Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 21 kwietnia

Rozwiązanie zeszłotygodniowego zadania: Niech $G \subset SU(2)$ będzie grupą cykliczną generowaną przez $\begin{pmatrix} e^{2\pi i/n} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/n} \end{pmatrix}$ oraz przez transformację $(z_1, z_2) \mapsto (-z_2, z_1)$. Niech $R = \mathbb{C}[z_1, z_2]^G$. Udowodnić, że algebra R jest generowana przez 3 elementy, znaleźć jej prezentację.

Oczywiście wystarczy zakładać, że n jest parzyste, bo druga transformacja generuje $-id$. Przyjmijmy więc $n = 2m$. Niech $u = z_1, v = z_2$ będą współrzędnymi na $\mathbb{C}^2$. Wielomiany

$$\begin{aligned} x &= uv(u^{2m} - v^{2m}) \\ y &= u^{2m} + v^{2m} \\ z &= u^2v^2 \end{aligned}$$

są niezmiennicze. Należy sprawdzić, że $\mathbb{C}[u, v]^G$ jest generowane przez x, y, z. Wielomiany te spełniają relację

$$f = z(y^2 - 4z^m) - x^2 = 0\,.$$

Ręcznie trzeba sprawdzić, że $ker(\mathbb{C}[x, y, z] \to \mathbb{C}[u, v]^G) = (f)$.
Aby obliczyć wielomian Poincare-Hilberta stosujemy wzór

$$P(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - tg)}\,.$$

Dla $n = 4$ mamy:
$g = id \rightsquigarrow$ *składnik* $\frac{1}{(1-t)^2}$,
$g = -id \rightsquigarrow$ *składnik* $\frac{1}{(1+t)^2}$,
$g \in \{\pm i, \pm j, \pm k\} \rightsquigarrow$ *składnik* $\frac{1}{(1-it)(1+it)} = \frac{1}{1+t^2}$.
Dostajemy

$$P(t) = \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} + 6\frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^6}{(1-t^4)^2}\,.$$

Zadanie 1 Niech F będzie ciałem skończonym oraz $G = \mathrm{SL}_2(F)$ i niech $B \subset G$ będzie podgrupą macierzy górnotrójkątnych. Niech $\omega : F^* \to \mathbb{C}^*$ będzie homomorfizmem. Zadajemy działanie grupy B na $\mathbb{C}$ wzorem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot z = \omega(a)z\,.$$

Wykazać, że reprezentacja grupy G indukowana z powyższej reprezentacji grupy B jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy $\omega(F^*) \not\subset \{1, -1\}$.

Zadanie 2 Niech $G = \mathfrak{S}_{n+m}$ (grupa permutacji $n+m$ elementów) oraz niech $B = \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ (w sposób naturalny zanurzona w G). Wykazać, że algebra Hecke $\mathcal{H}(G, H)$ jest przemienna.

Wskazówka: Jeśli G ma antyautomorfizm (tzn $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$), taki, że $\varphi(g) \in BgB$ dla każdego $g \in G$, to $\mathcal{H}(G, B)$ jest przemienna.

Zadanie 3 Niech G będzie grupą skończoną, a X rodziną podgrup cyklicznych w G. Opisać kojądro homomorfizmu

$$\bigoplus_{H \in X} Ind_H^G : \bigoplus_{H \in X} R(H) \quad\longrightarrow\quad R(G)\,.$$

Dla grup $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, D_8, D_{10}, a może nawet dla Q_8.

(Patrz tw Artina [Serre §9.2])

Zadanie 4 Niech $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$, B podgrupa macierzy górnotrójkątnych. Znaleźć centrum (oprócz $1\!\!1_{id}$ i $1\!\!1_{G/B} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} 1\!\!1_\pi$ jest jeszcze jeden wyróżniony element należący do centrum).

Ponadto: $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)) \simeq k \times k \times \mathrm{End}(k^2)$ *dla* $k = \mathbb{C}$. *To jest ćwiczenie 4.10 w* [Krieg, *Hecke algebras*]