S^d)$ modułów.

QED

Rozdział 5

Rozwłóknienia orientowalne nad przestrzeniami rzutowymi

Rozważymy w tym rozdziale rozwłóknienia orientowalne nad przestrzeniami rzutowymi $\mathbb{C}P^d$. Niech będzie dane takie rozwłóknienie E wraz z filtracją E_q, gdzie E_q jest orientowalnym rozwłóknieniem nad $\mathbb{C}P^q \subseteq \mathbb{C}P^d$ z kählerowskim włóknem F (E_q są podprzestrzeniami E, $q = 0, \ldots, d$). Dla każdego $q \in \{0, \ldots, d-1\}$ mamy przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc} E_{q+1} & \xleftarrow{i_q} & E_q \\ \pi_{q+1} \downarrow & & \downarrow \pi_q \\ \mathbb{C}P^{q+1} & \xleftarrow{i'_q} & \mathbb{C}P^q \end{array}$$

który indukuje odpowiedni przemienny diagram kohomologii. Niech X_d oznacza generator algebry kohomologii $\mathbb{C}P^d$, ponadto definiujemy indukcyjnie $X_{q+1} \overset{def.}{=} i_q'^* (X_q)$ (indukcja od $q = 0$ do d). Przyjmiemy oznaczenia ω_E na klasę formy będącą rozszerzeniem kocyklu ω_F oraz $\omega_{E_q} = \omega_E|_{E_q}$, wówczas E_q jest rozwłóknieniem orientowalnym nad $\mathbb{C}P^q$. Tak jak dla przestrzeni Kählera istotnymi elementami okazują się elementy prymitywne, bowiem wraz z formą ω_F generują algebrę kohomologii, tak dla rozwłóknień orientowalnych analogiczną rolę spełniają elementy semiprymitywne zdefiniowane indukcyjnie ze względu na filtrację E_q przestrzeni rozwóknienia E:

$$P^{n-k}(E_q) \overset{def.}{=} \{\alpha \in H^{n-k}(E_q) : \ \omega_{E_q}^{k+2q} \cup \alpha = 0 \text{ oraz } \alpha|_{E_{q-1}} \in P^{n-k}(E_{q-1})\}$$

wówczas

$$P^{n-k}(E) \overset{def.}{=} \{\alpha \in H^{n-k}(E_q) : \ \omega_{E_q}^{k+2q} \cup \alpha = 0 \text{ oraz } \underset{0 \leqslant q \leqslant d}{\forall} \alpha|_{E_q} \in P^{n-k}(E_q)\}$$

gdzie $n = dim_{\mathbb{C}} F$. Jak się okaże, algebra $H^*(E)$ jest generowana przez klasy ω_E i $\pi^* X$ oraz elementy semiprymitywne, które są izomorficzne z elementami prymitywnymi włókna.

Lemat 3 *Rozważmy ciąg pary (E_q, E_{q-1}) wówczas diagram:*

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{*-1}(E_{q-1}) & \xrightarrow{\delta} & H^{*-2q}(F) & \xrightarrow{j} & H^{*}(E_q) & \longrightarrow & H^{*}(E_{q-1}) \\
{\scriptstyle \omega_{E_{q-1}}\cup}\downarrow & & {\scriptstyle \omega_F\cup}\downarrow & & {\scriptstyle \omega_{E_q}\cup}\downarrow & & {\scriptstyle \omega_{E_{q-1}}\cup}\downarrow \\
H^{*+1}(E_{q-1}) & \xrightarrow{\delta} & H^{*-2q+2}(F) & \xrightarrow{j} & H^{*+2}(E_q) & \longrightarrow & H^{*+2}(E_{q-1})
\end{array}$$

jest przemienny.

Dowód: Ciąg ten powstaje z ciągu dokładnego pary, poprzez wyliczenie kohomologii relatywnych:

$$\begin{array}{rcll}
H^*(E_q, E_{q-1}) & = & H^*(D^{2q} \times F, S^{2q-1} \times F) & \text{aksjomat wycinania} \\
& \simeq & H^*(D^{2q}, S^{2q-1}) \otimes H^*(F) & \text{formuła Künetha} \\
& = & H^{*-2q}(F) &
\end{array}$$

Powyższe równości określają mnożenie przez ω_F na $H^*(E_q, E_{q-1})$, które jest cup – produktem z klasą ω_F przeciągniętą do $H^*(E_q)$. Pokażemy, że to mnożenie jest tym samym co cup – produkt z klasą ω_{E_q}. Chcemy więc udowodnić przemienność diagramu:

$$\begin{array}{ccc}
H^*(E_q, E_{q-1}) & \simeq & H^{*-2q}(F) \\
{\scriptstyle \omega_{E_q}\cup}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_F\cup} \\
H^{*+2}(E_q, E_{q-1}) & \simeq & H^{*-2q+2}(F)
\end{array}$$

Niech f będzie włożeniem $(D^{2q} \times F, S^{2q-1} \times F) \longrightarrow (E_q, E_{q-1})$ indukującym izomorfizm wycinania, a π rzutowaniem $D \times F$ na włókno F. Rozważmy morfizmy:

$$E_q \xleftarrow{f} D \times F \underset{\pi}{\overset{s}{\rightleftarrows}} F$$

gdzie s jest włożeniem $F \xrightarrow{s} \{0\} \times F \subseteq D \times F$. Wówczas z założenia: $s^* f^* \omega_{E_q} = \omega_F$. Na mocy lematu Poincaré $s^*\pi^* = id^*_{D\times F}$, tak więc $f^*\omega_{E_q} = \pi^*\omega_F$. Diagram jest przemienny, bowiem

$$\begin{array}{cclcl}
\omega_F \cup \alpha & \xrightarrow{\pi^*} & \pi^*(\omega_F \cup \alpha) & = & \pi^*(\omega_F) \cup \pi^*(\alpha) \\
& \xrightarrow{(f^*)^{-1}} & (f^*)^{-1}\Big(\pi^*(\omega_F) \cup \pi^*(\alpha)\Big) & = & (f^*)^{-1}\pi^*(\omega_F) \cup (f^*)^{-1}\pi^*(\alpha) \\
& & & = & \omega_{E_q} \cup (f^*)^{-1}\pi^*(\alpha)
\end{array}$$

