Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 5 maja

Zadanie 1 [z zeszłego tygodnia] W algebrze Hecke $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), B_n(\mathbb{F}_q))$ generatory $T_i = \mathbb{1}_{s_i}$ są odwracalne, zatem element $T_w = \mathbb{1}_w$ (będący produktem generatorów) jest odwracalny dla dowolnej permutacji $w \in \mathfrak{S}_n$. Niech $R_{x,w} \in \mathbb{Z}[q]$ będą takimi wielomianami, że

$$T_{w^{-1}}^{-1} = (-q)^{-\ell(w)} \sum_{x \leqslant w} (-1)^{\ell(x)} R_{x,w}(q)\,.$$

Udowodnić dla $w, x \in \mathfrak{S}_n$, $s = s_i = (i, i+1)$, $sw < w$

$$\begin{aligned} &R_{w,w} = 1 \\ &R_{x,w} = R_{sx,sw} \quad \text{jeśli } x < w, \quad sx < x \\ &R_{x,w} = (q-1)R_{x,sw} + qR_{sw,sw} \quad \text{jeśli } x < w, \quad x < sx \end{aligned}$$

[Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*] §7.5

Zadanie 2 [z zeszłego tygodnia] Niech $e(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]]$ będzie szeregiem formalnym. Zdefiniujmy operację Θ_i działającą na szeregach formalnych $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $0 < i < n$

$$\Theta_i(f) = \frac{f}{e(x_i - x_{i+1})} - \frac{s_i f}{e(x_{i+1} - x_i)}\,.$$

Dla jakich szeregow $e(x)$ spełniona jest relacja warkoczowa?

Wskazówka: Przykładem jest $e(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}$. Szukać rozwiązań postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{b_n}{n!} x^n\,.$$

Patrz rachunki w Mathematice
`http://www.mimuw.edu.pl/~aweber/RepiGeo/Wolfram_Mathematica/Uogolnione_operacje_demazura.pdf`

Zadanie 3 Korzystając z formuły Deodhara obliczyć wszystkie wielomiany $R_{x,w_0}(q)$ dla algebry Hecke $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_q), B_3(\mathbb{F}_q))$.

Zadanie 4 [**Wirtualne wielomiany Poincaré**] Dla gładkiej rzutowej rozmaitości nad $\mathbb{C}$ niech

$$P_X(t) = \sum_{i=0}^{2\dim X} \dim H^k(X;\mathbb{Q}) t^i\,.$$

a) Wykazać, że wielomiany $P_X(t)$ spełniają relację

$$P_{B_C X}(t) - P_E(t) = P_X(t) - P_C(t)$$

gdzie $C \subset X$ jest gładką podrozmaitością w X, $B_C X$ jest rozdmuchaniem w C, a $E \subset B_C X$ jest dywizorem wyjątkowym.

(Patrz: Griffiths-Harris, str. 605.)

Mając powyższą relację, z twierdzenia o słabej faktoryzacji wynika, że addytywny niezmiennik

$$X \mapsto P_X(t)$$

jest dobrze zdefiniowany dla dowolnych rozmaitości, niekoniecznie rzutowych i gładkich.

b) Rozłożyć przecięcie otwartych komórek przeciwnych $X_{w_0} \cap X^{id} \subset Fl(\mathbb{C}^3)$ na zbiory postaci $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})^k$ i policzyć $P_{X_{w_0} \cap X^{id}}(t)$.

c) Wykazać, że

$$R_{x,y}(t^2) = P_{\Omega_{x,y}}(t)\,, \qquad \Omega_{x,y} := X_y \cap X^x = ByB/B \cap B_- xB/B\,.$$