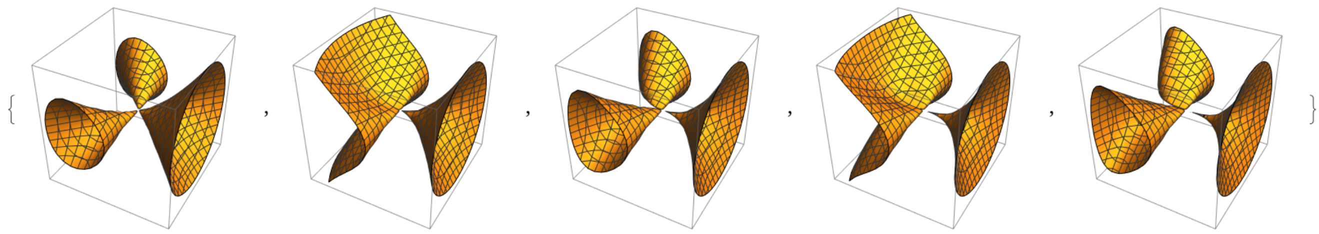
Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 14 kwietnia

Zadanie 1 Niech $H \subset SU(2)$ będzie grupą cykliczną generowaną przez $\begin{pmatrix} e^{2\pi i/n} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/n} \end{pmatrix}$ oraz przez transformację $(z_1, z_2) \mapsto (-z_2, z_1)$. Niech $R = \mathbb{C}[z_1, z_2]^H$. Udowodnić, że algebra R jest generowana przez 3 elementy, znaleźć jej prezentację.

Wskazówka: Osobliwości DuVala https://homepages.warwick.ac.uk/∼masda/surf/more/DuVal.pdf

```
f[n_] := x^(n-1) - x y^2 - z^2
Table[ContourPlot3D[f[n] == 0, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, Axes → False], {n, 4, 8}]
```
tabela trójwymiarowy wykres konturowy osie fałsz



Sprawdzić, że szereg Poincaré-Hilberta jest równy $\frac{1+t^{2(n-1)}}{(1-t^4)\left(1-t^{2(n-2)}\right)}$.

Zadanie 2 **Dualność: grupa $G \Longleftrightarrow$ {zbiór reprezentacji nieprzywiedlnych}** - *Wzór Plancherella.* Niech G będzie grupą skończoną oraz $\varphi : G \to \mathbb{C}$ dowolną funkcją. Udowodnić wzór

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\varphi(g)|^2 = \sum_{\lambda \text{ nieprzywiedlna}} n_\lambda \, tr(T_{\varphi,\lambda} \circ T^*_{\varphi,\lambda}) \,.$$

W powyższej formule przyjmujemy, że nieprzywiedlne reprezentacje są unitarne $\rho_\lambda : G \to U(n_\lambda) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_\lambda})$,

$$T_{\varphi,\lambda} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \rho_\lambda(g) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n_\lambda})$$

oraz $T^*_{\varphi,\lambda}$ oznacza operator sprzężony.

Zadanie 3 Niech F będzie ciałem skończonym oraz $G = \mathrm{SL}_2(F)$ i niech $B \subset G$ będzie podgrupą macierzy górnotrójkątnych. Niech $\omega : F^* \to \mathbb{C}^*$ będzie homomorfizmem. Zadajemy działanie grupy B na $\mathbb{C}$ wzorem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot z = \omega(a) z \,.$$

Wykazać, że reprezentacja grupy G indukowana z powyższej reprezentacji grupy B jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy gdy $\omega(F^*) \not\subset \{1, -1\}$.

Zadanie 4 Niech $G = \mathfrak{S}_{n+m}$ (grupa permutacji $n+m$ elementów) oraz niech $B = \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ (w sposób naturalny zanurzona w G). Wykazać, że algebra Hecke $\mathcal{H}(G, H)$ jest przemienna.

Wskazówka: Jeśli G ma antyautomorfizm (tzn $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$), taki, że $\varphi(g) \in BgB$ dla każdego $g \in G$, to $\mathcal{H}(G, B)$ jest przemienna.

Zadanie 5 Niech G będzie grupą skończoną, a X rodziną podgrup cyklicznych w G. Opisać kojądro homomorfizmu

$$\bigoplus_{H \in X} Ind_H^G : \bigoplus_{H \in X} R(H) \longrightarrow R(G) \,.$$

Dla grup $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, D_8, D_{10}, a może nawet dla Q_8.

(Patrz tw Artina [Serre §9.2])