1. Aby wykazać przemienność całego diagramu

$$\begin{array}{rcccccc}
\delta: & H^{*-1}(E_{q-1}) & \xrightarrow{d} & H^*(E_q, E_{q-1}) & \simeq & H^{*-2q}(F) \\
& {\scriptstyle \omega_{E_{q-1}}\cup}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_{E_q}\cup} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_F\cup} \\
\delta: & H^{*+1}(E_{q-1}) & \xrightarrow{d} & H^*(E_q, E_{q-1}) & \simeq & H^{*-2q+2}(F)
\end{array}$$

wystarczy jeszcze udowodnić przemienność:

$$\begin{array}{ccc} H^{*-1}(E_{q-1}) & \xrightarrow{d} & H^*(E_q, E_{q-1}) \\ {\scriptstyle \omega_{E_{q-1}}\cup} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \omega_{E_q}\cup} \\ H^{*+1}(E_{q-1}) & \xrightarrow{d} & H^{*+2}(E_q, E_{q-1}) \end{array}$$

a ta wynika bezpośrednio z konstrukcji różniczki d w długim ciągu dokładnym pary[1] d: $d(\alpha) = d\widetilde{\alpha}$, gdzie $\widetilde{\alpha}$ jest przedłużeniem formy $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}(E_{p-1})$ do formy określonej na E_p. Ponieważ $\widetilde{\omega_{E_{p-1}}} = \omega_{E_p}$ jest formą zamkniętą, więc

$$d(\omega_{E_{q-1}} \cup \alpha) = d(\omega_{E_q} \cup \widetilde{\alpha}) = (d\omega_{E_q}) \cup \widetilde{\alpha} + \omega_{E_q} \cup d\widetilde{\alpha} = \omega_{E_q} \cup d(\alpha)$$

2. I znów aby udowodnić przemienność

$$\begin{array}{ccc} H^{*-2q}(F) & \xrightarrow{j} & H^{*-1}(E_q) \\ {\scriptstyle \omega_F\cup} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \omega_{E_q}\cup} \\ H^{*-2q+2}(F) & \xrightarrow{j} & H^{*+1}(E_q) \end{array}$$

wystarczy rozważyć diagram

$$\begin{array}{ccc} H^*(E_q, E_{q-1}) & \longrightarrow & H^*(E_q) \\ {\scriptstyle \omega_{E_q}\cup} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \omega_{E_q}\cup} \\ H^{*+2}(E_q, E_{q-1}) & \longrightarrow & H^{*+2}(E_q) \end{array}$$

który jest przemienny, bowiem cup – produkt

$$H^*(X, A) \otimes H^*(X, B) \longrightarrow H^*(X, A \cup B)$$

jest funktorialny względem przekształceń

$$f : (X, A', B') \longrightarrow (X, A, B) \quad (f(A') \subseteq A,\ f(B') \subseteq B)$$

tzn. przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, A) \otimes H^*(X, B) & \xrightarrow{f^* \otimes f^*} & H^*(X, A') \otimes H^*(X, B') \\ \cup \downarrow & & \downarrow \cup \\ H^*(X, A \cup B) & \xrightarrow{f^*} & H^*(X, A' \cup B') \end{array}$$

Wówczas włożenie $i_q : (E_q, \emptyset, \emptyset) \longrightarrow (E_q, E_{q-1}, \emptyset)$ i funktorialność indukują przemienność tej części diagramu.

[1] [Sp, rozdz.4, str. 208]; jedynie w tym miejscu ujawnia się niejednoznaczność oznaczeń, która dotyczy różniczkowania form różniczkowych oraz homomorfizmu łączącego w długim ciągu dokładnym pary.

3. Funktorialność cup – produktu indukuje również przemienność ostatniej części diagramu:

$$\begin{array}{ccc} H^*(E_q) & \longrightarrow & H^*(E_{q-1}) \\ \omega_{E_q}\cup \ \downarrow & & \downarrow \omega_{E_{q-1}}\cup \\ H^{*+2}(E_q) & \longrightarrow & H^{*+2}(E_{q-1}) \end{array}$$

QED

Twierdzenie 8 *Niech będzie dane rozwłóknienie $E \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^d$ o włóknie F będącym przestrzenią Kählera. Załóżmy ponadto, że jest to rozwłóknienie orientowalne, tzn. takie, że istnieje przedłużenie formy kählerowskiej do zamkniętej formy określonej na całej przestrzeni rozwłóknienia. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedłużenie kohomologiczne włókna*

$$\theta : \ H^*(F) \longrightarrow H^*(E)$$

takie, że $\theta(P^*(F)) \subseteq P^*(E)$ oraz $\theta(\omega_F^i \cup \alpha) = \omega_E^i \cup \theta(\alpha)$ dla $\alpha \in P^{n-k}(F)$ oraz $i \leqslant k$. Przedłużenie kohomologiczne włókna zadaje izomorfizm przestrzeni wektorowych z gradacją

$$H^*(E) \overset{\Phi}{\simeq} H^*(F) \otimes H^*(\mathbb{C}P^d)$$

o własnościach: $\Phi(\omega_F \otimes 1) = \omega_E$ oraz $\Phi(\alpha \otimes 1) \in P^{n-k}(E)$ dla $\alpha \in P^{n-k}(F)$.

Dowód: Niech $\omega_{E_q} \overset{ozn.}{=} \omega_E|_{E_q}$. Wówczas rozwłóknienie $E_q \longrightarrow \mathbb{C}P^q$ jest orientowalne (istnieje przedłużenie formy ω_F do $\omega_{E_q} \in H^2(E_q)$). Dowód twierdzenia przeprowadzimy przez indukcję względem q. Na początek rozpatrujemy rozwłóknienie $E_1 \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ z włóknem F. Dla takich rozwłóknień udowodniliśmy w rozdziale czwartym, że różniczka w ciągu dokładnym Wanga zerujesię się oraz istnieje rozszczepienie krótkiego ciągu dokładnego. Skonstruowaliśmy homomorfizm oznaczany teraz jako θ_1 o własnościach:

1_1 $i^* \circ \theta_1 = id_F^* \overset{ozn.}{=} \theta_0$

2_1 $\theta_1(\omega_F) = \omega_{E_1}$

3_1 $\theta_1(\alpha) \in P^*(E_1)$ dla $\alpha \in P^*(F)$

4_1 $\theta_1(\omega_F^i \cup \alpha) = \omega_{E_1}^i \cup \theta_1(\alpha)$ dla $\alpha \in P^{n-k}(F)$ oraz $i \leqslant k$

Co więcej istnieje dokładnie jeden homomorfozm o tych własnościach.

Indukcyjnie skonstruujemy przedłużenia kohomologiczne θ_q dla E_q $(q = 0, \ldots, d)$, tak że kolejne jest przedłużeniem poprzedniego, tzn. diagram:

$$\begin{array}{ccc} H^*(E_q) & \longrightarrow & H^*(E_{q-1}) \\ \theta_q \nwarrow & & \nearrow \theta_{q-1} \\ & H^*(F) & \end{array}$$

jest przemienny dla każdego $q \in \{1, \ldots, d\}$. Wypiszmy założenia indukcyjne w $q-1$ kroku:

1_{q-1} Istnieje θ_{q-1} przedłużenia kohomologiczne włókna, które jest przedłużeniem θ_{q-2}, tzn. diagram:

$$\begin{array}{ccc} H^*(E_{q-1}) & \longrightarrow & H^*(E_{q-2}) \\ \theta_{q-1} \nwarrow & & \nearrow \theta_{q-2} \\ & H^*(F) & \end{array}$$

jest przemienny[2].

