Zadania pisemne na 10 listopada

W poniższych zadaniach $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych 0, 1, 2, ..., $\langle a, b\rangle$ oznacza parę uporządkowaną.

Zadanie 1.
Niech
$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1 \ \wedge \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ 2^n x \in \mathbb{N}\}\,.$$
Ponadto dla $x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ niech
$$B_{x,\varepsilon} = \{y \in \mathbb{R} \ : \ |x - y| < \varepsilon\}\,.$$
Opisać zbiór
$$\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{x\in A} B_{x,\varepsilon}\,.$$

Zadanie 2.
Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $[n] = \{k \in \mathbb{N} \ : \ 0 < k \leqslant n\}$.
a) Wypisać wszystkie funkcje „na” z [3] do [2].
b) Ile jest funkcji „na” z $[n]$ do [2]?
c) Ile jest funkcji „na” z $[n]$ do [3]?

Zadanie 3.
Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem $f(t) = \langle t^2, (t+1)^2\rangle$.
a) czy funkcja f jest różnowartościowa?
b) czy funkcja f jest „na”?
c) czy f jest bijekcją pomiędzy $\mathbb{R}$ a zbiorem $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geqslant 0 \ \wedge \ y \geqslant 0\}$.