Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 24 i 31 marca

Zadanie 0 (zrobione) Udowodnić, że współczynnik przy q^i w wielomianie $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ jest równy:

a) ilości ciągów nierosnących $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$ takich, że
– $\lambda_1 \leqslant n - k$,
– $\lambda_k \geqslant 0$,
– $\sum_{k=1}^{k} \lambda_k = i$;

b) ilości warstw $[\sigma] \in \mathfrak{S}_n/(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ takich, że $\min\left(\ell(\sigma') \mid \sigma' \in [\sigma]\right) = i$;

c) ilości B_n-orbit w $Gr_k(\mathbb{C}^n)$, homeomorficznych z $\mathbb{C}^i$.

Zadanie 1 *Przypomnienie* $\Psi_k(f)(g) = f(g^k)$. Niech $G = \mathfrak{S}_3 = D_6$ działa na $\mathbb{R}^2$ jak izometrie trójkąta równobocznego. Używając operacji Adamsa Ψ_k znaleźć charakter $Sym^4(\mathbb{R}^2)$. Znaleźć krotności reprezentacji prostych w $Sym^4(\mathbb{R}^2)$. (To zadanie raczej trzeba robić z pomocą np Mathemtiki.)

Zadanie 2 (zrobione) Niech G będzie grupą cykliczną rzędu n. Generator działa na $V = \mathbb{C}^2$ tak: $(z_1, z_2) \mapsto (\xi_n z_1, \xi_n^{-1} z_2)$, gdzie ξ_n jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki. Niech $R = \mathbb{C}[V]^G$.
a) Udowodnić, że algebra R jest generowana przez 3 elementy, znaleźć jej prezentację.
b)* Udowodnić

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim\left(Sym^k(V)^G\right) t^k = \frac{1 + t^n}{(1 - t^2)(1 - t^n)}.$$

Zadanie 3 Niech $H \subset SU(2)$ będzie grupą cykliczną generowaną przez G z poprzedniego zadania oraz przez transformację $(z_1, z_2) \mapsto (-z_2, z_1)$. Niech $R = \mathbb{C}[V]^H$. Udowodnić, że algebra R jest generowana przez 3 elementy, znaleźć jej prezentację.

Zadanie 4 Dualność: grupa $G \Longleftrightarrow$ {zbiór reprezentacji nieprzywiedlnych} - *Wzór Plancherella.* Niech G będzie grupą skończoną oraz $\varphi : G \to \mathbb{C}$ dowolną funkcją. Udowodnić wzór

$$\tfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\varphi(g)|^2 = \sum_{\lambda \text{ nieprzywiedlna}} n_\lambda \, tr(T_{\varphi,\lambda} \circ T^*_{\varphi,\lambda})\,.$$

W powyższej formule przyjmujemy, że nieprzywiedlne reprezentacje są unitarne $\rho_\lambda : G \to U(n_\lambda) \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_\lambda})$,

$$T_{\varphi,\lambda} = \tfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \rho_\lambda(g) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n_\lambda})$$

oraz $T^*_{\varphi,\lambda}$ oznacza operator sprzężony.

Zadanie 5 Niech $G = D_{10}$ tzn grupa izometrii pięciokąta.
a) Ile jest nieizomorficznych nieprzywiedlnych reprezentacji G?
b) Znaleźć wymiary reprezaentacji nieprzywiedlnych.
c) Opisać nieprzywiedlne reprezentacje i znaleźć ich charaktery.

Wskazówka do b): skorzystać ze wzoru $|G| = \sum n_\lambda^2$.

Zadanie 6 Niech G będzie grupą permutacji $\mathfrak{S}_4$ lub $\mathfrak{S}_5$.
a) Ile jest nieizomorficznych nieprzywiedlnych reprezentacji G?
b) Znaleźć wymiary reprezaentacji nieprzywiedlnych.