2_{q-1} $\theta_{q-1}(\omega_F) = \omega_{E_{q-1}}$

3_{q-1} $\theta_{q-1}(\alpha) \in P^*(E_{q-1})$ dla $\alpha \in P^*(F)$, co więcej $\theta_{q-1}(\alpha)$ jest jedynym elementem semiprymitywnym, który obcina się do klasy $\alpha \in P^*(F)$.

4_{q-1} $\theta_{q-1}(\omega_F^i \cup \alpha) = \omega_{E_{q-1}}^i \cup \theta_{q-1}(\alpha)$ dla $\alpha \in P^*(F)$ oraz $i \leqslant k$

Dowód kroku indukcyjnego zakończymy konstruując przedłużenie kohomologincze włókna θ_q dla rozwłóknienia E_q. Załóżmy więc, że istnieje (i to dokładnie jeden) homomorfizm θ_{q-1} o własnościach 1_{q-1}, 2_{q-1}, 3_{q-1} i 4_{q-1}. Pokażemy że istnieje dokładnie jeden homomorfizm

$$\theta_q : H^*(F) \longrightarrow H^*(E_q)$$

mający własności 1_q, 2_q, 3_q oraz 4_q. Najpierw jednak pokażemy, że $\delta : H^{n-k}(E_{q-1}) \to H^{n-k-2q+1}(F)$ zeruje się na $im\, \theta_{q-1} \subseteq H^{n-k}(E_{q-1})$.

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-k}(E_q) & \longrightarrow & H^{n-k}(E_{q-1}) & \xrightarrow{\delta} & H^{n-k-2q+1}(F) \\ & & \uparrow \theta_{q-1} & & \\ & & H^{n-k}(F) & & \supseteq P^{n-k}(F) \end{array}$$

Zgodnie z własnością 4_{q-1} oraz lematem 3 poniższy diagram jest przemienny:

---

[2]założenie, że kolejne homomorfizmy są przedłużeniami poprzednich implikuje to, że wszystkie są przedłużeniami kohomologicznymi włókna

$$\begin{array}{ccc}
P^{n-k}(E_{q-1}) & \xrightarrow{\delta} & H^{n-k-2q+1}(F) \\
{\scriptstyle \omega_{E_{q-1}}^{k+2(q-1)}\cup}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_F^{k+2(q-1)}\cup} \\
H^{n+k+4(q-1)}(E_{q-1}) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+k+2q-3}(F) \\
& & \downarrow{\scriptstyle \omega_F\cup} \\
& & H^{n+k+2q-1)}(F)
\end{array} \qquad \text{mono}$$

Mnożenie przez $\omega_{E_{q-1}}^{k+2(q-1)}$ jest monomorfimem

$$H^{n-k-2q+1}(F) \longrightarrow H^{*+k+2q-3}(F)$$

bowiem mnożenie przez ω_F^{k+2q-1} zadaje izomorfizm. Ponieważ mnożenie przez $\omega_{E_{q-1}}^{k+2(q-1)}$ jest zerowym homomorfizmem na $P^{n-k}(E_{q-1})$ (co wynika wprost z definicji elementów semiprymitywnych) tak więc z przemienności diagramu otrzymujemy, że

$$\delta|_{P^{n-k}(E_{q-1})} = 0$$

A z uwagi na to, że $\omega_{E_{q-1}} = \theta_{q-1}(\omega_F)$ przedłuża się na E_q dostajemy, re $\omega_F \in ker(\delta \circ \theta_{q-1})$ – wprost z dokładności ciągu pary (E_q, E_{q-1}). Z przemienności homomorfizmu δ z mnożeniem przez $\omega_{E_{q-1}}$ (lemat 3) oraz własności 4_{q-1} otrzymujemy, że $\delta|_{im\,\theta_{q-1}} = 0$.

Dalej udowodnimy, że

$$(*) \quad \forall \alpha \in P^{n-k}(E_{q-1})\ \exists!\, \beta \in P^{n-k}(E_q) \text{ taka, że } i^*(\beta) = \alpha$$

Wówczas będziemy umieli określić θ_q na elementach prymitywnych: niech $\alpha \in P^{n-k}(F)$ wówczas $\theta_{q-1}(\alpha) \in P^{n-k}(E_{q-1})$ a na mocy $(*)$ istnieje dokladnie jedno przedłużenie $\theta_{q-1}(\alpha)$ do elementu $\beta \in P^{n-k}(E_q)$, θ_q definiujemy wzorem $\theta_q(\alpha) = \beta$. Dalej θ_q przedłużamy na całą dziedzinę: z rozkładu Lefschetza, każdy element $\alpha \in H^*(F)$ jest postaci $\alpha = \sum_i \omega_F^{k_i} \cup \alpha_i$ gdzie elementy prymitywne $\alpha_i \in P^{n-k_i}(F)$ są jednoznacznie wyznaczone, wówczas $\theta(\alpha) = \sum_i \omega_{E_q}^{k_i} \cup \theta_q(\alpha_i)$. Wprost z tej konstrukcji wynika, że homomorfizm θ_q spełnia 2_q i 4_q. Aby zakończyć konstrukcję homomorfizmu θ_q pozostaje dowieść $(*)$, zrobimy to w dwóch krokach:

Lemat 4 *Dla każdego $\alpha \in P^{n-k}(E_{q-1})$ istnieje klasa β w $(n-k)$'tych kohomologiach E_q taka, że:*

$$i^*(\beta) = \alpha \quad \text{oraz} \quad \omega_{E_q}^{k+2q} \cup \beta = 0$$

Dowód: Istnieje $\widetilde{\alpha} \in H^{n-k}(E_q)$ taka, że:

$$i^*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$$

gdyż δ zeruje się na $P^*(E_{q-1})$.

$$i^*(\omega_{E_q}^{k+2q} \cup \widetilde{\alpha}) = \omega_{E_q}^{k+2q} \cup \alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists_{\gamma \in H^{n+k+2q}(F)}\ \omega_{E_q}^{k+2q} \cup \widetilde{\alpha} = j(\gamma)$$

Na mocy trudnego twierdzenia Lefschetza istnieje

$$\widetilde{\gamma} \in H^{n-k-2q}(F) \quad \text{taka, że} \quad \gamma = \omega_F^{k+2q} \cup \widetilde{\gamma}$$

