Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 28 kwietnia **Porządek Bruhata.**

Niech x, y będą permutacjami. Mówimy, że $x < y$ jeśli $BxB/B \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B_n(\mathbb{C})$ jest zawarte w domlnięciu ByB/B.

Zadanie 1 W algebrze Hecke $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), B_n(\mathbb{F}_q))$ generatory $T_i = 1\!\!1_{s_i}$ są odwracalne, zatem element $T_w = 1\!\!1_w$ (będący produktem generatorów) jest odwracalny dla dowolnej permutacji $w \in \mathfrak{S}_n$. Niech $R_{x,w} \in \mathbb{Z}[q]$ będą takimi wielomianami, że

$$T_{w^{-1}}^{-1} = (-q)^{-\ell(w)} \sum_{x \leqslant w} (-1)^{\ell(x)} R_{x,w}(q)\,.$$

Udowodnić dla $w, x \in \mathfrak{S}_n$, $s = s_i = (i, i+1)$, $sw < w$

$$\begin{aligned}
&R_{w,w} = 1 \\
&R_{x,w} = R_{sx,sw} \quad \text{jeśli } x < w, \quad sx < x \\
&R_{x,w} = (q-1)R_{x,sw} + qR_{sw,sw} \quad \text{jeśli } x < w, \quad x < sx
\end{aligned}$$

[Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*] §7.5

Zadanie 2 [Dualność] Niech $w_0 \in \mathfrak{S}_n$ będzie najdłuższą permutacją. Udowodnić, że

$$R_{x,w} = R_{w_0 w, w_0 x}\,.$$

Zadanie 3 Niech $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$. Zdefiniujmy operację θ_i działającą na funkcjach wymiernych $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $0 < i < n$

$$\theta_i(f) = \frac{(a + bx_i + cx_{i+1})f - (a' + b'x_i + c'x_{i+1})s_i f}{x_i - x_{i+1}}\,,$$

gdzie s_i jest operacją polegającą na zamianie i-tej z $i+1$-szą zmienną.

1. Dla jakich a, b, c, a', b', c' operacje θ_i zachowują wielomiany $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \subset \mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?
2. Dla jakich a, b, c, a', b', c' operacje θ_i zachowują wielomiany Laurenta $\mathbb{Q}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$?
3. Załóżmy, że $a = a' = 1$. Dla jakich b, c, b', c' jest spełniona relacja warkoczowa $\theta_i\theta_{i+1}\theta_i = \theta_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}$?

Zadanie 4 Niech $e(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]]$ będzie szeregiem formalnym. Zdefiniujmy operację Θ_i działającą na szeregach formalnyc $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $0 < i < n$

$$\Theta_i(f) = \frac{f}{e(x_i - x_{i+1})} - \frac{s_i f}{e(x_{i+1} - x_i)}\,.$$

Dla jakich szeregow $e(x)$ spełniona jest relacja warkoczowa?

Wskazówka: Przykładem jest $e(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}$.