Reprezentacje Grup i Geometria, Zadania na 26 maja

Zadanie 1 Udowodnić, że $\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^m)$ jako reprezentacje $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ są parami nieizomorficzne dla podziałów λ o długości $\leqslant \lambda$. Opisać wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$.

Wskazówka: Wykorzystać to, że funkcje Schura stanowią bazę funkcji symetrycznych.

Zadanie 2 Niech Z będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. Udowodnić, że tensory proste $v^n \in Z^{\otimes n}$ rozpinają liniowo $(Z^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$.

Zadanie 3 Niech λ będzie podziałem długości $\leqslant m$. Wiązka $\mathcal{L}_\lambda$ nad przestrzenią flag $Fl(m) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})/B$ była zdefiniowana na ostatnim wykładzie. Wykazać, że $\mathcal{L}_\lambda$ jest generowana przez przekroje holomorfizne (tzn „globalnie generowana”).

Ponieważ $\mathcal{L}_\lambda$ jest ekwiwariantna, wystarczy wskazać przekrój, który nie zeruje się w jednym punkcie.

Zadanie 4 Niech $p(n)$ oznacza ilość diagramów Younga o n pudełkach

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 1, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 3, \quad p(4) = 5, \quad p(5) = 7, \quad p(6) = 11, \quad \dots .$$

Udowodnić wzór mający sens w szeregach formalnych

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^m} \, .$$

Zadanie 5 *(Zaległe) Wyprowadzić formułę haków ze wzoru Frobeniusa na charakter reprezentacji V_λ.*