Wówczas
$\omega_{E_q}^{k+2d} \cup \widetilde{\alpha} = j(\omega_F^{k+2d} \cup \widetilde{\gamma}) = \omega_{E_q}^{k+2d} \cup j(\widetilde{\gamma})$ czyli

$$\omega_{E_q}^{k+2d} \cup \underbrace{(\widetilde{\alpha} - j(\widetilde{\gamma}))}_{\beta} = 0$$

Tak więc znaleźliśmy element $\beta \in H^{n-k}(E)$, który spełnia żądane warunki:

$$i^*(\beta) = i^*(\widetilde{\alpha}) = \alpha$$
$$\omega_{E_q}^{k+2d} \cup \beta = 0$$

QED

Lemat 5 *Isnieje tylko jeden element β taki, że*

$$i^*(\beta) = \alpha \quad \textit{oraz} \quad \omega_{E_q}^{k+2q} \cup \beta = 0.$$

Dowód: Wystarczy udowodnić, że:

$$\begin{array}{ll} (1) & \omega^{k+2q} \cup \widetilde{\alpha} = 0 \\ (2) & i^*(\widetilde{\alpha}) = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\alpha} = 0$$

Z dokładności ciągu $(*)$ oraz (2) wynika, że istnieje element $\gamma \in H^{n-k-2q}(F)$ taki, że $\widetilde{\alpha} = j(\gamma)$, tak więc

$$0 = \omega_{E_q}^{k+2q} \cup \widetilde{\alpha} = \omega_{E_q}^{k+2q} \cup j(\gamma) = j(\omega_F^{k+2q} \cup \gamma)$$

Klasa γ jest homologiczna zeru, bowiem j i mnożenie przez ω_F^{k+q} są monomorfizmami:

$$j : \ H^{*-2q}(F) \simeq H^*(E_q, E_{q-1}) \xrightarrow{\text{mono}} H^*(E_q)$$
$$\omega_F^{k+2q} \cup \ : H^{n-k-2q}(F) \xrightarrow{\text{izo}} H^{n+k+2q}$$

QED

Tak więc skonstruowaliśmy homomorfizm θ_q, który jest przedłużeniem homomorfizmu θ_{q-1} (na mocy lematu 4 i udowodnionej już własności 4_q) tak więc spełniony jest warunek 1_q; spełniony również jest warunek 3_q, co wynika wprost z lematu 5. Niniejszym zakończyliśmy dowód kroku indukcyjnego, ponieważ wcześniej już udowodniliśmy, że zachodzą warunki 2_q i 4_q. Izomorfizm iloczynu tensorowego kohomologii włókna i bazy z kohomologiami przestrzeni rozwłóknienia otrzymujemy korzystając z twierdzenia 4 Lareya – Hirscha. Niech $\alpha \in P^{n-k}(F)$ wówczas

$$\Phi(\alpha \otimes 1) \;=\; \theta(\alpha) \in P^{n-k}(E)$$

albowiem $\omega_E^{k+2d} \cup \alpha \;=\; 0$ oraz $\theta(\alpha)|_F \;=\; i^*\theta(\alpha) \;=\; \alpha$ i $\Phi(\omega_F \otimes 1) \;=\; \theta(\omega_F) \cup \pi^*(1) = \omega_E$.

QED

Uwaga: Ponieważ w dowodzie twierdzenia 8 korzystaliśmy z trudnego twierdzenia Lefschetza a nie z bezpośrednio z kählerowskości włókna tak więc można osłabić założenia rozważając tylko rozwłóknienia z włóknem, którego kohomologie mają strukturę $sl(2,\mathbb{C})$ modułu.

Na przestrzeni $H^*(F) \otimes H^*(\mathbb{C}P^d)$ istnieje naturalnie zdefiniowane mnożenie przez elementy $H^*(F)$ oraz $H^*(\mathbb{C}P^d)$ Zadane jest ono wzorami:

$$\begin{aligned} \gamma \cup \Big(\alpha \otimes w(X)\Big) \quad &= (\gamma \cup \alpha) \otimes w(X) \\ w'(X) \cup \Big(\alpha \otimes w(X)\Big) \quad &= \alpha \otimes \Big(w'(X) \cdot w(X)\Big) \end{aligned}$$

gdzie α, $\gamma \in H^*(F)$, A w i w' są wielomianami stopnia mniejszego niż $d+1$ od X – generatora $H^*(\mathbb{C}P^d) = \mathbb{C}[X]/X^{d+1}$.

Dla dowolonego rozwłóknienia kohomologie przestrzeni rozwłóknienia są modułem nad pierścieniem kohomologii bazy, jak się okazuje skonstruwany izomorfizm jest izomorfizmem takich modułów. Przykład zawarty w rozdziale szóstym pokazuje, że Φ nie zachowuje mnożenia przez elementy kohomologii włókna.

Fakt 7 *Niech* $\Phi : \; H^*(F) \otimes H^*(\mathbb{C}P^d) \longrightarrow H^*(E)$ *będzie izomorfizmem skonstruowanym dla rozwłóknienia orientowalnego* $\pi : \; E \longrightarrow \mathbb{C}P^d$. *Wówczas homomorfizm* Φ *jest homomorfizmem* $H^*(\mathbb{C}P^d)$ *modułów.*

Dowód: Jest tak ponieważ $\Phi(\alpha \otimes w(X)) = \theta(\omega) \cup \pi^* w(X)$, a π^* zachowuje cup – produkt, który jest w dodatku przemienny dla elementów parzystej gradacji takich jak X.

QED

Uwaga: Nawet w najprostszym przypadku, gdy F jest rozmaitością rzutową skonstruowane przedłużenie kohomologiczne włókna nie musi być homomorfizmem algebr, tzn. nie zachowuje cup – produktu, również w naszym przykładzie (rozdział 6) tak się okaże.

Wniosek 3 *Algebra kohomologii orientowalnego rozwłóknienia nad zespoloną przestrzenią rzutową jest generowana przez elementy semiprymitywne oraz rozszerzoną formę kählerowską włókna ω_E i $\pi^* X$, gdzie X jest generatorem algebry kohomologii bazy, a π^* jest homomorfizmem indukowanym przez rozwłóknienie. Ponadto: $P^*(E) \simeq P^*(F)$.*

Dowód: Uzasadnienia wymaga: $P^*(E) \simeq P^*(F)$. Izomorfizmem jest, jak się okazuje, homomorfizm indukowany poprzez włożenie włókna w przestrzeń rozwłóknienia. Z definicji kohomologii semiprymitywnych oraz lematu 5 homomorfizm i_q^* dla każdego $q \in \{0, \cdots, n\}$ wkłada $P^*(E_q)$ w $P^*(E_{q-1})$ (tzn. jest monomorfizmem). Z drugiej strony i_q^* jest epimorfizmem kohomologii semiprymitywnych przestrzeni E_q i E_{q-1}, bowiem zgodnie z lematem 4 każdy element semiprymitywny E_{q-1} ma jednoznaczne przedłużenie do elementu semiprymitywnego E_q.

