Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 7 czerwca

Zadanie 1 Wykazać, że $S_\lambda(t_1, t_2, \ldots, t_n)_{t_n=0} = S_\lambda(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ oraz, że odwzorowanie

$$\mathbb{Q}[t_1, t_2, \ldots, t_n]^{\mathfrak{S}_n} \to \mathbb{Q}[t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}$$

zadane przez podstawienie $t_n = 0$ ma jądro rozpięte przez S_λ takie, że $\lambda_n \neq 0$.

Wniosek: Można mówić o funkcjach Schura od nieokreślonej liczby zmiennych $S_\lambda(t_1, t_2, t_3, \ldots)$.

Zadanie 2 Udowodnić wzór

$$S_{\lambda^\vee}(t_1, t_2, t_3, \ldots) = \det \begin{pmatrix} \boxed{e_{\lambda_1}} & e_{\lambda_1+1} & \cdots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & \boxed{e_{\lambda_2}} & \cdots & e_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & & & \\ e_{\lambda_n-n+1} & e_{\lambda_1} & \cdots & \boxed{e_{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

Zadanie 3 Obliczyć kowymiar rozmaitości Schuberta $\Omega(V_\bullet)$ opisanego w punkcie 12.16 wykładu.

Zadanie 4 *Zaległe, ale bardzo proste.* Udowodniliśmy, że $\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ jako reprezentacje $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ są parami nieizomorficzne dla podziałów λ o długości $\leqslant \lambda$.

Opisać wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$.

Wskazówka: Wykorzystać to, że funkcje Schura stanowią bazę funkcji symetrycznych.

Zadanie 5 Niech λ będzie podziałem długości $\leqslant m$. Wiązka $\mathcal{L}_\lambda$ nad przestrzenią flag $Fl(m) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})/B$ była zdefiniowana na ostatnim wykładzie. Wykazać, że $\mathcal{L}_\lambda$ jest generowana przez przekroje holomorfizne (tzn „globalnie generowana").

Ponieważ $\mathcal{L}_\lambda$ *jest ekwiwariantna, wystarczy wskazać przekrój, który nie zeruje się w jednym punkcie.*