Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 17 marca

Zadanie 1 [Ciąg dalszy zadania 1 z poprzedniej serii]
Udowodnić, że współczynnik przy q^i w wielomianie $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ jest równy:

a) ilości ciągów nierosnących $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$ takich, że
– $\lambda_1 \leqslant n - k$,
– $\lambda_k \geqslant 0$,
– $\sum_{k=1}^{k} \lambda_k = i$;

b) ilości warstw $[\sigma] \in \mathfrak{S}_n / (\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ takich, że $\min\left(\ell(\sigma') \mid \sigma' \in [\sigma]\right) = i$;

c) ilości B_n-orbit w $Gr_k(\mathbb{C}^n)$, homeomorficznych z $\mathbb{C}^i$.

Nie jestem pewien, która z tych interpretacji została do końca wyjaśniona na zeszłych ćwiczeniach.

Zadanie 2 Niech G będzie grupą skończoną. Rozważamy zbiór funkcji $G \to \mathbb{C}$ jako reprezentację $G \times G$

$$((g_1, g_2) \cdot f)(h) := f(g_1^{-1} h g_2)\,.$$

Udowodnić, że jako reprezenyacja $G \times G$

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_\lambda \mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda)\,,$$

przy czym $G \times G$ działa na $\mathrm{Hom}(V_\lambda, V_\lambda)$ tak: $(g_1, g_2) \cdot \phi := g_1 \circ \phi \circ g_2^{-1}$.

Zadanie 3 Niech $\rho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją, t zmienną formalną. Definiujemy

$$S_t(V) = \sum_{n=1}^{\infty} [Sym^n V] t^n \in R(G)[[t]]\,, \qquad \Lambda_t(V) = \sum_{n=1}^{\dim V} [\Lambda^n V] t^n \in R(G)[t]\,.$$

Udowodniliśmy, że

$$\chi_{S_t(V)}(g) = \frac{1}{\det(1 - t\rho(g))}\,, \qquad \chi_{\Lambda_t(V)}(g) = \det(1 + t\rho(g))\,.$$

Niech $\Psi_k : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ będzie zadane formułą

$$(\Psi_k f)(g) := f(g^k)\,.$$

Udowodnić formułę opisującą charaktery potęg symetrycznych i zewnętrznych:

$$\chi_{S_t(V)} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k(\chi_V)}{k} t^k\right)\,, \qquad \chi_{\Lambda_t(V)} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Psi_k(\chi_V)}{k} t^k\right)\,.$$

Patrz: [J-P. Serre, Reprezentacje liniowe grup skończonych, PWN 1988], §9.1

Zadanie 4 Dla algebry (nad ciałem) z gradacją $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ definiujemy szereg Hilberta-Poincaré

$$P(R, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(R_n) t^n\,.$$

Niech $\rho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej. Grupa G działa na pierścieniu funkcji wielomianowych na V. Niech $R = \mathbb{C}[V]^G$ będzie pierścieniem niezmienników. Ma on filtrację stopniem indukowaną z pierścienia $\mathbb{C}[V] \simeq \mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_{\dim V}]$. Udowodnić formułę

$$P(R, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - t\rho(g))}\,.$$

Zadanie 5 Niech $G = D_8$ lub Q_8, tzn grupa izometrii kwadratu lub kwaterniony. Wypisać wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne nad $\mathbb{C}$ (jest ich tyle ile klas sprzężoności), rozłożyć $\mathbb{C}[G]$ na reprezentacje nieprzywiedlne. Znaleźć mnożenie w pierścieniu reprezentacji $R(G)$.