QED

Wniosek 4 *Niech $F \to E \to \mathbb{C}P^n$ będzie rozwłóknieniem jak w twierdzeniu 8. Wówczas istnieje kanoniczny izomorfizm*

$$H^{n-k}(E) \simeq H^{n+k+2d}(E)$$

który jednakże nie jest, jak ten w trudnym twierdzeniu Lefschetza, zadany przez iloczyn z pewnym wyróżnionym kocyklem.

Uwaga: Wymiary izomorficznych przestrzeni kohomologii dopełniają się do wymiaru przestrzeni rozwłóknienia – w tej sytuacji mamy również dualność Poincaré'go, jednakże pojawiający się w tym wniosku izomorfizm nie jest tym samym co dualność Poincaré'go

$$H^k E \simeq H_{\dim E - k}(E)$$

Zauważmy, że w ogólności dla rozmaitości M nie istnieje naturalny izomorfim $H^k(M) \simeq H^{\dim M - k}(M)$

Dowód: Na mocy twierdzenia 8 mamy izomorfizmy:

$$\begin{array}{lcl} H^{n-k}(E) & \simeq & \bigoplus\limits_{0 \leqslant i \leqslant d} X^i H^{n-k-2i}(F) \\ H^{n+k+2d}(E) & \simeq & \bigoplus\limits_{0 \leqslant i \leqslant d} X^i H^{n+k+2d-2i}(F) \simeq \bigoplus\limits_{0 \leqslant i \leqslant d} X^{d-i} H^{n+k+2i}(F) \\ H^{n-k}(F) & \simeq & H^{n+k}(F) \end{array}$$

Szukany izomorfizm jest zadany formułą:

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant d} X^i\,\alpha_i \longrightarrow \sum_{0\leqslant i\leqslant d} X^{d-i}\,\omega_F^{k+2i}\cup\alpha_i$$

gdzie $\alpha_i \in H^{n-k-2i}(F)$

QED

Rozdział 6

Przykład

W tym rozdziale przedstawimy zastosowania otrzymanych wyników do pewnych znanych rozmaitości.

Definicja 7 *Flagą w n wymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej V nazywamy zbiór podprzestrzeni $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n = V$ takich, że $\dim A_i = i$. Niech Fl(V) będzie zbiorem wszystkich flag przestrzeni V.*

Fakt 8 *Zbiór Fl(V) ma strukturę rozmaitości.*

Dowód: Przyjmiemy, że $V = \mathbb{C}^n$, co nie zmniejsza ogólności. W tej sytuacji zbiór $Fl(V)$ oznacza się jako $F(n)$ i jest tranzytywnym $GL(n)$ zbiorem, gdzie $GL(n)$ oznacza grupę liniowych automorfizmów przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Stabilizatorem flagi $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{C}^n = V$ jest grupa Borela B_n macierzy trójkątnych górnych. Mamy bijekcję $Fl(V) \simeq GL(n)/B_n$, topologię na $F(n)$ indukujemy z $GL(n)/B_n$. Ponieważ $Gl(n)$ jest grupą Liego, a B_n jego domkniętą podgrupą, tak więc zbiór $Gl(n)/B_n$ jest rozmaitością. Zbiór $F(n)$ ze strukturą rozmaitości indukowaną z $GL(n)/B_n$ będziemy nazywać rozmaitością flag.

QED

Niech I_n oznacza ideał wielomianów symetrycznych w pierścieniu wielomianów n zmiennych nad ciałem $\mathbb{C}$. Wielomiany symetryczne to te, które są niezmiennicze przy działaniu grupy permutacji Σ_n poprzez permutowanie zmiennych. Ideał ten jest generowany przez algebraicznie niezależne elementarne wielomiany symetryczne n zmiennych:

$$u_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} \text{ dla } k = 1, \ldots, n$$

Fakt 9 *Pierścień kohomologii rozmaitości flag $F(n)$ (o współczynnikach w $\mathbb{C}$) jest izomorficzny z pierścieniem $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I_n$, gdzie $deg\, x_i = 2$. Mnożeniu $\cup$ w pierścieniu kohomologii rozmaitości flag $F(3)$ odpowiada mnożenie $\cdot$ w pierścieniu ilorazowym pierścienia wielomianów.*

Dowód powyższego faktu można znaleźć w książce [BT] R. Bott i L. W. Tu *Differential Forms in Algebraic Topology* [rozdz. IV, §21].

Teraz dokładniej opiszemy zespolone przestrzenie rzutowe $\mathbb{C}P^{n-1}$. Są one zbiorami jednowymiarowych podprzestrzeni zespolonej n wymiarowej przestrzeni wektorowej; równoważnie: zbiorem hiperpłaszczyzn V, bo każda hiperpłaszczyzna jest zadana przez dokładnie jedną prostą z V.

Stwierdzenie 1 *Rozmaitość $F(n)$ rozwłóknia się nad $\mathbb{C}P^{n-1}$ z włóknem $F(n-1)$.*

Dowód: Niech P_n będzie podgrupą paraboliczną w $GL(n)$, tzn. grupą macierzy postaci:

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Tu $*$ oznacza dowolną liczbę zespoloną. Wówczas Grupa Borela macierzy górnych trójkątnych jest podgrupą tej grupy. Mamy wówczas rozwłóknienie:

$$\begin{array}{rcl} P_n/B_n & \to & GL(n)/B_n \\ & & \downarrow \\ & & GL(n)/P_n \end{array}$$

W naturalny sposób $P_n/B_n \simeq GL(n-1)/B_{n-1}$, tak więc włóknem rozwłóknienia $F(n)$ nad $\mathbb{C}P^n$ jest rozmaitość flag o jeden stopień mniejsza.

QED

Przyjrzymy się teraz bliżej pierścieniowi kohomologii przetrzenii $F(3)$.

