Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 16 czerwca

Zadanie 1 Udowodnić wzór

$$S_{\lambda^\vee}(t_1, t_2, t_3, \dots) = \det \begin{pmatrix} \boxed{e_{\lambda_1}} & e_{\lambda_1+1} & \dots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & \boxed{e_{\lambda_2}} & \dots & e_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & & & \\ e_{\lambda_n-n+1} & e_{\lambda_1} & \dots & \boxed{e_{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

[Patrz: Fulton-Harris A2 str 463-464.]

Zadanie 2 Udowdnić formułę dotyczącą funkcji supersymetrycznych

$$S_\lambda(X;Y) = S_{\lambda^\vee}(Y;X)\,.$$

Zadanie 3 [Kluczowy rachunek do zadania 5 z poprzedniego tygodnia.] Niech $B \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ działa poprzez formułę

$$\begin{pmatrix} t_1 & x \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \cdot z = t_1^a t_2^b z\,.$$

Definiujemy wiązkę liniową nad $L = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times_B \mathbb{C} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/B$. Nad zbiorem $U \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/B$ sparametryzowanym przez macierze $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ definiujemy przekrój wiązki L

$$A(t) \mapsto [(A(t), 1)] \in L = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C})/\sim\,.$$

Określić, czy ten przekrój w punkcie $s_1B/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B/B$ ma zero czy biegun i jakiej krotności. Skoro $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/B \simeq \mathbb{P}^1$, to wiązka L jest izomorficzna z $\mathcal{O}(k)$ dla pewnego k. Znaleźć k.

Zadanie 4 Mamy naturalne włożenia

$$Gr^n(\mathbb{C}^{m+n}) = Gr_m(\mathbb{C}^{m+n}) \hookrightarrow Gr_m(\mathbb{C}^{m+n+1}) = Gr^n(\mathbb{C}^{m+n+1})\,,$$

$$Gr_m(\mathbb{C}^{m+n}) = Gr^n(\mathbb{C}^{m+n}) \hookrightarrow Gr^n(\mathbb{C}^{m+n+1}) = Gr_{m+1}(\mathbb{C}^{m+n+1})\,.$$

Czy obrazy komórek Schuberta są komórkami Schuberta (przy odpowiednim doborze flag)? Jak się zmieniają indeksy λ?

Zadanie 5 Mamy oczywiste rzutowanie z przestrzeni flag do grassmanianu

$$\pi : Fl(\mathbb{C}^{m+n}) \to Gr_m(\mathbb{C}^{m+n})\,.$$

Czy obrazy komórek Schuberta są komórkami Schuberta (przy odpowiednim doborze flagi)? Czy przeciwobrazy rozmaitości Schuberta są rozmaitościami Schuberta? Dla danego podziału λ wskazać permutację $w \in \mathfrak{S}_{m+n}$ taką, że X_w^o odwzorowuje się izomorficznie na Ω_λ^o.