Fakt 10 *W pierścieniu $H^*(F(3))$ istnieje element $\omega_{F(3)} \in H^2(F(3))$, który zadaje izomorfizmy:*

$$\omega_{F(3)} \cup \_ : \; H^2(F(3)) \to H^4(F(3))$$

$$\omega_{F(3)}^3 \cup \_ : \; H^0(F(3)) \to H^6(F(3))$$

Dowód: Zgodnie z faktem 9, będziemy utożsamiać pierścienie $H^*(F(3))$ oraz $\mathbb{C}[x,y,z]/(x+y+z, xy+yz+zx, xyz)$, $deg\, x = deg\, y = deg\, z = 2$. Najpierw zauważmy, że pierścień ten ma postać:

stopień	*generatory*	*relacje*
6	xy^2	$x^3 = 0 = y^3 \quad xy^2 = -x^2y$
4	$x^2 \quad y^2$	$x^2 + y^2 = -xy$
2	$x \quad y$	
0	1	

Niech $\omega_{F(3)} = 1/2(x-y)$, wówczas:

$$\omega_{F(3)} \cdot x = 1/2(x^2 - xy) \overset{ozn.}{=} a$$

$\omega_{F(3)} \cdot y = 1/2(xy - y^2) \overset{ozn.}{=} b$, a stąd

$$a + b = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

$a - b = -\frac{3}{2}xy = \frac{3}{2}(x^2+y^2)$ zgodnie z relacją $x^2 + y^2 = -xy$ tak, że

$$x^2 = \frac{5}{6}\,a - \frac{1}{6}\,b$$

$$y^2 = -\frac{1}{6}\,a - \frac{5}{6}\,b$$

tak, więc rzeczywiście $\omega_{F(3)} \cup : H^2(F(3)) \to H^4(F(3))$ jest izomorfizmem, drugi homomorfizm też jest izomorfizmem bo $\omega_{F(3)}{}^3 = \frac{1}{4}x^2y$, a w dodatku jest to generator $H^6(F(3))$.

QED

Wniosek 5 *Forma $\omega_{F(3)}$ zadaje rozkład Lefschetza kohomologii przestrzeni flag $F(3)$. Przy czym*

$$\begin{array}{lll}
P^0 & \omega^4_{F(3)} \cup \alpha = 0 & P^0(F(3)) = H^0(F(3)) \\
P^1 & \omega^3_{F(3)} \cup \alpha = 0 & P^1(F(3)) \subseteq H^1(F(3)) = 0 \\
P^2 & \omega^2_{F(3)} \cup \alpha = 0 & P^2(F(3)) = \{a(x+y)|\, a \in \mathbb{C}\} \\
P^3 & \omega_{F(3)} \cup \alpha = 0 & P^3(F(3)) \subseteq H^3(F(3)) = 0
\end{array}$$

tak, więc $H^*(F(3)) = P^2(F(3))[\omega_{F(3)}]/(\omega_{F(3)^3}) \oplus P^0[\omega_{F(3)}]/(\omega^7_{F(3)})$

Dowód: Najpierw policzmy potęgi kocyklu $\omega_{F(3)}$

$\omega_{F(3)}$	$\omega^2_{F(3)}$	$\omega^3_{F(3)}$
$\frac{1}{2}(x-y)$	$\frac{1}{4}(x^2+y^2-2xy) = -\frac{3}{4}xy$	$-\frac{3}{8}xy^2 + \frac{3}{8}x^2y = \frac{3}{4}x^2y$

Sprawdzenia wymaga jedynie równość

$$P^2(F(3)) = \{a(x+y)|\, a \in \mathbb{C}\}$$

Elementy $P^2(F(3))$ to są tylko te elementy $H^2(F(3)) = \{ax + by|\, a, b \in \mathbb{C}\}$, które spełniają warunek

$$\omega^2_{F(3)} \cup (ax + by) = 0,$$

Podstawiając $\omega_{F(3)} = \frac{1}{2}(x-y)$ i pamiętając o relacjach w algebrze $H^*(F(3))$: $x^3 = y^3 = 0$ oraz $xy^2 = -x^2y$ otrzymujemy

$$0 = (x-y)^2(ax+by) = (x^2-2xy+y^2)(ax+by) = (-2ax^2y-2bxy^2) = 2(a-b)xy^2$$

stąd $a = b$ i $P^2(F(3)) = \{a(x + y)|\, a \in \mathbb{C}\}$.

Ostatni wzór tezy dostajemy zgodnie z wzorem

$$H^*(F(3)) = \bigoplus_k P^{n-k}(F(3))[\omega_{F(3)}]/(\omega^{k+1}_{F(3)}).$$

QED

Zbadamy teraz dwa rozwłóknienia $F(2) \to F(3) \to \mathbb{C}P^2$ oraz $F(3) \to F(4) \to \mathbb{C}P^3$.

Fakt 11 *Istnieje kanoniczny rozkład kohomologii*

$$H^*(F(3)) \simeq H^*(\mathbb{C}P^1) \otimes H^*(\mathbb{C}P^2)$$

Dowód: Ponieważ $F(3)$ jest projektywizacją kanonicznej wiązki wektorowej nad $\mathbb{C}P^2$ (o włóknie $\mathbb{C}P^1$) i korzystając z rachunku klas Cherna[1] dostajemy tezę. W tym przypadku izomorfizm ten jest zadany przez przedłużenie kohomologiczne włókna, które generator kohomologii włókna $x \in \mathbb{C}P^1$ przekształca na $x \in \mathbb{C}[x, y, z]/I_3$. Korzystając z twierdzenia 8 możemy skonstruować odpowiedni izomorfizm, który nie jest taki sam jak ten opisany w [BT, rozdz. IV, §21]. Aby to pokazać rozpatrzmy włożenie $F(2) \to F(3)$, które indukuje $H^*(F(3)) \to H^*(F(2))$, a na mocy faktu 9 jest to homomorfizm pierścieni

$$(*) \quad \mathbb{C}[x, y, z]/(x + y + z, xy + yz + zx, xyz) \;\to\; \mathbb{C}[x, y]/(x + y, xy)$$

zadany przez: $x \mapsto x$, $y \mapsto y$ i $z \mapsto 0$. Oczywiście

$$\mathbb{C}[x, y]/(x + y, xy) \simeq \mathbb{C}[y]/(y^2) = H^*(\mathbb{C}P^1)$$

Klasa formy kählerowskiej włókna $\omega_{\mathbb{C}P^1} = x$. Zauważmy, że $\omega_{F(3)} = \frac{1}{2}(x-y)$ przechodzi przy izomorfiźmie $(*)$ na $\omega_{\mathbb{C}P^1}$. Spełnione są założenia twierdzenia 8, tak więc istnieje kanoniczny izomorfizm

$$H^*(F(3)) \simeq H^*(\mathbb{C}P^2) \otimes H^*(F(2))$$

[1]Elementarne wprowadzenie klas Cherna wraz z opisem tego izomorfizmu dla dowolnej przestrzeni rzutowej znajduje się w [BT, rozdz. IV, §21].

zadany przez wybór $\theta(\omega_{\mathbb{C}P^1}) = \omega_{F(3)}$. Zatem $\theta(x) = \frac{1}{2}(x-y) \neq x$, tak więc izomorfizm skonstrowany w [BT, rozdz. IV, §21] oraz ten rozważany w tym fakcie są różne. Wybierając inne przedłużenie formy kählerowskiej włókna, również i tą drogą można otrzymać izomorfizm skonstruowany rachunkiem klas Cherna: poprzez wybór $\omega_{F(3)} = x$. Ten wybór nie daje jednak rozkładu Lefschetza kohomologii $F(3)$.

QED

Fakt 12 *Istnieje kanoniczny rozkład kohomologii $F(4)$*

$$H^*(F(4)) \simeq H^*(F(3)) \otimes H^*(\mathbb{C}P^3).$$

Dowód: Niech $F(4) = \{l \subseteq P \subseteq V \subseteq \mathbb{C}^4| \quad \}$, gdzie $l \simeq \mathbb{C}$ oznacza prostą, $P \simeq \mathbb{C}^2$ płaszczyznę, a $V \simeq \mathbb{C}^3$ trójwymiarową podprzestrzeń w $\mathbb{C}^4$. Wówczas mamy filtrację:

$$\begin{array}{ccccccc} F(4) & \supseteq & E_2 & \supseteq & E_1 & \supseteq & F(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^3 & \supseteq & \mathbb{C}P^2 & \supseteq & \mathbb{C}P^1 & \supseteq & * \end{array}$$

Niech $e_i,\ (i = 1, 2, 3, 4)$ oznacza standardową bazę $\mathbb{C}^4$, definiujemy :

$$\begin{array}{rcl} E_2 & \overset{def.}{=} & \{l \subseteq P \subseteq V \subseteq \mathbb{C}^4|\ e_1 \in V\} \\ E_1 & \overset{def.}{=} & \{l \subseteq P \subseteq V \subseteq \mathbb{C}^4|\ e_1, e_2 \in V\} \end{array}$$

Wówczas

$$\begin{array}{rcl} H^*(E_1) & = & \mathbb{C}[x, y, z, w]/(I_4, w^2) \\ H^*(E_2) & = & \mathbb{C}[x, y, z, w]/(I_4, w^3) \end{array}$$

Mamy diagram kohomologii

$$\mathbb{C}[x, y, z, w]/(I_4) \xrightarrow{i_2^*} \mathbb{C}[x, y, z, w]/(I_4, w^3) \xrightarrow{i_1^*} \mathbb{C}[x, y, z, w]/(I_4, w^2) \xrightarrow{i_0^*} \mathbb{C}[x, y, z, w]/(I_4, w) = \\ = \mathbb{C}[x, y, z]/(I_3)$$

gdzie kolejne przekształcenia odwzorowują generatory na generatory oraz zerują kolejne potęgi w.

Jedyne niezerowe elementy prymitywne włókna to $P^0(F) = H^0(F)$ oraz $P^2 = \{a(x + y)|\ a \in \mathbb{C}\}$. Prezdłużenie formy kählerowkiej włókna wybieramy, tak że $\omega_{F(4)} = \frac{1}{2}(x - y)$ tak samo definiujemy ω_{E_2} oraz ω_{E_1}. Uwidacznia się w tym miejscu kolizja oznaczeń: we wszystkich algebrach rozpatrujemy elementy, którym przyporządkowujemy te same symbole $x,\ y,\ z,$ i w. Jedyne elementy semiprymitywne $F(4)$ można odnaleźć w $H^2(F(4))$ oraz $H^0(F(4)) = P^0(F(4))$. Ponieważ

$$H^2(F(4)) \overset{i_2^*}{\simeq} H^2(E_2) \overset{i_1^*}{\simeq} H^2(E_1)$$

oraz $\omega^{1+6}_{F(4)} = 0$, $\omega^{1+4}_{E_2} = 0$, tak więc

$$P^2(F(4)) \overset{i_2^*}{\simeq} P^2(E_2) \overset{i_1^*}{\simeq} P^2(E_1)$$

Wystarczy zatem, że policzymy elementy semiprymitywne

$$P^2(E_1) \;=\; \{\alpha H^2(E_1) |\; \omega^{1+2}_{E_1} \cup \alpha = 0 \text{ oraz } \alpha|_{\mathrm{F(3)}} = \mathrm{a(x+y)}\}$$

Homomorfizm $i_0^* :\; H^2(E_1) \longrightarrow H^2(F)$ zeruje tylko element w, tak więc $\alpha \in P^2(E_1)$ będzie postaci $\alpha \;=\; a(x+y) + bw$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ a jest już zadane, a poszukujemy b. Pokażemy, że jeżeli α spełnia równanie:

$$\omega^{1+2}_{E_1} \cup \alpha \;=\; 0$$

to $b = \frac{2}{3}a$. Najpierw udowodnimy, że $x^4 = 0$ w $\mathbb{C}[x, y, z, w]/I_4$, tak więc z symetrii również y^4, z^4 i w^4 są równe zero.

$$\begin{array}{lcll}
x^4 & = & -x \cdot (-x^3) \;=\; (y+z+w)(y^3+z^3+w^3) & \\
 & = & y^4+z^4+w^4+(y^3z+y^3w+z^3y+z^3w+w^3y+w^3z) & \\
 & = & -x^3(y+z+w) - x(y^3+z^3+w^3) & \text{z relacji } \sum\limits_{\mathrm{i<j}} \mathrm{x_i^3 x_j} = 0 \\
 & = & x^4 + x^4 \;=\; 2\,x^4 &
\end{array}$$

tak więc $x^4 = y^4 = z^4 = 0$, pokażemy teraz, że $xyz = 0$ w $\mathbb{C}[x, y, z, w]/(I_4, w^2)$

$$\begin{array}{lcll}
 & & xyz + xyw + xzw + yzw = 0 & \\
 & & xyz + w(xy + xz + yz) = 0 & \\
xyz & = & (x+y+z)(xy+xz+yz) & \\
 & = & 3xyz + x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) & \\
 & = & 3xyz \;+\; x^2y + y^2x & \\
 & & \quad\;\; +\; x^2z + z^2x & \\
 & & \quad\;\; +\; y^2z + y^2z & \\
 & = & 3xyz \;-\; w(x^2+y^2+z^2) & \text{z relacji } \sum\limits_{i<j} x_i^2 x_j \;= 0,\; w^2 \;= 0 \\
 & = & 3xyz \;+\; w^3 \;=\; 3xyz &
\end{array}$$

Tak więc rzeczywiście $xyz \;=\; 0$. Równanie:

$$\omega^3_{E_1} \cup \alpha \quad = \quad 0$$

Przybiera postać

$$a(x+y)(x-y)^3 + bw(x-y)^3 \quad = \quad 0$$

Zauważmy, że

$$\begin{array}{lcl}
(x-y)^3(x+y) & = & (x-y)^2(x^2-y^2) \\
 & = & (x^2-2xy+y^2)(x^2-y^2) \\
 & = & -2xy(x^2-y^2)
\end{array}$$

Policzmy teraz $w(x-y)^3$

$$\begin{array}{rcllr} w(x-y)^3 & = & -(x+y+z)(x-y)^3) & & \\ & = & \quad -(x+y)(x-y)^3 & -z(x-y)^3 & \\ & = & -(x^2-y^2)(x-y)^2 & -z(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3) & \\ & = & -(x^4-y^4-(x^2-y^2)2xy) & -z(x^3-y^3) & \\ & = & 2xy(x^2-y^2) & -z(x+y)(x^2-y^2) & \text{bo } xyz=0 \\ & = & 2xy(x^2-y^2) & +xy(x^2-y^2) & \text{bo } xy+xz+yz=0 \\ & = & 3xy(x^2-y^2) & & \end{array}$$

Tak więc otrzymaliśy równanie:

$$xy(x^2-y^2)(2a-3b) \;=\; 0$$

skąd wynika, że $b = \frac{2}{3}a$. Dłuższym rachunkiem można pokazać, że b, a więc i θ_1 jest jednoznacznie wyznaczone.

Na mocy rozważań przeprowadzonych na początku niniejszej konstrukcji

$$\begin{array}{ll} P^2(E_2) & = \{a(x+y)+\frac{2}{3}aw|\ a\in\mathbb{C}\} \\ P^2(F(4)) & = \{a(x+y)+\frac{2}{3}aw|\ a\in\mathbb{C}\} \end{array}$$

Przedłużenia kohomologiczne włókna θ_i $(i=1,2,3)$ są zadane na elementach prymitywnych tą samą formułą: $\theta_i(a(x+y)) \;=\; a(x+y)+\frac{2}{3}aw$, oraz

$$\theta_i(\omega_{F(3)}) \;=\; \omega_{E_i} \;=\; \frac{1}{2}(x-y)$$

Przyjrzyjmy się bliżej $\theta_3:\ H^*(F(3)) \longrightarrow H^*(F(4))$

$$\begin{array}{rcll} \theta_3(x) & = & \theta(\frac{1}{2}(x-y)+\frac{1}{2}(x+y)) & \\ & = & \theta_3(\frac{1}{2}(x-y))+\theta_3(\frac{1}{2}(x+y)) & \\ & = & \frac{1}{2}(x-y)+\frac{1}{2}(x+y)+3w & = x+3w \end{array}$$

Bardzo podobnym rachunkiem można pokazać:

$$\begin{array}{rcl} \theta_3(y) & = & y+3w \\ \theta_3(z) & = & \theta_3(-x-y) \\ & = & -\theta_3(x)-\theta_3(y) \\ & = & \quad -x-y-6w \end{array}$$

Aby policzyć θ_3 na x^2 i y^2 zauważmy najpierw, że

$$x^2+y^2 \;=\; -xy$$

Tak jest ponieważ:

$$\begin{array}{lcl} x^2+y^2+z^2 & = & 0 \\ x^2+y^2+(-x-y)^2 & = & 0 \\ 2x^2+2y^2+2xy & = & 0 \end{array}$$

Odnotujmy, że

$$(x-y)^2 \;=\; x^2-2xy+y^2 \;=\; 3(x^2+y^2)$$

Wówczas

$$\begin{array}{lcl}\theta_3(\omega^2_{F(3)}) & \stackrel{def.}{=} & \omega^2_{F(4)} \\ \theta_3(\frac{1}{4}(x-y)^2) & = & \frac{1}{4}(x-y)^2 \\ & = & \frac{1}{4}(x^2-2xy+y^2)\end{array}$$

tak więc

$$\begin{array}{lcl}\theta_3(x^2+y^2) & = & \frac{1}{3}(x^2-2xy+y^2) \\ \theta_3(x^2-y^2) & = & \theta_3((x-y)(x+y)) \\ & = & (x-y)\theta_3(x+y) \\ & = & (x-y)(x+y+6w) \\ & = & x^2-y^2+6w(x-y)\end{array}$$

Stąd mamy wzory

$$\begin{array}{lcl}\theta_3(x^2) & = & 2x^2-xy+y^2+3w(x-y) \\ \theta_3(y^2) & = & x^2-xy-2y^2-3w(x-y)\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}\theta_3(x^2y) & = & \theta_3(\frac{-1}{6}(x-y)^3) \\ & = & \frac{-1}{6}(x-y)^3 \\ & = & \frac{-1}{6}(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)\end{array}$$

oraz

$$\begin{array}{lcl}\theta_3(x) & = & x+3w \\ \theta_3(y) & = & y+3w\end{array}$$

Jak łatwo zauważyć θ_3 nie jest homomorfizmem algebr, bowiem

$$\theta_3(xy) \;=\; -\theta_3(x^2+y^2) \;=\; -\frac{1}{3}(x-y)^2 \;\neq\; (x+3w)(y+3w) \;=\; \theta_3(x)\theta_3(y)$$

Izomorfizm iloczynu tensorowego kohomologii włókna $F(3)$ i bazy $\mathbb{C}P^3$ z kohomologiami przestrzeni rozwłóknienia $F(4)$ zadany jest wzorem:

$$\Phi(\alpha\otimes\beta) \;=\; \theta_3(\alpha)\cup\pi^*(\beta)$$

a z uwagi na strukturę kohomologii bazy $\pi^*\beta \;=\; v(w)$, gdzie v jest wielomianem stopnia mniejszego niż $d+1$. Wówczas mamy wzór:

$$\Phi(\alpha\otimes\beta) \;=\; \theta_3(\alpha)\cdot v(w)$$

QED

Bibliografia

[D1] Pierre Deligne, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénŕescence de suites spectrales*, Ins. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 35, 259–278, 1968.

[D2] Pierre Deligne, *Décompositions dans la cátégorie dérivée*, Proceedings of Symposia in Pure Mathemtics, Volume 55 (Part 1), 1994.

[Bl] M. André Blanchard *Sur les variétés analytiques complexes*, Am. Sci. Ecole Norm. Sup (3), 157–202, 1956.

[L] Eduard Looijenga, *Cohomology and intersection homology af algebraic varieties*, IAS/Park City Mathematics Series Volume 3, 1997

[G-H] P.Griffiths – J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, A Wiley–Interscience Publications, 1978.

[B] A. Birkholc, *Analiza matematyczna funkcje wielu zmiennych*, PWN Warszawa, 2002.

[Sp] Edwin H. Spanier, *Topologia algebraiczna*, PWN Warszawa, 1966

[W] F.W. Warner *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[Bou] N. Bourbaki *Lie Groups and Lie Algebras*, Hermann, Publishers in arts and science, 1975.

[BT] R. Bott i L.W. Tu *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1982.

[Gr] M. J. Greenberg *Wykłady z topologii algebraicznej*, PWN, Warszawa, 1980.

[W] R. O. Wells, Jr. *Differential Analysis on Complex Manifolds* Graduate Texts in Mathematics, 65. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.